Gerahmte Kobordismen und der Satz von Hopf

Schriftliche Ausarbeitung zum Proseminar Differentialtopologie

Lucas Mann

6. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegeben sei eine kompakte randlose Mannigfaltigkeit M. In der folgenden Ausarbeitung werden wir uns mit glatten Funktionen $f\colon M \to S^p$ beschäftigen und deren Homotopieklassen untersuchen. Ein wichtiges Werkzeug dabei ist, Homotopie-Eigenschaften von f auf gewisse Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(y)$ für einen regulären Wert $y \in S^p$ zurückzuführen. Es wird sich herausstellen, dass die Homotopieklasse von f bis auf eine als „Kobordismus“ bezeichnete Äquivalenz der Untermannigfaltigkeiten von M eindeutig durch die Mannigfaltigkeit $f^{-1}(y)$ bestimmt ist.

Die hier vorgestellten Ergebnisse richten sich im Wesentlichen nach Kapitel 7 in [Mil65].

2 Grundlegende Definitionen. Gerahmter Kobordismus

In allen nachfolgenden Betrachtungen seien alle Mannigfaltigkeiten kompakt. Ferner sei M eine fixierte kompakte randlose Mannigfaltigkeit der Dimension m. Alle betrachteten Untermannigfaltigkeiten N von M seien randlos (und kompakt).

Wir geben zunächst ein paar grundlegende Definitionen:

Definition 2.1. Seien N und N' Untermannigfaltigkeiten von M mit gleicher Dimension. Ein *Kobordismus* zwischen N und N' ist eine Untermannigfaltigkeit X von $M \times [0,1]$ derart, dass

i) $X \supset (N \times [0,\varepsilon) \cup (N' \times (1-\varepsilon, 1])$ für ein $\varepsilon > 0$,

ii) $\partial X = (N \times \{0\}) \cup (N' \times \{1\})$,

iii) $X \cap (M \times \{0,1\}) = \partial X$.

Im Falle der Existenz eines Kobordismus zwischen N und N' heißen diese beiden Mannigfaltigkeiten *kobordant*.

Für unsere Betrachtungen wird es nötig sein, zu einer Untermannigfaltigkeit N von M zusätzlich einen „Rahmen“ festzulegen:

Definition 2.2. Sei N eine Untermannigfaltigkeit von M. Ein *Rahmen* für N ist eine glatte Funktion $\mathfrak{v}\colon N \to \left((T_xN)^\perp\right)^{\operatorname{codim} N}$, die jedem $x \in N$ eine Basis des Normalenraums $(T_xN)^\perp$ (als Unterraum von T_xM) zuordnet.

Ist $\mathfrak{v}$ ein Rahmen für N, so wird $(N, \mathfrak{v})$ als *gerahmte Untermannigfaltigkeit* von M bezeichnet.

Wir bezeichnen den i-ten Basisvektor von $\mathfrak{v}(x)$ mit $v_i(x)$.

Definition 2.3. Seien $(N, \mathfrak{v})$ und $(N', \mathfrak{v}')$ gerahmte Untermannigfaltigkeiten von M mit gleicher Dimension. Ein *gerahmter Kobordismus* zwischen $(N, \mathfrak{v})$ und $(N', \mathfrak{v}')$ ist eine gerahmte Untermannigfaltigkeit $(X, \mathfrak{w})$ von $M \times [0,1]$ derart, dass gilt:

i) X ein Kobordismus zwischen N und N',

ii) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle i gilt:

$$\begin{aligned} w_i(x,t) &= (v_i(x), 0) && \forall t \in [0,\varepsilon), \forall x \in N, \\ w_i(x,t) &= (v_i'(x), 0) && \forall t \in (1-\varepsilon, 1], \forall x \in N'. \end{aligned}$$

Gibt es einen gerahmten Kobordismus zwischen $(N, \mathfrak{v})$ und $(N', \mathfrak{v}')$, so heißen diese beiden Untermannigfaltigkeiten *gerahmt kobordant*. Schreibweise[1]: $(N, \mathfrak{v}) \sim (N', \mathfrak{v}')$.

