Ausarbeitung zum Vortrag „Schnittzahlen mod. 2"

Definitionen zur Notation:

Def 1: Seien X, Y Mfgk Y Mfgk, $X \subset Y$ Untermfgk.

Dann ist $\operatorname{codim}(X,Y) := \dim(Y) - \dim(X)$

Def 2: Seien A, B Mfgk, g beliebige Abbildung $g: A \to B$

Dann ist $\partial g := g|_{\partial A}$

Definition Transversalität:

Sei Y Mfgk, $X, Z \subset Y$ Umfgk

$f: X \to Y$ heißt transversal zu Z ($f \pitchfork Z$)

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y) \quad \forall x \in f^{-1}(Z) \qquad y = f(x)$

Satz 1: Sei ~~X,~~ Y Mfgk, ~~X,~~ $Z \subset Y$ Umfgk

Ist $f: X \to Y$ transversal zu Z Dann ist $f^{-1}(Z)$ eine Umfgk von X

Weiterhin ist $\operatorname{codim}(f^{-1}(Z), X) = \operatorname{codim}(Z, Y)$

Beweis: $f^{-1}(Z)$ ist Umfgk $\Leftrightarrow \forall x \in f^{-1}(Z)\ \exists$ Umgebung $U \subset X$,

sodass $f^{-1}(Z) \cap U$ ist Umfgk. bzgl. welcher Obermenge?

Sei $x \in f^{-1}(Z)$ mit $y = f(x) \in Z$. Sei $k :=$ codim Y ~~[illegible]~~, $l = \operatorname{codim}(Z, Y)$

Dann existiert eine Umgebung V' von y in Y sodass wir

Z in V' mit $\varphi: V' \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{\dim Z} \to Y$ ~~[illegible]~~ $\forall x \in V'$ $x \in Z \Leftrightarrow \varphi(0,x) \in Z$

$V' \subset Y$ und nicht $\mathbb{R}^{\dim Y}$!

Sei $V := V'|_{\mathbb{R}^l}$ $\varphi|_{\mathbb{R}^l} =: g = (g_1, \dots, g_l): V \to Y|_{\mathbb{R}^l}$ $Z \cap V = g^{-1}(0)$

$V = V' \cap \mathbb{R}^l \times \{0\}$ aber siehe vorherige Bemerkung!

Ist $W := f^{-1}(V)$ (W Umgebung von x in X), dann ist $f^{-1}(Z) \cap W = (g \circ f)^{-1}(0)$

$(g \circ f)^{-1}(0)$ ist Umfgk wenn 0 regulärer Wert von $(g \circ f)$ ist,

da $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$

$d(g \circ f)_x: T_x X \to \mathbb{R}^l$ ist surjektiv $\Leftrightarrow dg_y: \operatorname{Im}(df_x) \to \mathbb{R}^l$ surjektiv

Aber $dg_y: T_y(Y) \to \mathbb{R}^l$ ist surjektiv linear mit $\ker(dg_y) = T_y Z$

Damit ist für einen Unterraum S von $T_y(Y)$ $dg_y: S \to \mathbb{R}^l$ surjektiv

$\Leftrightarrow S + T_y Z = T_y Y$

$\Rightarrow (g \circ f)$ ist submersion im Punkt $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow Im(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y) \Leftrightarrow f \pitchfork Z$

$\Rightarrow f^{-1}(Z)$ ist Umfgk von X ✓

Betrachte nun die inclusion $i: X \hookrightarrow Y$, Z Umfgk von Y

Dann ist $x \in i^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in (X \cap Z)$

und $di_x: T_x(X) \to T_x(Y)$ ist inclusion von $T_x(X)$ nach $T_y(Y)$

$\Rightarrow i \pitchfork Z \Leftrightarrow \forall x \in (X \cap Z) \; T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y) \Leftrightarrow X \pitchfork Z$

Falls dies eine Aussage ist: Wo wurde $X \pitchfork Z$ definiert. Sonst: dies ist eine Defn!

