Übungsblatt 3

Geometrie WS 2017/18

Lösung einer Aufgabe der Rückseite

Aufgabe: Berechnen Sie die Länge von einer der Höhen in einem Dreieck in $\mathbb{R}^2$

- (a) in Termen des Winkelmaßes eines Winkels und der Längen der ihn einschließenden Seiten, wobei die Höhe auf einer dieser Seiten senkrecht stehe oder
(b) in Termen der Seitenlängen der drei Seiten des Dreiecks.

Benutzen Sie das Ergebnis, um den Flächeninhalt (wie üblich durch Höhe und Grundlinie gegeben) wie in (a) und auch wie in (b) auszudrücken.

Lösung: Zu (a) Fertigen Sie sich eine Skizze zu den Ausführungen an. Das Dreieck sei mit $\Delta(A, B, C)$ bezeichnet, die Seitenlängen mit $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ und das Winkelmaß des Innenwinkels $\alpha = |\angle(BAC)|$. Sei F der Fußpunkt der Höhe auf AB . Dann ist $\vec{AF}$ die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{AC}$ auf den durch $\vec{AB}$ aufgespannten Unterraum und es gilt

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

(siehe LAAG II). Folglich

$$|AF|^2 = \frac{(\vec{AC} \cdot \vec{AB})^2}{|\vec{AB}|^2}.$$

Mit der Definition des Bogenwinkelmaßes (siehe VL) ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$$

also

$$|AF|^2 = \cos^2(\alpha)|AC|^2 = \cos^2(\alpha)b^2.$$

$\Delta(A, F, C)$ ist in C rechtwinklig. Mit dem Satz des Pythagoras in $\mathbb{R}^2$ (siehe Übungsblatt 3) folgt nun für die Länge $h = |CF|$ der Höhe auf AB

$$h^2 = b^2 - |AF|^2 = b^2 - \cos^2(\alpha)b^2 = b^2 \sin^2(\alpha)$$

bzw. $h = b \sin(\alpha)$.

(Das folgt direkt aus der Schuldefinition des Sinus und Kosinus, die wir hier nicht verwendet haben. Wenn Sie diese einfach verwenden wollen, müssten Sie herleiten, wie diese Beziehung aus den bisher aus der Vorlesung bekannten Dingen folgt.)

Der Flächeninhalt ist dann gegeben durch

$$A = \frac{hc}{2} = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha).$$

Zu (b) Es gilt

$$\begin{aligned} 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} &= |AB|^2 + |AC|^2 - (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= |AB|^2 + |AC|^2 - \vec{BC} \cdot \vec{BC} \\ &= c^2 + b^2 - a^2. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

und

$$h = b\sqrt{1 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}.$$

Schließlich

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Das ist Herons Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks in Termen der Seitenlängen. Diese ist auch mit

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

angegeben. Überzeugen Sie sich, dass beide Ausdrücke gleich sind.