Es ist leicht zu sehen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

[1] Dies ist keine gängige Schreibweise.

3 Die Pontryagin-Konstruktion

In diesem Abschnitt sei $p \leq m$ fixiert. Wir werden jeder glatten Funktion $f : M \to S^p$ die Kobordismenklasse einer gerahmte Untermannigfaltigkeit von M zuordnen. Dazu bedienen wir uns der

Pontryagin-Konstruktion. Sei $f\colon M \to S^p$ eine glatte Abbildung, sei $y \in S^p$ ein regulärer Wert von f und sei $v = (v_1, \ldots, v_p)$ eine positiv orientierte Basis von $T_y S^p$. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von M und es gilt $T_x f^{-1}(y) = \ker(df_x)$ für alle $x \in f^{-1}(y)$. Da y regulär ist, ist für jedes $x \in f^{-1}(y)$ die Funktion df_x eingeschränkt auf $(T_x f^{-1}(y))^\perp$ ein Isomorphismus, insbesondere können wir $w_i(x)$ als Urbild von v_i unter diesem Isomorphismus definieren. Der so konstruierte Rahmen $\mathfrak{w}$ wird als f^*v bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathfrak{w}$ glatt ist[2]. Die so definierte Mannigfaltigkeit

$$(f^{-1}(y), f^*v)$$

heißt *Pontryagin-Mannigfaltigkeit* von f (bzgl. y und v).

Der folgende Satz zeigt, dass die Pontryagin-Mannigfaltigkeit von f bis auf gerahmte Kobordismen unabhängig von y und v ist:

Satz 3.1. *Sei $f\colon M \to S^p$ glatt, seien $y, z \in S^p$ reguläre Werte von f und sei v bzw. w eine positiv orientierte Basis von $T_y S^p$ bzw. $T_z S^p$. Dann gilt:*

$$(f^{-1}(y), f^*v) \sim (f^{-1}(z), f^*w).$$

Zum Beweis dieses Satzes führen die folgenden drei Lemmas:

Lemma 3.2. *Sei $f\colon M \to S^p$ glatt und sei y ein regulärer Wert von f. Sind v und v' zwei positiv orientierte Basen von $T_y S^p$, so gilt:*

$$(f^{-1}(y), f^*v) \sim (f^{-1}(y), f^*v').$$

Beweis. Da v und v' die gleiche Orientierung haben, gibt es eine Matrix A_1 mit $\det A_1 > 0$ und $v'_i = Av_i$ für alle i. Bekanntlich ist der Raum $\mathrm{GL}^+(p, \mathbb{R})$ der Matrizen mit positiver Determinante wegzusammenhängend, es gibt also einen glatten Weg $A\colon [0,1] \to \mathrm{GL}^+(p, \mathbb{R})$ mit $A(t) = I$ für $0 \leq t < \varepsilon$ und $A(t) = A_1$ für $1 - \varepsilon < t \leq 1$ (dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig).

Wir konstruieren nun einen gerahmten Kobordismus $(X, \mathfrak{w})$ zwischen $(f^{-1}(y), f^*v)$ und $(f^{-1}(y), f^*v')$: Sei $X = f^{-1}(y) \times [0,1]$ und sei $\mathfrak{w}$ definiert durch die glatten Komponenten $w_i(x,t) = (f^*(A(t)v_i), 0)$ für alle i. $\square$

Da die gewählte Basis von $T_y S^p$ keine Auswirkung auf die gerahmte Kobordismenklasse der Pontryagin-Mannigfaltigkeit hat, werden wir die explizite Wahl von v im Folgenden häufig weglassen und die Pontryagin-Mannigfaltigkeit lediglich mit $f^{-1}(y)$ bezeichnen.

[2] In der Tat lässt sich jede Komponente w_i von $\mathfrak{w}$ als Verkettung von df, Matrixmultiplikation, Matrixinversion und Projektion auffassen.

