
Zusätzliches Übungsblatt

Geometrie WS 2017/18

Lösungen und Lösungsansätze

Die vorgeschlagenen Lösungen sind sicher nicht die einzig möglichen.

Aufgabe 1

Seien s_a, s_b, s_c positive Zahlen. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein Dreieck, dessen Seitenhalbierende in A die Länge s_a , in B die Länge s_b und in C die Länge s_c besitzt. Beweisen Sie, dass Ihre Konstruktion korrekt ist und diskutieren Sie, wieviele Lösungen (bis auf Kongruenz) es gibt.

Lösung: Wir wissen, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden. Dieser sei mit S bezeichnet. Er teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ vom Eckpunkt aus. Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck. Sei A' ein Punkt auf der anderen Seite von $G(B, C)$ als A , so dass $ABA'C$ ein Parallelogramm ist. Die Diagonalen AA' und BC halbieren sich in einem solchen. Der Schnittpunkt ist demzufolge der Mittelpunkt M der Seite BC . Das Dreieck $\Delta(A', B, C) \cong \Delta(A, C, B)$ (gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm sind kongruent und die Behauptung folgt mit [SSS]). Sei S' der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in $\Delta(A', B, C)$. Folglich ist $BS' \cong CS$. Weiterhin ist $A'M \cong AM$, $MS \cong MS'$ und folglich $AS \cong SS'$, wegen der Teilungseigenschaft der Schwerpunkte ($1/3 + 1/3 = 2/3$). Demnach gilt für das Dreieck $\Delta(S', S, B)$, dass $|SS'| = 2/3s_a$, $|BS| = 2/3s_b$, $|BS'| = 2/3s_c$.

Da wir Strecken dritteln müssen, wird hier eine Konstruktion angegeben, die das möglichst sparsam mit Zirkel und Lineal tut. Eine eingereichte Lösung, die nur feststellt, dass dies möglich sei und beim Zeichnen auf andere Hilfsmittel zurückgreift, wäre vollkommen akzeptabel. Wir konstruieren also ein Dreieck, dass um den Streckungsfaktor $3/2$:

Konstruieren zunächst ein Dreieck mit den Seitenlängen s_a, s_b und s_c . Das ist nach [SSS] eindeutig möglich, falls die drei Zahlen die Dreiecksungleichungen erfüllen. Sei mit S die Ecke bezeichnet, die der Seite mit Länge s_c , mit S' die Ecke, die der Seite mit Länge s_b und mit B diejenige, die der Seite der Länge s_a gegenüberliegt. Trage nun auf Strahl in S entgegengesetzt zu Strahl in S durch S' die Länge s_a ab. Bezeichne Punkt mit A' . Halbiere SS' , Mittelpunkt sei M . Trage auf Strahl in M entgegengesetzt zu Strahl in M durch B die Länge MB ab. Bezeichne Punkt mit C' . Konstruiere schließlich die Parallele durch S zu $A'C'$. Sie scheidet $A'B$ in A und $C'B$ in C .

Behauptung: Das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ erfüllt die geforderten Bedingungen.

Beweis: Betrachten zunächst das Dreieck $\Delta(A', B', C')$. $G(A', M)$ ist nach Konstruktion die Seitenhalbierende in A' und $|A'S| : |SM| = 2 : 1$. Folglich ist S auch der Schwerpunkt des Dreiecks. Nun ist $|A'S| = s_a$ und $|BS| = s_b$ nach Konstruktion. Das Viereck $SBS'C'$ ist ein Parallelogramm, da sich die Strecken BC' und SS' in M nach Konstruktion halbieren. Demzufolge ist auch $|C'S| = s_c$. Insgesamt sind die Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta(A', B, C')$ $3/2s_a, 3/2s_b, 3/2s_c$. Das konstruierte Dreieck $\Delta(A, B, C)$ geht durch Stauchung um Faktor $2/3$ aus $\Delta(A', B, C')$ hervor. Das folgt aus dem Strahlensatz und der Art, wie der Schwerpunkt die Seitenhalbierende teilt. Demzufolge haben die Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ die geforderten Längen.

Hinweis: Fertigen Sie sich zum Nachvollziehen der Lösung eine Skizze an.

Aufgabe 3

Sei K ein Kreis, $P, Q \in K$ und $\ell > 0$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal Punkte $S, T \in K$, so dass PT parallel zu QS ist und die Summe der Längen gleich ℓ . Beweisen Sie, dass Ihre Konstruktion korrekt ist und diskutieren Sie, wieviele Lösungen es gibt.

