Aufgabe Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes von $P = 1 + 2i \in \mathbb{H}$ auf die hyperbolische Gerade $g = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}$.

Lösung. 1. Berechne den Spiegelpunkt $P' = S_g(P)$ von P an g : Es gilt $P' = \rho P$ für ein $\rho > 0$ mit $|P'| \cdot |P| = 1$, d.h. $\rho = 1/|P|^2 = 1/5$. Damit hat P' die Koordinaten

$$P' = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5}.$$

Bemerkung: Spiegelungen (in $\mathbb{H}$) an hyperbolischen Geraden sind euklidisch Spiegelungen an der euklidischen Halbgeraden oder Kreispiegelungen am euklidischen Halbkreis. Das ist einfach zu sehen: Die hyperbolische Gerade ist jeweils genau die Fixpunktmenge der euklidisch definierten Abbildung und diese ist auch eine hyperbolische Isometrie.

2. Berechne den Mittelpunkt M des Kreises h , welcher das Lot beschreibt: Dieser ist der Schnittpunkt der reellen Achse mit der (euklidischen) Mittelsenkrechten $m = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ der Strecke $\overline{P'P}$. Wir wählen den Aufpunkt von m als Mittelpunkt und die Richtung $v = P - i$, also

$$A = \frac{P + P'}{2} = \frac{3}{5} + \frac{6i}{5}, \quad v = -2 + i.$$

Die Bedingung für den Schnittpunkt lautet

$$0 = \operatorname{Im} \left(\frac{3}{5} + \frac{6i}{5} + t(-2 + i) \right) = \frac{6}{5} + t, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{5}.$$

Damit erhalten wir den Mittelpunkt

$$M = \frac{3}{5} + \frac{6i}{5} + \left(-\frac{6}{5}\right)(-2 + i) = 3.$$

3. Wir berechnen die Koordinaten von $Q = a + bi$, der Lotfußpunkt: Aus $Q \in g$ und $Q \in h$ erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = 1 \\ (a - 3)^2 + b^2 & = r^2. \end{cases}$$

wobei $r^2 = |P - M|^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$. Wir stellen die erste nach b^2 um und setzen in die zweite ein:

$$(a - 3)^2 + 1 - a^2 = a^2 - 6a + 9 + 1 - a^2 = 8, \quad \Leftrightarrow \quad -6a + 10 = 8.$$

Wir erhalten $a = 1/3$ und somit auch $b = \sqrt{1 - 1/9} = \sqrt{8}/3$. □