Lemma 3.3. *Sei $f\colon M \to S^p$ glatt und sei $y \in S^p$ ein regulärer Wert von f. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $z \in S^p$ mit $||z - y|| < \varepsilon$ gilt: z ist ein regulärer Wert von f und $f^{-1}(z) \sim f^{-1}(y)$.*

Beweis. Die Menge der regulären Punkte von f in M ist offen. Folglich ist die Menge $C \subset M$ der kritischen Punkte abgeschlossen und damit kompakt. Da f stetig ist, ist $f(C)$ kompakt, insbesondere abgeschlossen. Daraus folgt, dass die Menge der regulären Werte von f offen ist. Insbesondere gibt es also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass alle $z \in S^p$ mit $||z - y|| < \varepsilon$ regulär sind.

Sei nun $z \neq y$ ein beliebiger derartiger Punkt. Sei $r_1\colon S^p \to S^p$ die Rotation der p-Sphäre entlang des Großkreises durch y und z, sodass $r_1(y) = z$. Sei $r\colon S^p \times [0,1] \to S^p$ eine glatte Isotopie zwischen id_{S^p} und r_1 derart, dass gilt: $r(\cdot, t) =: r_t$ ist eine Rotation entlang des Großkreises durch y und z, sodass $||r_t^{-1}(z) - y|| \leq ||z - y|| < \varepsilon$ (d. h. $r_t^{-1}(z)$ ist ein regulärer Wert von f), $r_t = \mathrm{id}_{S^p}$ für $0 \leq t < \delta$ und $r_t = r_1$ für $1 - \delta < t \leq 1$ (für ein $\delta > 0$).

Für alle t ist z ein regulärer Wert von $r_t \circ f$ (da $r_t^{-1}(z)$ ein regulärer Wert von f und r_t ein Diffeomorphismus ist). Insbesondere ist z ein regulärer Wert der Abbildung $F\colon M \times [0,1] \to S^p$, definiert durch

$$F(x,t) = (r_t \circ f)(x) \qquad \forall x \in M, t \in [0,1].$$

Es ist leicht zu sehen, dass $X := F^{-1}(z)$ ein Kobordismus zwischen $(r_0 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(z)$ und $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ ist.

Ein Rahmen $\mathfrak{w}$ für X ist durch $\mathfrak{w} = F^*v$ gegeben, wobei v eine positiv orientierte Basis von T_zS^p ist. Da z ein regulärer Wert von $r_t \circ f$ ist, ist $\mathfrak{w}(\cdot, t) = (r_t \circ f)^*v$, insbesondere erfüllt $(X, \mathfrak{w})$ die Anforderungen eines gerahmten Kobordismus. □

Lemma 3.4. *Seien $f, g\colon M \to S^p$ homotope glatte Abbildungen und sei y ein regulärer Wert für beide. Dann ist $f^{-1}(y) \sim g^{-1}(y)$.*

Beweis. Sei $F\colon M \times [0,1] \to S^p$ eine glatte Homotopie zwischen f und g derart, dass $F(\cdot, t) = f$ für alle $0 \leq t < \delta$ und $F(\cdot, t) = g$ für alle $1 - \delta < t \leq 1$ (für ein $\delta > 0$) gilt.

Nach Lemma 3.3 gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $z \in S^p$ mit $||z - y|| < \varepsilon$ gilt, dass z ein regulärer Wert von f und g ist und dass $f^{-1}(z) \sim f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(z) \sim g^{-1}(y)$. Da die kritischen Werte von F eine Nullmenge bilden, gibt es ein solches z, das regulär für F ist. Völlig analog zum Beweis des vorangehenden Lemmas ist $(F^{-1}(z), F^*v)$ (v sei eine positiv orientierte Basis von S^p_z) ein gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(z)$ und $g^{-1}(z)$. Es gilt also:

$$f^{-1}(y) \sim f^{-1}(z) \sim g^{-1}(z) \sim g^{-1}(y).$$

□

Satz 3.1 folgt unmittelbar aus Lemma 3.4:

Beweis von Satz 3.1. Wir verwenden die Bezeichnungen des Satzes. Sei $r\colon S^p \to S^p$ eine Rotation von S^p, die y auf z abbildet. Dann ist r glatt isotop zur Identität und folglich f glatt homotop zu $r \circ f$. Da r ein Diffeomorphismus und z ein regulärer Wert von f ist, ist $y = r^{-1}(z)$ ein regulärer Wert von $(r \circ f)$. Nach Lemma 3.4 gilt also

$$f^{-1}(y) \sim (r \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(z). \qquad \square$$

