Der Fundamentalsatz der Algebra

Vortragsausarbeitung im Rahmen des Proseminars
„Differentialtopologie“

Benjamin Lehning

17. Februar 2014

Für den hier dargelegten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (angelehnt an Milnor, jedoch genauer ausgeführt), ist zunächst die Klärung einiger Begriffe und Eigenschaften kompakter Untermannigfaltigkeiten vonnöten. Zuerst wäre da der Begriff des zusammenhängenden Raumes.

Definition 1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, falls er keine Partition in zwei offene, nichtleere Teilmengen besitzt.*

Beispiel. *Jedes reelle Intervall I ist als Teilraum von $\mathbb{R}$ zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen es gäbe offene, nichtleere Teilmengen U und V mit $U \sqcup V = I$. Sei dann $a \in U$ und $b \in V$, o.B.d.A $a < b$. Da $I \setminus V = U$ offen ist, ist V abgeschlossen und somit $[a, b] \cap V$ kompakt. Sei c das also kleinste Element von $[a, b] \cap V$, dann gibt es wegen der Offenheit von V ein $\varepsilon > 0$ mit $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset V$. Da $c > a$ ist aber $(c - \varepsilon, c) \cap [a, b]$ nichtleer, im Widerspruch zur minimalen Wahl von c. □

Ein geographisches Beispiel einer nichtzusammenhängenden Menge wäre die Landmasse einer Inselgruppe. Hierbei wären die verschiedenen Inseln offene Mengen, da sich in einer näheren Umgebung einer Insel nur Wasser, nicht jedoch ein Stück Land einer anderen Insel befindet. An diesem Beispiel sieht man auch leicht ein, dass man nicht von Insel zu Insel gehen kann, ohne dabei Wasser zu überqueren oder mathematischer ausgedrückt: Es gibt Punkte, die sich nicht durch eine stetige Kurve in der Landmasse verbinden lassen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt wegzusammenhängend, wenn für jedes Paar von Punkten $x, y \in X$ eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \to X$ existiert, sodass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gilt.*

Beispiel. *Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend. Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend.*

Nun möchte ich die eben getätigten Überlegungen über Inselgruppen (in der Kontraposition) auf beliebige zusammenhängende Räume verallgemeinern und beweisen:

Lemma 1. *(i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein zusammenhängender Raum und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein topologischer Raum. Dann gilt für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$, dass $f(X)$ ein zusammenhängender Teilraum von Y ist. Insbesondere ist jeder zu X homöomorphe Raum zusammenhängend.*
(ii) Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ nun ein wegzusammenhängender Raum. Dann ist Z auch zusammenhängend.
(iii) Sei $f : Z \to Y$ stetig. Dann ist $f(Z)$ wegzusammenhängend. Insobesondere ist jeder zu Z homöomorphe Raum wegzusammenhängend.

Beweis. zu (i): Angenommen, es gäbe offene, nichtleere Teilmengen U, V von $f(X)$, mit $U \sqcup V = f(X)$. Dann sind $\tilde{U} := f^{-1}(U)$ und $\tilde{V} := f^{-1}(V)$ offene, nichtleere Mengen mit $\tilde{U} \sqcup \tilde{V} = X$. Im Widerspruch zum Zusammenhang von X.
zu (ii): Angenommen, es gäbe offene, nichtleere Teilmengen U, V von Z mit $U \sqcup V = Z$. Sei dann $x \in U$ und $y \in V$, $\gamma : [0, 1] \to Z$ eine stetige Verbindungskurve zwischen x und y. Dann ist

$$\gamma([0,1]) = (\gamma([0,1]) \cap U) \sqcup (\gamma([0,1]) \cap V)$$

und somit unzusammenhängend. Im Widerspruch zu (i).
zu (iii): Seien a und b beliebige Elemente aus $f(Z)$. Wähle dann ein $a' \in f^{-1}(a)$ und ein $b' \in f^{-1}(b)$. Dann gibt es eine stetige Verbindungskurve γ' zwischen a' und b'. Nun ist $\gamma := f \circ \gamma'$ eine stetige Verbindungskurve zwischen a und b. □

Abschließen möchte ich die Ausführungen über zusammenhängende Räume mit der folgenden Eigenschaft des $\mathbb{R}^n$:

Satz 1. *Sei $n \geq 2$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, wegzusammenhängende Menge. Dann ist auch $U \setminus \{c\}$ offen und wegzusammenhängend für jedes beliebige $c \in U$.*

