Übungsblatt 9

Geometrie WS 2017/18

Lösung einer Aufgabe der Rückseite

Aufgabe: Seien drei Kreise K, L, M gegeben, die sich paarweise immer in genau zwei Punkten schneiden. Dann sind die drei Geraden durch diese Paare von Punkten entweder alle parallel zueinander oder schneiden sich alle in einem Punkt. (siehe auch die Geogebra-Datei "3Kreise.ggb")

Lösung: Seien die Schnittpunkte von K und L mit A und B, die von L und M mit C und D und die von K und M mit E und F bezeichnet. Angenommen, alle drei Geraden sind parallel, dann ist nichts zu zeigen. Seien also o.B.d.A. $G(A, B)$ und $G(C, D)$ nicht parallel und mit S der Schnittpunkt bezeichnet. Ist $E = S$ oder $F = S$, so ist erneut nichts zu zeigen. Sei also $S \notin \{E; F\}$. Sind zwei der Punkte identisch, so schneiden sich die drei Kreise in diesem und die drei Geraden ebenso. Somit folgt wieder sofort die Behauptung und wir können annehmen, dass alle sechs Schnittpunkte paarweise verschieden sind.

Wir betrachten nun die Gerade $G(S, E)$ und bezeichnen mit F' den zweiten Schnittpunkt dieser mit K, falls sie nicht Tangente an K ist und setzen sonst $F' = E$. Nun gilt mit dem Sekanten- bzw. dem Tangentensatz oder dem Sehnensatz angewandt für den Kreis K bzw. L:

$$|AS||BS| = |F'S||ES|$$
$$|AS||BS| = |CS||DS|.$$

Insbesondere ist also $|F'S||ES| = |CS||DS|$ und somit liegen C, D, E, F' auf einem Kreis, falls $F' \neq E$ oder ist $G(S, E)$ tangential an den Umkreis des Dreiecks $\Delta(C, D, E)$. $C, D, E \in M$ nach Voraussetzung, also ist M der Umkreis des Dreiecks $\Delta(C, D, E)$. Falls also $G(S, E)$ tangential an K ist, wäre sie auch tangential an M im Widerspruch zur Annahme, dass sich die Kreise in zwei Punkten schneiden. Also ist $F' \neq E$ und $F' \in M \cap K$ ist der zweite Schnittpunkt der Kreise. Folglich ist $F = F'$ und $G(S, E) = G(E, F)$ und somit ist $S \in G(E, F)$ und die drei Geraden schneiden sich im Punkt S.