4 „Umkehrung" der Pontryagin-Konstruktion

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, zu einer gegebenen gerahmten Untermannigfaltigkeit $(N, \mathfrak{v})$ von M eine glatte Abbildung $f\colon M \to S^p$ zu konstruieren derart, dass $(N, \mathfrak{v})$ gerahmt kobordant zur Pontryargin-Mannigfaltigkeit von f ist. In der Tat ist dies immer möglich:

Satz 4.1. *Sei $(N, \mathfrak{w})$ eine gerahmte Untermannigfaltigkeit von M mit Kodimension p, sei $y \in S^p$ und sei v eine positiv orientierte Basis von T_yS^p. Dann gibt es eine glatte Funktion $f\colon M \to S^p$ derart, dass*

$$(N, \mathfrak{w}) = (f^{-1}(y), f^*v).$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgenden Satz über gerahmte Untermannigfaltigkeiten, den wir ohne Beweis zitieren:

Satz 4.2 (Satz über die Tubenumgebung)**.** *Sei $(N, \mathfrak{w})$ eine gerahmte Untermannigfaltigkeit von M mit Kodimension p. Dann gibt es eine Umgebung V von N in M und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon N \times \mathbb{R}^p \to V$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) $\varphi(x, 0) = x$ *für alle* $x \in N$,

ii) $d\varphi_{(x,0)}$ *bildet den i-ten Basisvektor von $\mathbb{R}^p$ auf $w_i(x)$ ab.*

Beweis. Ein Beweis findet sich auf Seite 46 in [Mil65]. $\square$

Der Satz über die Tubenumgebung erlaubt es uns also, uns in eine kleine Umgebung von N „auszudehnen". Mithilfe dieses Satzes ist Satz 4.1 nicht mehr schwer zu zeigen:

Beweis von Satz 4.1. Wir verwenden die Bezeichnungen des Satzes. Seien V und φ gemäß des Satzes über die Tubenumgebung. Sei ferner $\pi\colon V \to \mathbb{R}^p$ die „Projektion" jedes Punktes in V in den $\mathbb{R}^p$, also $\pi = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p} \circ \varphi^{-1}$. Wegen der Eigenschaft ii) von φ gilt $d\pi_x(w_i(x)) = e_i$ für jedes $x \in N$, insbesondere ist 0 ein regulärer Wert von π und $\pi^{-1}(0) = N$.

Wir konstruieren nun $f\colon M \to S^p$. Dazu setzen wir $f(x) = -y$ für alle $x \in M \setminus V$. Für die Einschränkung von f auf V nutzen wir die folgende Konstruktion: Sei $h\colon \mathbb{R}^p \to S^p$ eine glatte Abbildung derart, dass $h(u) = -y$ für $||u|| \geq 1$ und dass h die offene

Einheitskreisscheibe von $\mathbb{R}^p$ diffeomorph auf $S^p \setminus \{-y\}$ abbildet, wobei $h(0) = y$ und $dh_0(e_i) = v_i$ für alle i. Es sei nun

$$f(x) := \begin{cases} h(\pi(x)), & x \in V, \\ -y, & x \in M \setminus V. \end{cases}$$

f ist glatt (dies ist offensichtlich für Punkte x in V und x im Inneren von $M \setminus V$; außerdem ist f konstant außerhalb des Urbildes der Einheitskreisscheibe von $\mathbb{R}^p$ unter π, sodass es auch auf ∂V glatt ist). Da h in einer Umgebung von 0 ein Diffeomorphismus ist, ist $h(0)$ ein regulärer Wert von f und $f^{-1}(h(0)) = \pi^{-1}(0) = N$. Ferner gilt für jedes i und jeden Punkt $x \in N$

$$df_x(w_i(x)) = (dh_{\pi(x)} \cdot d\pi_x)(w_i(x)) = dh_0(e_i) = v_i,$$

sodass also $f^* v = \mathfrak{w}$. $\square$

5 Äquivalenz zwischen Homotopie und Kobordismen

Wir haben gesehen, dass wir zu jeder glatten Abbildung $f\colon M \to S^p$ (wiederum sei $p \leq m$ fixiert) eine gerahmte Untermannigfaltigkeit von M konstruieren können und dass wir umgekehrt zu dieser Untermannigfaltigkeit wieder eine Abbildung f finden können. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie die Homotopie von Abbildungen $f, g\colon M \to S^p$ mit gerahmten Kobordismen von gerahmten Untermannigfaltigkeiten von M zusammenhängt.