Damit folgt:

Satz 2: ~~Sei~~ Sei Y Mfgk $X, Z \subset Y$ Umfgk $X \pitchfork Z \Rightarrow (X \cap Z)$ ist Umfgk von Y

Weiterhin ist $codim(X \cap Z, Y) = codim(X, Y) + codim(Z, Y)$

Beweis: aus Satz 1 folgt: ~~codim(X∩Z)~~ $codim(X \cap Z, \cancel{X}) = codim(\cancel{X} Z, Y)$

$\Rightarrow \dim X - \dim(X \cap Z) = \dim(Y) - \dim(Z) \quad | + \dim(Y), - \dim(X)$

$\Rightarrow \dim Y - \dim(X \cap Z) = 2\dim(Y) - (\dim(Z) + \dim(X))$

$\Rightarrow codim(X \cap Z, Y) = codim(X, Y) + codim(Z, Y)$

Transversalitätssatz: Sei X glatte Mfgk mit Rand, Z, S, Y glatte Mfgk ohne Rand, $X, Z \subset Y$

Sei $F: X \times S \to Y$ glatt; $s \in S$ $\; f_s: X \to Y \quad f_s(x) := F(x,s)$

Sind $F \pitchfork Z$ und $\partial F \pitchfork Z \Rightarrow$ für fast alle $s \in S$ $\; f_s \pitchfork Z$ und $\partial f_s \pitchfork Z$

Beweis: $W = F^{-1}(Z)$ ist Umfgk von $X \times S$ mit $\partial W = W \cap \partial(X \times S) = W \cap (\partial X \times S)$

Sei $\pi: X \times S \to S$ glatte (Projektion) $\pi(x,s) = s$

ZZ: Ist $s \in S$ regulärer Wert von $\pi|_W: W \to S \Rightarrow f_s \pitchfork Z$

und ist $s \in S$ regulärer Wert von $\partial \pi|_{\partial W}: \partial W \to S \Rightarrow \partial f_s \pitchfork Z$

Sei $f_s(x) = z \in Z$ $\quad$ Da $F(x,s) = z$ und $F \pitchfork Z$

$\Rightarrow dF_{(x,s)} T_{(x,s)}(X \times S) + T_z(Z) = T_z(Y)$

das heißt $\forall a \in T_z(Y) \; \exists b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ sodass $dF_{(x,s)}(b) - a \in T_z(Z)$

ZZ: $\exists v \in T_x(X)$ sodass $df_s(v) - a \in T_z(Z)$

Da $T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_x(S)$ ist $b = (w, e)$ wobei $w \in T_x(X)$ $e \in T_x(S)$

Ist $e = 0 \Rightarrow dF_{(x,s)}(w,e) = dF_{(x,s)}(w,0) = df_s(w)$ ✓

Ist $e \neq 0$ ~~X~~ $d\pi|_W(x,s): T_x(W) \to T_x(S)$ surjektiv $\Rightarrow \exists \; (u,e) \in T_{(x,s)}(W)$.

Sei ~~mit~~ $dF_{(x,s)}(u,e) \in T_x(Z)$

Dann ist

Sei $v = \underbrace{(w,e) - (u,e)} \in T_x(X)$ $\quad v := w - u$

$\Rightarrow df_s(v) - a = dF_{(x,s)}[(w,e)-(u,e)] - a = [\underbrace{dF_{(x,s)}(w,e) - a}_{\in T_z(Z)}] - \underbrace{dF_s(u,e)}_{\in T_z(Z)}$

$\Rightarrow df_s(v) - a \in T_z(Z)$ ✓

Def: Normalraum \ Normalenbündel

$Y \subset \mathbb{R}^n$ Mfgkt $\forall y \in Y$ heißt $N_y(Y)$ Normalraum von Y in y, wobei $N_y(Y)$ orthogonales Komplement von $T_y(Y)$ in $\mathbb{R}^n$ ist.

