Orientierte Mannigfaltigkeiten und der Abbildungsgrad

Diese Ausarbeitung befasst sich mit dem Brouwer'schen Abbildungsgrad von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten. Dafür seien im gesamten Dokument M und N zwei kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit selber Dimension n. Vor der eigentlichen Definition des Abbildungsgrades und einigen Beispielen zur Anwendung, wird kurz die Orientierung von Mannigfaltigkeiten diskutiert.

1 Orientierung in endlichdimensionalen Vektorräumen

Seien $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ und $(b'_i)_{1\leq i\leq n}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Transformationsmatrix $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, so dass $b'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$ gilt.

Definition 1. *Zwei Basen heißen gleich orientiert, wenn gilt* $det(A) > 0$*.*

Aus den Eigenschaften von Determinanten folgen Symmetrie, Reflexivität und Transitivität dieser Relation. Dadurch zerfällt die Menge aller Basen des $\mathbb{R}^n$ in zwei Äquivalenzklassen, die mit $+1$ und -1 bezeichnet werden, wobei die Standardbasis in $+1$ liegt.

2 Orientiebare Mannigfaltigkeiten

Definition 2. *Wähle nun für alle* $x \in M$ *eine Basis von* TM_x*, so dass* $\forall x_0 \in M \exists U \subseteq M$*, mit* U *Umgebung von* x_0 *und* $\exists h : U \to V$ *Diffeomorphismus* $V \subseteq \mathbb{H}^n$ *offen, so dass* h *orientierungserhaltend ist und* $\forall x \in U$ *die Basis von* TM_x *durch* dh_x *auf die Standardbasis abgebildet wird. Eine derartie Wahl der Basen nennt man Orientierung vom* M*.*

Nicht jede Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Als Beispiel für eine nicht orientiebare Matrix sei, ohne weiter darauf einzugehen, das Möbiusband genannt.

Lemma 1. *Jede zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt genau zwei Orientierungen.*

Beweis. Die Orientierung wird in einem Punkt x_0 gewählt. Da M kompakt und zusammenhängend ist, lassen sich für einen beliebigen Punkt x endliche Folgen von Punkten $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ mit Umgebungen $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ wie in Definiton 2 finden, so dass $x \in U_n$. Da innerhalb jeder der Umgebungen die Basiswechselmatrizen positive Determinanten haben, gilt das auch für die Basiswechselmatrix von TM_{x_0} zu TM_x. Damit gibt es in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit nur eine eindeutige positive oder negative Orientierung. □

Auf dem Rand δM einer orientierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand M wird dadurch auch eine Orientierung induziert. Es gibt hierbei drei Typen von Vektoren in $x \in \delta M$:

- m-1-dimensionale Vektoren in $T(\delta M)_x \subseteq TM_x$
- outward-Vektoren, alle Vektoren v, für die es eine differenzierbare Kurve in M gibt, deren Ableitung in x gleich v ist
- inward-Vektoren, alle Vektoren v, für die es eine differenzierbare Kurve in M gibt, deren Ableitung in x gleich $-v$ ist

Definition 3. *Für jeden Punkt $x \in \delta M$ wählt man nun eine positive Basis $(v_1, ..., v_m)$ von TM_x, so dass v_1 ein outward-Vektor ist und $(v_2, ..., v_m)$ eine Basis von $T(\delta M)_x$ bildet. Damit ergibt sich eine Orientierung für δM.*
Für $m = 1$ wähle als Orientierung -1 bzw $+1$ für jeden Punkt, je nachdem, ob ein positiv orientierter Vektor nach innen (inward) oder nach außen (outward) zeigt.

3 Der Brouwer'sche Abbildungsgrad

Seien $f : M \to N$ mit $f \in C^\infty$.

Definition 4. *Ist $x \in M$ ein regulärer Punkt von f, so ist $df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$ ein linearer Isomorphismus. Sei nun*
$$sign(df_x) = \begin{cases} +1 & df_x \text{ ist orientierungserhaltend} \\ -1 & df_x \text{ ist orientierungsumkehrend} \end{cases}$$

Definition 5. *Für einen regulären Wert $y \in N$ von f ist der Abbildungsgrad $deg(f; y)$ von f dann definiert als $deg(f; y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} sign(df_x)$.*

Wie in einem früheren Vortrag gezeigt, ist die Menge $f^-1(y)$ für reguläre Werte y von f endlich. Zudem ist $deg(f; y)$ lokal konstant und auf einer dichten Teilmenge von N definiert, wie in selbigem Vortrag gezeigt.
Sein nun M eine Mannigfaltigkeit und X eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand, so dass $M = \delta X$.