Tatsächlich gibt es eine sehr starke Beziehung:

Satz 5.1. *Seien $f, g\colon M \to S^p$ glatte Abbildungen. Die Pontryagin-Mannigfaltigkeiten von f und g sind genau dann gerahmt kobordant, wenn f und g glatt homotop sind.*

Anders ausgedrückt[3]: Ist y ein regulärer Wert von f und g und ist v eine positiv orientierte Basis von $T_y S^p$, so gilt:

$$(f^{-1}(y), f^* v) \sim (g^{-1}(y), g^* v) \iff f \sim g.$$

Die Rückrichtung dieses Satzes wurde bereits in Lemma 3.4 gezeigt. Für die Hinrichtung zeigen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 5.2. *Seien $f, g\colon M \to S^p$ glatte Abbildungen, sei $y \in S^p$ ein regulärer Wert für f und g und sei v eine positiv orientierte Basis von $T_y S^p$ derart, dass $(f^{-1}(y), f^* v) = (g^{-1}(y), g^* v)$. Dann sind f und g glatt homotop.*

[3] Da die kritischen Werte eine Nullmenge bilden, kann stets ein gemeinsamer regulärer Wert y gefunden werden.

Beweis. Sei zunächst angenommen, dass $f = g$ in einer Umgebung V von $N := f^{-1}(y)$ in M. Sei $\tau\colon S^p \setminus \{y\} \to \mathbb{R}^p$ die stereographische Projektion. Dann ist $\phi\colon M \times [0,1] \to S^p$, definiert durch

$$\phi(x,t) = \begin{cases} f(x), & x \in V, \\ \tau^{-1}(t\tau(f(x)) + (1-t)\tau(g(x))), & x \in M \setminus V, \end{cases}$$

eine glatte Homotopie zwischen f und g.

Wir führen den allgemeinen Fall auf diesen speziellen Fall zurück, indem wir eine glatte Abbildung $\tilde{f}\colon M \to S^p$ konstruieren, für die gilt:

1. $\tilde{f} \sim f$,
2. y ist ein regulärer Wert von $\tilde{f}$ und $(\tilde{f}^{-1}(y), \tilde{f}^* v) = (g^{-1}(y), g^* v)$,
3. $\tilde{f} = g$ in einer Umgebung V von N in M.

Seien $V \supset N$ und $\varphi\colon N \times \mathbb{R}^p \to V$ die Umgebung und der Diffeomorphismus, die der Satz über die Tubenumgebung angewendet auf $(f^{-1}(y), f^* v)$ liefert (man beachte, dass $\dim N = \dim(f^{-1}(y)) = \dim M - \dim S^p = m - p$, also $\operatorname{codim} N = p$). Um $\tilde{f}$ zu konstruieren, genügt es, lediglich die Einschränkung von f auf V in geeigneter Weise zu transformieren.

Es ist möglich, V so „klein“ zu wählen, dass $f(V)$ nicht den Punkt $-y$ enthält. Andernfalls gäbe es zu jeder ε-Umgebung U_ε von N einen Punkt $x_\varepsilon \in U_\varepsilon$ derart, dass $f(x_\varepsilon) = -y$. Da N kompakt ist, hat die Folge $(x_{(1/n)})$ eine konvergente Teilfolge $(x_{(1/n_k)})$. Deren Grenzwert $\bar{x}$ liegt in N, sodass wir also einerseits $f(\bar{x}) = y$, andererseits aber $f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{(1/n_k)}) = -y$ erhalten, im Widerspruch zur Stetigkeit von f. Sei also V so gewählt, dass $f(V)$ und $g(V)$ nicht den Punkt $-y$ enthalten.

