

AUFGABE 1. Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{2}$,

- a) indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.
- b) durch ein geometrisches Argument.

Zunächst eine Vorbemerkung. Für ein Paar (a, b) mit $a > b$ definiere die Funktion $f(a, b) = (a', b')$ durch

$$f(a, b) = \begin{cases} (a - b, b) & \text{wenn } b < a - b \\ (b, a - b) & \text{wenn } b \geq a - b. \end{cases} \quad (1)$$

Der euklidische Algorithmus angewendet auf ein Paar (a_1, b_1) mit $a_1 > b_1$ liefert eine rekursive Folge $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$ wobei $(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Algorithmus bricht ab, wenn $a_n = b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass der euklidische Algorithmus genau dann abbricht, wenn es natürliche Zahlen $q, p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $qa_1 + pb_1 = 0$.

Teil a) Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Dann bricht der Algorithmus angewendet auf $(a_1, b_1) = (\sqrt{2}, 1)$ ab. Wir erhalten die Folge

$$(\sqrt{2}, 1), (1, \sqrt{2} - 1), (2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1), (\sqrt{2} - 1, 3 - 2\sqrt{2}), \dots$$

Es gilt $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$, also

$$\alpha \cdot (a_1, b_1) = (a_3, b_3), \quad \alpha = \sqrt{2} - 1. \quad (2)$$

Wir beweisen durch Induktion, dass damit für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_{n+2}, b_{n+2}) = \alpha \cdot (a_n, b_n). \quad (3)$$

Der Induktionsanfang ist (2). Offensichtlich gilt $f(\alpha \cdot (a, b)) = \alpha \cdot f(a, b)$ für alle $\alpha > 0$ und (a, b) mit $a > b$. Es gelte (3) für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit

$$(a_{n+3}, b_{n+3}) = f(a_{n+2}, b_{n+2}) = f(\alpha \cdot (a_n, b_n)) = \alpha \cdot f(a_n, b_n) = \alpha \cdot (a_{n+1}, b_{n+1}).$$

Das ist der Induktionsschritt. Aus (3) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt sofort $(a_{2n}, b_{2n}) = \alpha^n \cdot (a_2, b_2)$ und $(a_{2n+1}, b_{2n+1}) = \alpha^n \cdot (a_1, b_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere bricht die Folge nicht ab im Widerspruch zu unserer Annahme.

Bemerkung: Man kann das obige Argument auch auf folgenden Fall anwenden: Es gibt ein $\alpha > 0$ und $k \geq 2$, so dass $(a_k, b_k) = \alpha \cdot (a_1, b_1)$.

Teil b) Wir zeigen (2) geometrisch. Betrachte dazu ein rechtwinkliges gleichschenkeliges Dreieck $\triangle ABC$ mit Standardbezeichnung, so dass $|\angle C| = \pi/2$ und $|AB| = |BC| = 1$. Sei $D \in AB$, so dass $|AD| = 1$ und $E \in BC$, so dass D der Lotfusspunkt von E auf AB ist (siehe Skizze). Wir behaupten

$$|BD| = |DE| = |EC|. \quad (4)$$

Skizze

Wir zeigen $|BD| = |DE|$: Da $\triangle ABC$ gleichschenkelig und rechtwinklig ist, folgt $|\angle A| = \pi/4$. Das Viereck $\square ADEC$ hat die Innenwinkelsumme von 2π . Damit

$$|\angle DEC| = 2\pi - |\angle ADE| - |\angle A| - |\angle ACE| = \frac{3}{4}\pi.$$

Nach dem Nebenwinkelsatz folgt $|\angle DEB| = \pi/4$. Da $|\angle BDE|$ ein rechter Winkel ist, gilt auch $|\angle DBE| = \pi/4$. Somit ist nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes das Dreieck $\triangle BDE$ gleichschenkelig. Also $|BD| = |DE|$.

Wir zeigen $|DE| = |EC|$: Nach SsW sind die Dreiecke $\triangle AEC$ und $\triangle AED$ kongruent (in jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse immer die längste Seite). Also $|DE| = |EC|$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|AB| = \sqrt{2}$ und nach Voraussetzung $|BC| = 1$. Der erste Schritt des Euklidischen Algorithmus angewendet auf (AB, BC) liefert (BC, BD) und nach (4) ist der zweite Schritt (BE, BD) . Da die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BED$ ähnlich sind (beide sind rechtwinklig und gleichschenkelig) gilt (2).