Lemma 2. *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, die sich zu einer C^∞-Abbildung $F : X \to N$ erweitern lässt, dann ist $deg(f; y) = 0$ für alle regulären Werte y von f.*

Beweis. Sei y ein regulärer Wert von F, dann ist $F^{-1}(y)$ eine kompakte 1-dimensionale Mannifaltigkeit. Die Kompaktheit folgt, da es sich um eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge handelt. Wie in einem anderen Vortrag betrachtet, setzt sich $F^{-1}(y)$ damit aus endlich vielen Kreisen und Bögen zusammen.
Sei nun $A \subseteq F^{-1}(y)$ ein solcher Bogen mit $\delta A = \{a\} \cup \{b\}$. Es genügt nun zu zeigen, dass $sign(df_a) + sign(df_b) = 0$. Für jedes $x \in A$ wähle $(v_1, ..., v_n + 1)$ Basis von TX_x mit $v_1 \in TA_x$. Nun orientiert v_1 TA_x genau dann, wenn $dF_x(v_2, .., v_n)$ in eine positive Basis von TM_x abbildet. Sei nun $v_1(x)$ der positiv orientierte Einheitsvektor in TA_x. Da v_1 stetig ist, kann man oBdA annehmen, dass der Vektor bei a nach innen und bei b nach außen zeigt. Damit ist die Basis $dF_x(v_2(a), ..., v_n(a))$ positiv orientiert, während $dF_x(v_2(b), ..., v_n(b))$ negativ orientiert ist, womit folgt $0 = sign(dF_a) + sign(dF_b) = sign(df_a) + sign(df_b)$.
Ist y kein regulärer Wert von F, aber von f, so kann man nutzen, dass der Abbildungsgrad lokal konstant ist und die regulären Werte dicht liegen. Es existiert also ein regulärer Wert y_0 von F mit $deg(f, y) = deg(f, y_0) = 0$. □

Sei $F : [0, 1] \times M \to N$ eine glatte Homotopie von f und g, mit $f(x) = F(0, x)$ und $g(x) = F(0, x)$.

Lemma 3. *Der Grad $deg(g, y) = deg(f, y)$ für alle gemeinsamen regulären Werte y.*

Beweis. Man orientiert die Mannigfaltigkeit $[0, 1] \times M$ als Produkt, indem man der Basis von T_xM einen positiven Einheitsvektor hinzufügt. Dann ist $\delta([0, 1] \times M) = \{1\} \times M \cup \{0\} \times M$, wobei erstere der Komponenten positive und letzere negative Orientierung besitzt. Dann gilt:
$deg(F|_{\delta([0,1]\times M)} = deg(g, y) - deg(f, y) = 0$, wobei die letzte Gleichheit aus Lemma 1 folgt. □

Theorem 1. *Der Grad $deg(f, y)$ hängt nicht von der Wahl von y ab.*

Beweis. Seien y, z zwei reguläre Werte von f und $h : N \to N$ ein zur Identität isotoper Diffeomorphismus mit $h(y) = z$. Speziell erhält h dann Orientierung und f ist homotop zu $h\circ f$). Daher gilt: $deg(f, y) = deg(h\circ f, h(y))$ und $deg(h\circ f, z) = deg(f, z)$ nach Lemma 2, also insgesamt $deg(f, y) = def(f, z)$. □

Theorem 2. *Sind f, g glatt homotop, dann gilt deg(f)=deg(g).*

Beweis. Nach dem Satz von Sard existiert ein Wert y, der sowohl für f, als auch für g, regulärer Wert ist. Daher gilt:
$deg(f) = deg(f, y) = deg(g, y) = deg(g)$. □

4 Beispiele

(1) Sei $f : S^1 \to S^1$ mit $f(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $deg(f) = k$.
(2) Sei $f : M \to c \in N$, dann ist $deg(f) = 0$.
(3) Sei $f : M \to N$ Diffeomorphismus, dann gilt $deg(f) = \pm 1$, je nachdem, ob f orientierungserhaltend oder -umkehrend ist. Daraus folgt speziell, dass orientierungsumkehrende Abbildungen niemals homotop zur Identität sind.
(4) **Satz von Hopf:**
S^n besitzt genau dann ein stetiges, nirgends verschwindendes Feld von Tangentialvektoren, wenn n ungerade ist.

Beweis. Annahme: Es existiert ein derartiges Vektorfeld $\bar(v)$. Sei nun $v(x) = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$, so dass nun $(v(x), x) = 0$ (Tangentialität) und $(v(x), v(x)) = 1$ (Normierung) gilt. Nun definiert man die Homotopie $F : S^n \times [0, \pi]$ durch $F(x, \phi) = x \cdot cos(x) + v(x) \cdot sin(x)$. Es gilt offensichtlich $F(x, 0) = x$ und $F(x, \pi) = -x$. Allerdings gilt $deg(-id) = (-1)^n + 1$, da sich die antipodale Abbildung als Komposition von $n + 1$ Reflexionen darstellen lässt. Daher ergibt sich für n gerade ein Widerspruch. Für gerade Werte n ist durch $v(x_1, ..., x_{2k} = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2k}, -x_{2k-1}$ eine mögliche Abbildung v gegeben, die die geforderten Bedingungen erfüllt. □