Sei $\sigma\colon S^p \setminus \{-y\} \to \mathbb{R}^p$ die stereographische Projektion verkettet mit einer linearen Transformation derart, dass $d\sigma_y(v_i) = e_i$. Das Verhalten von f und g eingeschränkt auf V wird durch die Abbildungen $F, G\colon N \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, definiert durch

$$\begin{aligned} F(x,u) &:= \sigma \circ f \circ \varphi, & \forall (x,u) \in N \times \mathbb{R}^p, \\ G(x,u) &:= \sigma \circ g \circ \varphi, & \forall (x,u) \in N \times \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

widergespiegelt. Wir konstruieren eine Abbildung $\tilde{F}\colon N \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ derart, dass die daraus abgeleitete Abbildung $\tilde{f}\colon M \to S^p$ (die alle Punkte $x \in M \setminus V$ auf $f(x)$ und alle Punkte $x \in V$ auf $\sigma^{-1}(\tilde{F}(\varphi^{-1}(x)))$ abbildet) die geforderten Eigenschaften besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

i) $\tilde{F} \sim F$,

ii) 0 ist ein regulärer Wert von $\tilde{F}$ und es gilt $\tilde{F}^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ und $d\tilde{F}_{(x,0)} = dG_{(x,0)}$ für alle $x \in N$,

iii) $\tilde{F} = G$ in einer Umgebung $N \times B_\varepsilon$ von $N \times \{0\}$.

Zu einer Konstanten $c > 0$ sei $\lambda_c\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung derart, dass $\lambda_c(u) = 1$ für $||u|| \leq \frac{c}{2}$ und $\lambda_c(u) = 0$ für $||u|| \geq c$. Dann deformiert die Abbildung $\phi_c\colon (N \times \mathbb{R}^p) \times$

$[0,1] \to \mathbb{R}^p$, definiert durch

$$\phi_c((x,u),t) := (1-\lambda_c(u)t)\cdot F(x,u) + \lambda_c(u)t\cdot G(x,u) \quad \forall (x,u)\in N\times\mathbb{R}^p, t\in[0,1],$$

die Abbildung $F = \phi(\cdot,0)$ in eine Abbildung $\tilde{F}_c := \phi_c(\cdot,1)$. Offenbar erfüllt dieses $\tilde{F}_c$ die oben genannten Eigenschaften i) und iii) (zu letzterem wähle $\varepsilon = \frac{c}{2}$).

0 ist ein regulärer Wert von G, da y ein regulärer Wert von f ist. Da Bedingung iii) erfüllt ist, erfüllt $\tilde{F}_c$ automatisch alle Aussagen in ii) bis auf $\tilde{F}_c^{-1}(0) = G^{-1}(0)$. Um diesen letzten Teil zu erfüllen, finden wir eine geeignete Wahl für c: Nach Definition von F ist $dF_{(x,0)}\colon T_xN\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ die Projektion nach $\mathbb{R}^p$. Daher folgt aus dem Satz von Taylor (Entwicklung bis zum linearen Glied), dass es ein $c_f>0$ gibt derart, dass $||F(x,u)-u|| \le c_f\cdot||u||^2$ für $||u||\le 1$. Multiplikation mit $||u||$ liefert

$$\left|F(x,u)\cdot u - ||u||^2\right| = |(F(x,u)-u)\cdot u| \le ||F(x,u)-u||\cdot||u|| \le c_f\cdot||u||^3.$$

Sei nun $0<||u||<\min\{1,\frac{1}{c_f}\} =: c_1$. Dann ist $F(x,u)\cdot u>0$, denn andernfalls wäre

$$||u||^2 > c_f\cdot||u||^3 \ge \left|F(x,u)\cdot u - ||u||^2\right| = ||u||^2 - F(x,u)\cdot u \ge ||u||^2.$$