Beweis. Die Offenheit von $U \setminus \{c\}$ ist offensichtlich.
Zum Wegzusammenhang: Seien $a, b \in U \setminus \{c\}$ beliebig und $\gamma : [0, 1] \to U$ eine stetige Verbindungskurve der beiden Punkte. Falls $\gamma^{-1}(c) = \emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. O.B.d.A. sei also $\gamma^{-1}(c) = \{t_1\}$. Sonst Konstruiere man aus γ ein $\tilde{\gamma}$ mit dieser Eigenschaft, indem man die Kurve im Intervall $[\alpha, \beta)$ „lösche“, wobei α das kleinste und β das größte Element des Urbildes $\gamma^{-1}(c)$ ist.
Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass erstens $\overline{B(c, \varepsilon)} \subset U$ und zweitens $\varepsilon < min(d(a, c), d(b, c))$ gilt. Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es dann eine Eintrittsstelle $t_0 < t_1$ in die Kugel und eine Austrittsstelle $t_2 > t_1$,

sodass $d(c, \gamma(t_0)) = d(c, \gamma(t_2)) = \varepsilon$. Konstruiere nun eine Kurve $\tilde{\gamma}$, sodass $\tilde{\gamma}$ im Intervall $[t_0, t_2]$ ein Kreisbogen auf der Sphäre $S(c, \varepsilon)$ ist, der $\gamma(t_0)$ und $\gamma(t_2)$ stetig verbindet und ansonsten γ gleicht. Dann ist $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to U \setminus \{c\}$ eine stetige Verbindungskurve zwischen a und b. $\square$

Bemerkung. *(a) Induktiv folgt, dass für jede endliche Teilmenge $C \subset U$ die Menge $U \setminus C$ offen und wegzusammenhängend ist.*
(b) Wegen Lemma 1 (iii) gilt der Satz auch für jeden zu einer offenen, wegzusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorphen Raum.

Für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benötige ich weiterhin, den Begriff des kritischen/regulären Punktes/Wertes einer Funktion zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten:

Definition 3. *Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Funktion zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann heißt $x \in M$ regulärer Punkt von f, wenn $\mathrm{d}f_x$ den Tangentialraum TM_x surjektiv auf den Tangentialraum $TN_{f(x)}$ abbildet. Ansonsten heißt x kritisch.*
Ein Punkt $y \in N$ heißt regulärer Wert von f, falls das Urbild $f^{-1}(y)$ ausschließlich reguläre Punkte enthält. Ansonsten heißt y kritisch.

Falls M und N die gleiche Dimension haben, ist $\mathrm{d}f_x$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen gleicher Dimension und somit genau dann surjektiv, wenn sie ein Isomorphismus ist. x ist in diesem Fall also genau dann ein reguärer Wert von f, wenn $\mathrm{d}f_x$ invertierbar ist. Aufgrund der lokalen Parametrisierbarkeit der Mannigfaltigkeiten, lässt sich der Satz über die lokale Umkehrbarkeit differenzierbarer Funktionen auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension verallgemeinern. Dies brauche ich zum Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma 2. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, N eine Mannigfaltigkeit gleicher Dimension und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt:*
(i) Ist y ein regulärer Wert von f, so ist $f^{-1}(y)$ endlich.
(ii) Es gibt eine offene Umgebung U von y, so dass $\sharp f^{-1}(y) = \sharp f^{-1}(y')$ für alle $y' \in U$ gilt.
(iii) U enthält ausschließlich reguläre Werte von f.

(ii) & (iii) evtl. bzw. zusammenfassen

Beweis. zu (i): Da M kompakt ist und f stetig, ist $f^{-1}(y)$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt. Nun besteht $f^{-1}(y)$ nach Voraussetzung ganz aus regulären Punkten, also gibt es nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit für jedes $x \in f^{-1}(y)$ eine offene Umgebung V_x, sodass $f \mid V_x$ injektiv ist. Diese V_x überdecken $f^{-1}(y)$ vollständig. Wegen der Kompaktheit existieren also endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in f^{-1}(y)$, sodass $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ $f^{-1}(y)$ ganz überdecken. Da jedes V_{x_i} aber nur ein Element aus $f^{-1}(y)$ enthält, folgt, dass $f^{-1}(y)$ endlich ist.

zu (ii): Seien $x_1, \dots, x_n$ die Elemente von $f^{-1}(y)$. Wähle nun paarweise verschiedene offene Mengen $V_1, \dots, V_n$, sodass $x_i \in V_i$ gilt und $f \mid V_i : V_i \to f(V_i)$ ein Diffeomorphismus ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Definiere dann

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} f(V_i) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$$

Wegen der Kompaktheit von M ist U offen, außerdem eine Umgebung von y und jedes Urbild eines Punktes aus U hat genau n Elemente.
zu (iii): Sei U wie im Beweis zu (ii). Definiere dann für jedes i die Menge $\tilde{V}_i := f^{-1}(U) \cap V_i$. Dann ist $f \mid \tilde{V}_i : \tilde{V}_i \to f(\tilde{V}_i)$ ein Diffeomorphismus und somit jeder Punkt in $\tilde{V}_i$ ein regulärer Punkt. Da aber jeder Urbildpunkt eines Elementes aus U nach Definition von U in einem der $\tilde{V}_i$ enthalten ist, ist jedes Element aus U ein regulärer Wert. □

Bevor wir zum eigentlichen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra kommen, bringe ich noch einige Bemerkung zu differenzierbaren Funktionen in einer komplexen Variablen.