Das Normalenbündel $N(Y) := \{(y,v) \in Y \times \mathbb{R}^n : v \in N_y(Y)\}$

Definiere die Projektion $\sigma: N(Y) \to Y$ $\sigma(y,v) := y$

Proposition: Ist $Y \subset \mathbb{R}^n$ Dann ist $N(Y)$ Mfgk der dimension M und die Projektion $\sigma: N(Y) \to Y$ ist eine submersion

~ Becht aus wie ein M

Beweis: Sei $s \in Y$ offene Menge $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ und submersion $\phi: \hat{U} \to \mathbb{R}^k$ ($k = \operatorname{codim} Y$) sodass $U := Y \cap \hat{U} = \phi^{-1}(0)$. $N(U) := N(Y) \cap (U \times \mathbb{R}^M)$

$\Rightarrow N(U) \subset N(Y)$ offen. $\forall y \in U$ $d\phi_y: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^k$ ist surjektiv mit $\ker(d\phi_y) = T_y(Y)$

$\Rightarrow d\phi_y^T: \mathbb{R}^k \to N_y(Y)$ (= orthogonales Komplement von $T_y(Y)$) ist isomorph

$\Rightarrow$ Die Abbildung $\varphi: U \times \mathbb{R}^k \to N(U)$ $\varphi(y,v) := (y, d\phi_y^T v)$ ist bijektiv und eine Einbettung von $U \times \mathbb{R}^k$ in $U \times \mathbb{R}^n$. Damit ist $N(U)$ eine Mfgk parametrisiert von φ mit $\dim N(U) = \dim(U) + k = \dim(Y) + \operatorname{codim}(Y) = M$

Da jeder Punkt von $N(Y)$ so eine Umgebung hat, ist $N(Y)$ eine Mfgk

Da $\sigma \circ \varphi: U \times \mathbb{R}^k \to U$ $\sigma \circ \varphi(y,v) = y$ submersion ist σ submersion ✓

ε-Umgebungs-Satz: $Y \subset \mathbb{R}^n$ Y kompakt, randlos $\varepsilon > 0$

Sei Y^ε offene Menge $Y^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $Y^\varepsilon := \{w \in \mathbb{R}^n : \exists y \in Y \text{ mit } |w-y| < \varepsilon\}$

Mit ε klein genug $\Rightarrow \forall w \in Y^\varepsilon\ \exists!\ w' \in Y$ sodass $|w - w'| < |w - z|\ \forall z \in Y \setminus \{w'\}$ (*)

$\pi: Y^\varepsilon \to Y$ $\pi(w) = w'$ $\Rightarrow \pi$ ist eine submersion

---

Beweis: Sei $h: N(Y) \to \mathbb{R}^n$ $h(y,v) := y + v$

$dh_{(y,0)}(T_{(y,0)}(Y \times \{0\})) = T_y(Y)$ $\quad dh_{(y,0)}(T_{(y,0)}(\{y\} \times N_y(Y))) = N_y(Y)$

$\Rightarrow h$ ist regulär $\forall (y,0) \in Y \times \{0\} \subset N(Y)$

Da $h: Y \times \{0\} \to Y$ diffeomorph und in jedem $(y,0)$ regulär ist, bildet h eine Umgebung von $Y \times \{0\}$ diffeomorph auf eine Umgebung von Y in $\mathbb{R}^n$ ab.

wieso ist Minimalität (*) erfüllt?

Da Y kompakt enthält jede Umgebung von Y einige Y^ε

$\Rightarrow h^{-1}: Y^\varepsilon \to N(Y)$ ist definiert und $\pi = \sigma \circ h^{-1}: Y^\varepsilon \to Y$ ist eine submersion ✓

---

wo wird das benötigt?

Korollar: Sei $f: X \to Y$ glatt, Y randlos $X \subset Y$. Dann gibt es einen offenen Ball S und $F: X \times S \to Y$ glatt sodass $F(x,0) = f(x)$ und für fixierte $x \in X$ ist $\tilde{s}: S \to Y$ $s \mapsto F(x,s)$ eine submersion.

Insbesondere sind sowohl F als auch ∂F submersionen

$Y \subset \mathbb{R}^n$

Beweis: Sei S Einheitsball in $\mathbb{R}^n$, definiere $F(x,s) = \pi[f(x) + \varepsilon s]$

Da $\pi: Y^\varepsilon \to Y$ auf die identität auf Y einschränkt, ist $F(x,0) = f(x)$

Für fixierte $x \in X$ ist $\tilde{\tilde{s}}(s) := f(x) + \varepsilon s$ $\quad (\tilde{\tilde{s}} \neq \tilde{s})$

eine submersion von S nach Y^ε. Da die Komposition von 2 submersionen eine submersion ergibt, ist $\tilde{s}(s) = F(x,s)$ eine submersion für fixierte $x \in X$.