Man sieht ebenfalls, dass $F(x,u)\cdot u = 0$ genau dann, wenn $u=0$. Analog lässt sich eine Konstante c_2 für G finden derart, dass $G(x,u)\cdot u\ge 0$ und $G(x,u)\cdot u = 0 \iff u=0$ für $||u||<c_2$. Dann gilt für alle u mit $||u||\le\min\{c_1,c_2\} =: c_0$, dass $F(x,u)$ und $G(x,u)$ in der gleichen Halbebene von $\mathbb{R}^p$ liegen. Es gilt also $\tilde{F}_{c_0}(x,u)=0$ genau dann, wenn entweder $||u||\ge c_0$ und $F(x,u)=0$ oder wenn $||u||<c_0$ und $F(x,u)=G(x,u)=0$. Damit erfüllt dieses $\tilde{F}_{c_0}$ die Bedingung ii). □

Mithilfe des Lemmas lässt sich Satz 5.1 leicht beweisen:

Beweis von Satz 5.1. Wir verwenden die Bezeichnungen des Satzes. Die Hinrichtung wurde in Lemma 3.4 gezeigt. Zur Rückrichtung: Sei $(f^{-1}(y), f^*v) \sim (g^{-1}(y), g^*v)$ und sei $(X,\mathfrak{w})$ ein gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$. Dann ist $\dim X = 1+\dim(\partial X) = 1+p$, also hat X die Kodimension p in $M\times[0,1]$. Mit einem analogen Argument wie in Satz 4.1[4] gibt es demnach eine glatte Abbildung $F\colon M\times[0,1]\to S^p$ derart, dass

$$(X,\mathfrak{w}) = (F^{-1}(y), F^*v).$$

Sei $F_0 := F(\cdot,0)$. Nach Definition des Kobordismus ist $\frac{\partial F}{\partial t}=0$ an der Stelle $t=0$, und da y regulär für F ist, folgt, dass y auch regulär für F_0 ist. Dann ist

$$F_0^{-1}(y) = X\cap(M\times\{0\}) = f^{-1}(y),$$
$$F_0^*v = \mathfrak{w}(\cdot,0) = f^*v.$$

[4]Wir können Satz 4.1 hier nicht direkt anwenden, da $M\times[0,1]$ und X nicht randlos sind. Da $\mathfrak{w}$ eingeschränkt auf ∂X ein Rahmen für ∂X ist, können wir jedoch ein sehr analoges Argument wie in Satz 4.1 verwenden.

Aus Lemma 5.2 folgt also $f \sim F_0$. Analog ist $g \sim F(\cdot, 1) =: F_1$. Da F eine glatte Homotopie zwischen F_0 und F_1 ist, gilt außerdem $F_0 \sim F_1$, also insgesamt:

$$f \sim F_0 \sim F_1 \sim g. \qquad \square$$

6 Anwendung: Der Satz von Hopf

Die in den letzten drei Abschnitten aufgebaute Theorie bietet ein mächtiges Werkzeug, um Homotopieklassen von glatten Funktionen $f\colon M \to S^p$ zu untersuchen.

Als ein Beispiel beschränken wir uns auf den Fall, dass $p = m$ und dass M eine wegzusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann ist für jede glatte Abbildung $f\colon M \to S^p$ der Abbildungsgrad $\deg f$ definiert. Eine einfache, jedoch erstaunliche Folgerung der obigen Betrachtungen zeigt folgender Satz:

Satz 6.1 (Satz von Hopf)**.** *Sei M eine p-dimensionale wegzusammenhängende und orientierbare (und kompakte) Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Dann gilt für zwei glatte Abbildungen $f, g\colon M \to S^p$:*

$$f \sim g \iff \deg f = \deg g.$$

Für den Beweis ist es hilfreich zu erklären, was wir unter dem „Grad" einer endlichen gerahmten Untermannigfaltigkeit von M verstehen:

Definition 6.2. Zu einer endlichen gerahmten Untermannigfaltigkeit $(N, \mathfrak{w})$ von M sei der *Grad* gleich der Anzahl der positiv orientierten Punkte minus der Anzahl der negativ orientierten Punkte (bezüglich $\mathfrak{w}$).

Die Hinrichtung des Satzs von Hopf wurde bereits in einem früheren Vortrag gezeigt. Um die Rückrichtung zu beweisen, muss im Wesentlichen gezeigt werden, dass der Grad einer endlichen gerahmten Untermannigfaltigkeit die Kobordismenklasse dieser Untermannigfaltigkeit bestimmt.