Definition 4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, falls der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. f heißt komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt komplex differenzierbar ist.

Eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion ist auch (als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) in z_0 differenzierbar und das Differential $\mathrm{d}f_{z_0}$ stimmt mit der Abbildung $w \mapsto w \cdot f'(z_0)$ überein. Da für $f'(z_0) \neq 0$, $w \mapsto \frac{w}{f'(z_0)}$ die Umkehrabbildung von $\mathrm{d}f_{z_0}$ ist, ist z_0 genau dann ein regulärer Punkt von f, wenn $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Weiterhin gelten für komplex differenzierbare Funktionen analoge Ableitungsregeln wie für differenzierbare Funktionen mit reeller Veränderlicher. Insbesondere ist jedes komplexe Polynom $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ komplex differenzierbar und es gilt $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2a_2 z + a_1$.

Theorem 1 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$. Dann besitzt P eine Nullstelle.*

Beweis. Um die Überlegungen über kompakte Mannigfaltigkeiten nutzbar zu machen, betrachte die stereographische Projektion $h_+ : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$, wobei $N = (0, 0, 1)$ ist.

$$h_+(z) := \frac{2}{|z|^2 + 1}((z, 0) - N)$$

h_+ ist ein Diffeomorphismus mit der Umkehrung $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{1-z}(x + iy)$.
Definiere nun $f : S^2 \to S^2$ mit $f(N) = N$ und $f \mid S^2 \setminus \{N\} = h_+ \circ P \circ h_+^{-1}$.
Als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen ist auch f auf $S^2 \setminus \{N\}$ differenzierbar. Um die Differenzierbarkeit in einer Umgebung von N zu zeigen, betrachte die stereographische Projektion $h_- : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{S\}$, wobei $S = (0, 0, -1)$ ist und $h-$ analog zu $h+$ definiert ist.
Es gilt $h_-^{-1} \circ h_+(z) = h_+^{-1} \circ h_-(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Also gilt für $Q := h_-^{-1} \circ f \circ h_-$

$$Q(z) = \frac{z^n}{\overline{a_n} + \ldots + \overline{a_1} z^{n-1} + \overline{a_0} z^n}$$

Da der Nenner von Q in einer Umgebung von 0 keine Nullstelle hat, ist Q als rationale Funktion in einer Umgebung von 0 definiert und komplex differenzierbar. Aus der Kettenregel folgt, dass $f = h_- \circ Q \circ h_-^{-1}$ in einer Umgebung von N differenzierbar ist. Da $Q'(0) = 0$ ist, ist somit auch $\mathrm{d}f_N = 0$ und also N ein kritischer Punkt und kritischer Wert von f.
$x \in S^2 \setminus \{N\}$ ist nach der Kettenregel genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn $P'(h_+^{-1}(x)) = 0$ ist. Da P' aber ein Polynom vom Grad $n-1$ ist und somit höchstens $n - 1$ Nullstellen haben kann, hat f höchstens n kritische Punkte und damit auch höchstens n kritische Werte.
Bezeichne C im folgenden die Menge der kritischen Werte von f. Sei dann $y_0 \in f(S^2) \setminus C$ beliebig. Ein solches y_0 existiert, da P sonst nur endlich viele Werte annehmen würde, im Widerspruch zu $deg(P) \geq 1$. Betrachte nun auf $S^2 \setminus C$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \iff \sharp f^{-1}(x) = \sharp f^{-1}(y)$.
Da nach Lemma 2 (i) $f^{-1}(y)$ endlich ist für alle y, entsprechen die Äquivalenzklassen den natürlichen Zahlen. Definiere dazu $[n] := \{y \in S^2 \setminus C : f^{-1}(y) = n\}$. Es gilt $S^2 \setminus C = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [n]$, außerdem ist jede Klasse $[n]$ offen. Denn sei $y \in [n]$ beliebig, dann gibt es nach Lemma 2 (ii) eine offene Umgebung U von y mit $U \subset [n]$. Dies ist aber genau die Definition der Offenheit.
Da $S^2 \setminus \{N\}$ homöomorph zum $\mathbb{R}^2$ ist, hat es die Eigenschaft aus Satz 1. Also ist $S^2 \setminus C$ wegzusammenhängend und insbesondere zusammenhängend. Für $n_0 := \sharp f^{-1}(y_0)$ gilt aber $S^2 \setminus C = [n_0] \sqcup \bigcup_{n \in N \setminus \{n_0\}} [n]$. Also ist entweder erstere oder letztere Menge leer, da aber $y_0 \in [n_0]$ ist, ist $\bigcup_{n \in N \setminus \{n_0\}} [n]$ leer und somit $[n_0] = S^2 \setminus C$. Da y_0 aus dem Bild von f gewählt war, ist n_0 größer als 0. Also ist f surjektiv. Insbesondere hat P eine Nullstelle. $\square$