$\Rightarrow F|_{\{x\} \times S}$ und $\partial F|_{\{x\} \times S}$ sind submersionen

$\Rightarrow F$ und ∂F sind submersionen ✓

Transversalitäts Homotopy Satz: Seien X, Y, Z Mfgk.

Sei $f: X \to Y$ glatt und $X, Z \subset Y$ $\quad \partial Z = \partial Y = \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, g: X \to Y$ glatt, homotop zu f und $g \pitchfork Z$ $\quad \partial g \pitchfork Z$

Beweis: Nehme F aus dem Korollar

Der Transversalitäts Satz impliziert, dass $f_s \pitchfork Z$ und $\partial f_s \pitchfork Z$ für fast alle $s \in S$. Da jedes f_s homotop zu f folgt der Satz.

Die Homotopy ist $F': X \times I \to Y$ $\quad F'(x,t) \mapsto F(x, ts)$ $\quad (I := [0,1])$ ✓

Extension Satz: Sei Y Mfgk, $X, Z \subset Y$ Umfgk, Z geschlossen, $C \subset X$ abgeschlossene Teilmenge

Sei $f: X \to Y$ glatt

was bedeutet das; Def. für Transv. in x!

Wenn $\forall x \in C \cap f^{-1}(Z): f \pitchfork Z$ und $\forall x \in C \cap \partial X \cap f^{-1}(Z): \partial f \pitchfork Z$

Dann ist f homotop zu $g: X \to Y$ glatt sodass $g \pitchfork Z$, $\partial g \pitchfork Z$

und für eine Umgebung U von C ist $g|_U = f|_U$

Beweis:

ZZ: $f \pitchfork Z$ auf Umgebung von C

Ist $x \in C$ und $x \notin f^{-1}(Z)$ dann ist $X \setminus f^{-1}(Z)$ eine offene Umgebung von x, da Z abgeschlossen ist. und $f|_{X \setminus f^{-1}(Z)} \pitchfork Z$

Ist $x \in f^{-1}(Z)$, dann existiert eine Umgebung W von $f(x)$ in Y und eine submersion $\phi : W \to \mathbb{R}^k$, sodass $f \pitchfork Z$ an einem Punkt $x' \in f^{-1}(Z \cap W)$ g.d.w. $\phi \circ f$ regulär in x'. ($k = \operatorname{codim} Y$)

$\phi \circ f$ ist aber regulär in x, also in einer Umgebung von x.

Damit existiert eine Umgebung V von C in X mit $f|_V \pitchfork Z$.

Sei $\phi : X \to [0,1]$ glatt, sodass $\phi|_{X \setminus V} \equiv 1$ und $\phi|_U \equiv 0$ für eine kleinere Umgebung $U \subset V$ von C.

Sei $r := \phi^2$. Da $dr_x = 2\phi(x)\, d\phi_x$ ist $dr_x = 0 \Leftarrow r(x) = 0$

Sei $S := B(0,1) \subset \mathbb{R}^M$. Definiere $F : X \times S \to Y$ durch

$F(x,s) := \pi(\underbrace{f(x) + \epsilon s}_{\in Y^\epsilon})$ wobei $\epsilon > 0$ klein genug und $\pi : Y^\epsilon \to Y$ wie im ϵ-Umgebungs Satz.

Definiere $G : X \times S \to Y$ durch $G(x,s) = F(x, r(x)s)$

Fall 1: Ist $(x,s) \in G^{-1}(Z)$ und $r(x) \neq 0$, dann ist $\tilde{s} : S \to Y$ $\tilde{s}(t) = G(x,t)$ (x fixiert) eine submersion, da es eine Komposition des Diffeomorphismus $t \mapsto r(x)t$ mit der (für fixiertes x) submersion $t \mapsto F(x,t)$ ist.