Hinweis: Lösen Sie das Problem unter der Annahme, dass S und T nicht auf verschiedenen Seiten von $G(P, Q)$ liegen. Betrachten Sie das Viereck $PQST$. Was müsste das für ein Viereck sein?

Wenn Sie bis hierher alles gemacht haben, wird die Aufgabe als gelöst betrachtet. Können Sie das Problem auch ohne die zusätzliche Annahme lösen?

Lösung: (1) Angenommen, S, T liegen auf derselben Seite von $G(P, Q)$. Dann ist das Viereck $PQST$ nicht überschagen und folglich ein Parallelogramm. Da die Eckpunkte auf einem Kreis liegen muss es gleichschenkelig sein: $PQ \cong ST$. Die Strecke zwischen den Mittelpunkten M, N dieser beiden Strecken (auch Mittellinie genannt) ist dann halb so lang, wie die Summe der Längen der parallelen Seiten PT und QS , also $\ell/2$.

Weiterhin ist $AM \cong AN$ wobei A der Mittelpunkt des Kreises K sei.

Beweis: Die Dreiecke $\triangle(A, P, Q) \cong \triangle(A, T, S)$ sind kongruent nach [SSS].

Also ist $\angle(ATS) \cong \angle(APQ)$. Außerdem $AT \cong AP$ (Radien, wie schon zuvor ausgenutzt) und $TN \cong PM$ (halbe Strecken, die kongruent sind). Die Behauptung folgt nun.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Kreises als gegeben an (Sie wissen zur Not, wie man den mit Zirkel und Lineal erhält, oder?) Wir konstruieren zunächst den Mittelpunkt M von PQ . Nun konstruieren/zeichnen wir die folgenden zwei Kreise: den Kreis um A mit Radius AM sowie den Kreis um M mit Radius $\ell/2$. Im Schnittpunkt N (falls er existiert) konstruieren wir die Senkrechte zu AN . Die schneidet den Kreis K in zwei Punkten, die so mit S, T bezeichnet werden (können), dass die Bedingungen erfüllt sind.

Korrektheit der Konstruktion: Da $AN \cong AM$ und $PQ \perp AM$ (Mittelsenkrechte) sowie $ST \perp AN$ (nach Konstruktion) folgt $TN \cong PM$, $SN \cong QM$ und somit $PQ \cong ST$. Folglich gilt $\angle(PSQ) \cong \angle(TQS)$ (Umfangswinkel über kongruenten Sehnen) und da $\angle(PTQ) \cong \angle(PSQ)$ (Umfangswinkel über PQ) ist PT parallel zu QS (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes) und $PQST$ ist ein gleichschenkliges Trapez. Da für die Mittellinie nach Konstruktion $|MN| = \ell/2$ ist $|PT| + |QS| = \ell$.

Durchführbarkeit: Die einzig mögliche Obstruktion ist die Nichtexistenz eines Schnittpunktes der beiden Kreise. Das geschieht genau dann, wenn der Durchmesser d des gegebenen Kreises kleiner als $\ell/2$ ist.

Anzahl der Lösungen: Die erhaltenen Trapeze sind zwar kongruent, aber da P und Q benannt wurden, gibt es für jeden Schnittpunkt der konstruierten Kreise eine Lösung. Es kann also keine, genau eine oder genau zwei Lösungen mit der genannten zusätzlichen Eigenschaft geben in Abhängigkeit davon ob $d < \ell/2$, $d = \ell/2$ oder $d > \ell/2$ ist.

(2) (war nicht gefordert - siehe Aufgabestellung) Sei $S, T \in K$ Punkte mit den geforderten Eigenschaften, die auf verschiedenen Seiten von $G(P, Q)$ liegen. Dann ist $PQ \cap ST \neq \emptyset$, da Kreisscheiben konvex sind und somit liegen P und Q auch auf verschiedenen Seiten von $G(S, T)$. Bezeichne R den Punkt auf dem Strahl in P , der T enthält, so dass $|PR| = 2\ell$. Dann ist nach Voraussetzung $|TR| = |QS|$. Da außerdem TR parallel zu QS ist und R und Q auf derselben Seite von $G(S, T)$ liegen, da R und P auf verschiedenen Seiten nach Konstruktion liegen, ist $RSQT$ ein Parallelogramm und somit RQ parallel zu ST . Damit ist $\angle(TRQ) \cong \angle(TSQ)$ (das gilt auch, falls diese Nullwinkel sind!). Weiterhin ist $\angle(TSQ) \cong \angle(TPQ) = \angle(RPQ)$ weil sie Umfangswinkel über derselben Sehne TQ sind. Somit ist $\triangle(P, R, Q)$ gleichschenkelig mit Basis PR und somit $|PQ| = |RQ|$.