Lemma 6.3. *Sei M wie im Satz von Hopf. Sei $(N, \mathfrak{v})$ eine endliche Untermannigfaltigkeit. Dann ist $(N, \mathfrak{v})$ gerahmt kobordant zu einer gerahmten Untermannigfaltigkeit, in der alle Punkte die gleiche Orientierung haben (bzgl. dem Rahmen).*

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in N$ zwei Punkte derart, dass $\mathfrak{v}(x_1)$ positiv und $\mathfrak{v}(x_2)$ negativ orientiert ist. Wir können annehmen, dass es in M einen Weg γ von x_1 nach x_2 gibt, der durch keinen weiteren Punkt von N geht (andernfalls wähle x_1 und x_2 entsprechend neu) und sich nicht selbst schneidet. Wir zeigen, dass $(N, \mathfrak{v})$ gerahmt kobordant zu $N \setminus \{x_1, x_2\}$ (mit gleichem Rahmen) ist.

Dazu konstruieren wir folgenden gerahmten Kobordismus $(X, \mathfrak{w})$: X enthält $\{x_1, x_2\} \times [0, \varepsilon]$ (für ein $\varepsilon > 0$). Verbinde die Endpunkte (x_1, ε) und (x_2, ε) dieser beiden Strecken mit γ. Überdecke dieses Konstrukt mit endlich vielen hinreichend kleinen offenen Kugeln (und einer Karte zu jeder) und transformiere es in jeder Karte derart, dass tatsächlich eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times [0,1]$ entsteht. Wähle außerdem in jeder Karte einen Rahmen. Es ist leicht zu sehen, dass in jeder Karte der Rahmen des Wegs beim „Eintreten“ und beim „Austreten“ mit zusätzlichem nach außen zeigenden Tangentialvektor verschiedene Orientierung haben. Dies setzt sich über die Karten fort, sodass x_1 und x_2 verschiedene Orientierungen haben müssen, was der Fall ist.

Füge außerdem die Mannigfaltigkeit $(N \setminus \{x_1, x_2\}) \times [0,1]$ (mit entsprechendem Rahmen) zu X hinzu. □

Beweis des Satzes von Hopf. Unter Nutzung dieses Lemmas kann man auf analogem Wege zeigen, dass zwei endliche gerahmte Untermannigfaltigkeiten von M, die den gleichen Grad haben, gerahmt kobordant sind. Da wir den Grad einer endlichen gerahmten Untermannigfaltigkeit von M gerade so definiert haben, dass er mit dem Abbildungsgrad einer zugehörigen Abbildung $f\colon M \to S^p$ übereinstimmt, folgt bereits der Satz von Hopf. □

Eine ebenfalls interessante Folgerung ist:

Korollar 6.4. *Sei M wie im Satz von Hopf, wobei $p > 0$. Dann gibt es zu jedem $d \in \mathbb{Z}$ eine glatte Abbildung $f\colon M \to S^p$ mit* $\deg f = d$. *Die so erhaltenen Abbildungen sind ein Repräsentantensystem der Homotopieklassen von Abbildungen $M \to S^p$.*

Beweis. Zu jedem $d \in \mathbb{Z}$ gibt es eine gerahmte Untermannigfaltigkeit $(N, \mathfrak{w})$ von M derart, dass N genau $|d|$ isolierte Punkte enthält, und dass $\mathfrak{w}(x)$ positiv oder negativ orientiert ist, je nachdem ob $d > 0$ oder $d < 0$ (für alle $x \in N$). Die nach Satz 4.1 daraus konstruierbare glatte Abbildung $f\colon M \to S^p$ erfüllt $\deg f = d$.

Dass es bis auf glatte Homotopie keine weiteren Abbildungen gibt, ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Hopf. □

Wir erhalten beispielsweise eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und den Homotopieklassen glatter Abbildungen von S^p auf sich selbst.

Literatur

[Mil65] Milnor, John W.: *Topology from the Differential Viewpoint.* Princeton, USA : Princeton University Press, 1965