$\Rightarrow G$ ist regulär in $(x,s) \Rightarrow G \pitchfork Z$ in (x,s)

Fall 2: Ist $r(x) = 0$ definiere $m : X \times S \to X \times S$ $m(x,s) = (x, r(x)s)$ also $G = F \circ m$

sei $(v,w) \in T_x(X) \times T_s(S) \Rightarrow dm_{(x,s)}(v,w) = (v, r(x) \cdot w + dr_x(v) \cdot s)$

$\Rightarrow dG_{(x,s)}(v,w) = dF_{(x,0)}(v,0)$ (für $r(x) = 0$ ($\Rightarrow dr_x = 0$))

Da $F|_{X \times \{0\}} = f \Rightarrow dG_{(x,s)}(v,w) = df_x(v)$

Da $r(x) = 0 \Rightarrow x \in U$ und $f \pitchfork Z$ in $x \Rightarrow G \pitchfork Z$ in (x,s)

Wähle nun nach Transversalitäts Theorem ein fixiertes s, sodass $g(x) := G(x,s)$ und $g \pitchfork Z$, $\partial g \pitchfork Z$ und g homotop zu f.

Ist $x \in U \supset C$ mit $r(x) = 0 \Rightarrow g(x) = G(x,s) = F(x,0) = f(x)$ ✓

Da ∂X ab geschlossen in X ist folgt

Korollar: Sei Y Mfgk $X, Z \subset Y$ Umfgk

Ist für $f: X \to Y$ $\partial f: \partial X \to Y$ $\partial f \pitchfork Z$

Dann $\exists g: X \to Y$ g homotop zu f sodass $\partial g = \partial f$ und $g \pitchfork Z$

Definition: Sei Y Mfgk $X, Z \subset Y$ Umfgkt X kompakt, Z ab geschlossen mit $\dim X + \dim Z = \dim Y$ und $\partial X = \partial Z = \partial Y = \emptyset$

Definiere: $I_2(X, Z) := \# g^{-1}(z) \bmod 2$

wobei $g: X \to Y$ glatt, homotop zur inclusion $i_X: X \to Y$ mit $g \pitchfork Z$

Sei $f: X \to Y$ glatt

Definiere: $I_2(f, Z) := \# g^{-1}(Z) \bmod 2$

wobei $g: X, Y$ glatt, homotop zu f und $g \pitchfork Z$

Satz: Die Definition ist wohldefiniert

A

Beweis: zz: Sind $f_0, f_1: X \to Y$ homotop und transversal zu Z

$\Rightarrow I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$

Sei $I := [0,1]$, $F: X \times I \to Y$ eine Homotopy von f_0, f_1

Da $\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ und $\partial F|_{X \times \{0\}} = f_0$; $\partial F|_{X \times \{1\}} = f_1$

folgt $\partial F \pitchfork Z$ und wegen Korollar o.B.d.A $F \pitchfork Z$

Da $\operatorname{codim}(F^{-1}(Z), X \times I) = \operatorname{codim}(Z, Y) = \dim(X)$

$\Rightarrow \dim(X \times I) - \dim(F^{-1}(Z)) = \dim(X) \Rightarrow \dim(F^{-1}(Z)) = 1$

$\Rightarrow F^{-1}(Z)$ ist eine 1-dim. Umfgk von $X \times I$ mit Rand:

$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times I) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\}$

wegen Klassifikation der 1-Mfgk folgt $\# f_0^{-1}(Z) = \# f_1^{-1}(Z) \bmod 2$. ✓

Zusatz:

Rand Satz:

sei Y Mfgk, $W, Z \subset Y$ Umfgk   sei $X := \partial W$ $\dim X + \dim Z = \dim Y$

Sei $g : X \to Y$ glatt. Wenn g auf ganz W ausgedehnt werden kann.

dann ist $I_2(g, Z) = 0$

Beweis: Sei $G : W \to Y$ $\partial G = g$

Mit dem Transversalitäts Homotopy Satz erhalten wir

$F : W \to Y$ F homotop zu G $F \pitchfork Z$ und $f := \partial F$.

f ist homotop zu g $\Rightarrow$ $I_2(g, Z) = \# f^{-1}(Z) \mod 2$.

Da $F^{-1}(Z)$ eine kompakte 1-dim. Mfgk mit Rand ist, ist

$\# \partial F^{-1}(Z) \mod 2 = \# f^{-1}(Z) \mod 2 = 0$ ✓