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Konstruiere die Kreise $L = K(P, \ell)$ und $M = K(Q, |PQ|)$. Sie schneiden sich nicht (falls $\ell > 2|PQ|$), in genau einem Punkt (falls $\ell = 2|PQ|$) oder in genau zwei Punkten (falls $\ell < 2|PQ|$). Sei R ein Schnittpunkt außerhalb des Kreises. Sei der Schnittpunkt von PR mit K mit T bezeichnet. Die Parallele g zu RQ durch T kann keine Tangente sein: R und Q lägen auf derselben Seite davon. Dann müsste R und der Kreis auf derselben Seite der Tangente liegen und $RT \cap K$ enthielte neben T noch einen weiteren Punkt. Da dies nicht P sein kann nach Voraussetzung, würde $G(R, P)$ den Kreis in drei Punkten schneiden. Der zweite

Schnittpunkt von g mit K sei mit S bezeichnet. Nach Konstruktion ist $\angle(PRQ) \cong \angle(RPQ)$. Außerdem ist $\angle(PTS) \cong \angle(PRQ)$ (Stufenwinkel an Parallelen und $\angle(RPQ) = \angle(TPQ) \cong \angle(TSQ)$ (Umfangswinkel über TQ) und somit ist SQ parallel zu RT , also $RQST$ ein Parallelogramm und somit $|SQ| = |PT|$ und schließlich $|SQ| + |PT| = |PR| = \ell$ nach Konstruktion.

Durchführbarkeit: Um den Schnittpunkt R zu bekommen, muss $2|PQ| > \ell$ sein. Behauptung: einer der beiden Schnittpunkte von L und M liegt außerhalb von K ($\ell > 0$ ist immer vorausgesetzt). Anzahl der Lösungen: Es gibt so viele Lösungen, wie es Schnittpunkte R von L und M außerhalb von K gibt. Der Nachweis der letzten beiden Behauptungen sind nicht ganz einfach und Ihnen überlassen. Das wird vom Radius von K , von $|PQ|$ und von ℓ abhängen. Es gibt also in dieser Konfiguration wieder keine, eine oder zwei Lösungen.

Insgesamt gibt es in Abhängigkeit dieser Größen keine, eine, zwei, drei oder vier Lösungen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Die Fußpunkte der drei Lote von einem Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks auf die Seiten desselben liegen auf einer Geraden. Hinweis: Winkelsätze am Kreis sind hier zielführend.

Lösung: Die Gerade wird Simsonsche Gerade genannt. Beweise zu der Behauptung finden sich im Internet.

Aufgabe 4

Sei $\Delta(A, B, C)$ ein beliebiges Dreieck. Sei über den Seiten jeweils ein gleichseitiges Dreieck errichtet, d.h. Punkte A', B', C' , so dass $\Delta(A', B, C)$, $\Delta(A, B', C)$, $\Delta(A, B, C')$ gleichseitig sind und A' und A auf verschiedenen Seiten von $G(B, C)$, B und B' auf verschiedenen Seiten von $G(A, C)$ und C und C' auf verschiedenen Seiten von $G(A, B)$ liegen.

(1) Zeigen Sie, dass sich die drei Umkreise der gleichseitigen Dreiecke in einem gemeinsamen Punkt F schneiden. Achtung: Hier müssen gegebenenfalls Fälle unterschieden werden. Wann liegt dieser Punkt im Inneren des Dreiecks? Was gilt dann für die Winkel $\angle(AFB)$, $\angle(BFC)$ und $\angle(CFA)$?

(2) Zeigen Sie, dass sich die Geraden $G(A, A')$, $G(B, B')$ und $G(C, C')$ genau in P schneiden.

(3)* Wenn Sie bis hierher alles gemacht haben, wird die Aufgabe als gelöst betrachtet. Angenommen der Punkt liegt nicht außerhalb des Dreiecks. Können Sie dann zeigen, dass die Funktion, die einem Punkt P der Ebene die Summe $|PA| + |PB| + |PC|$ zuordnet, in F ihr Minimum annimmt?

Lösung: Der Punkt P ist der Fermat-Punkt (er wird unterschiedlich definiert, aber das ist das Schlagwort). Ein Beweis von (1) und (2) findet sich zum Beispiel hier:

http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/wims/standort/kap6_1_1.htm

(die Details habe ich nicht geprüft, aber die Ideen sind genau die, an die ich dachte). (3)* wird in vielen Quellen behandelt (z.B. auch im Wikipedia-Artikel).