

Mannigfaltigkeiten mit Rand

Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Philipp Trunschke

Zusammenfassung

Mannigfaltigkeiten mit Rand sind (anders als der Name zunächst vermuten lässt) eine Verallgemeinerung der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Berandete Mannigfaltigkeiten müssen nämlich nicht lokal diffeomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n sein, sondern nur zu diffeomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Der Brouwer'sche Fixpunktsatz (nach dem niederländischen Mathematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer) besagt, dass jede stetige Abbildung der Einheitskugel D^n in sich selbst mindestens einen Fixpunkt besitzen muss. Neben der faszinierenden Anschauung, dass sich zB nach dem Umrühren eines Getränks mindestens ein Punkt am selben Ort befindet, wie vorher, besitzt er auch enorme praktische Relevanz. Mit seiner Hilfe kann man Existenzaussagen über Lösungen reeller, nichtlinearer Gleichungssysteme machen und zB den Satz über die Existenz von Nash-Gleichgewichten in der Spieltheorie beweisen.

Symbole und Konventionen

Im Folgenden soll, wenn von offenen Mengen gesprochen wird, immer die von der euklidischen Metrik induzierte Topologie bzw. die entsprechende Teilraumtopologie angenommen werden.

Es bezeichne M immer eine m -dimensionale und N eine n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit.

X sei immer eine Teilmenge des \mathbb{R}^k und für $x \in X$ seien U_x immer offene Umgebungen von x (die gegebenenfalls passend gewählt werden müssen).

$$\begin{aligned} X^c &:= \mathbb{R}^k \setminus X \\ \partial_{top} X &:= \{r \in \mathbb{R}^k \mid \forall U_r : U_r \cap X \neq \emptyset \wedge U_r \cap X^c \neq \emptyset\} \\ \mathbb{H}^n &:= \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \partial \mathbb{H}^n &:= \partial_{top} \mathbb{H}^n \end{aligned}$$

1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 1.1. M heißt berandet, wenn für alle $x \in M$ eine Umgebung U_x existiert, sodass $U_x \simeq V \subset \mathbb{H}^n$.
offen

∂M heißt Rand von M und besteht aus allen Punkten $x \in M$, die durch die Kartenabbildungen ϕ auf Punkte $\phi(x) \in \partial \mathbb{H}$ abgebildet werden.

Der Tangentialraum $T_x M$ lässt sich, genau wie für unberandete Mannigfaltigkeiten, definieren. ($T_x M$ ist dann für alle $x \in M$ ein m -dimensionaler Vektorraum.)

Offensichtlich ist ∂M eine $(m-1)$ -dimensionale und $M \setminus \partial M$ eine m -dimensionale (unberandete) Mannigfaltigkeit.

Lemma 1.1. Sei M unberandet und $f \in C^k(M, \mathbb{R})$ habe 0 als regulären Wert. Dann ist $G := f^{-1}(\mathbb{H})$ eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial G = f^{-1}(0)$.

Beweis. Sei zunächst $y > 0$. $f \in C^k$ ist insbesondere stetig.

Damit existiert eine offene Umgebung $U_y \subset \mathbb{R}_{>0}$, sodass $f^{-1}(U_y) \subset M \subset \mathbb{R}^m$. Und G besitzt lokal um y die Struktur einer m -dim. Mfgk.

Sei nun $y = 0$ und $x \in f^{-1}(y)$. Da y regulär ist, muss $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv sein. Damit muss $\mathcal{R} := \ker d_x f$ ein $(m-1)$ -dimensionaler Vektorraum sein.

Sei nun M eingebettet im \mathbb{R}^l . Dann wähle eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$, die auf $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^l$ regulär ist und definiere $F : M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ durch $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$.

Das Differential von F ist dann $d_x F(v) = (d_x f(v), L(v))$. Also ist $d_x F$ regulär und folglich bildet F eine Umgebung U_x von x diffeomorph auf eine Umgebung V von $(y, L(x))$ ab.

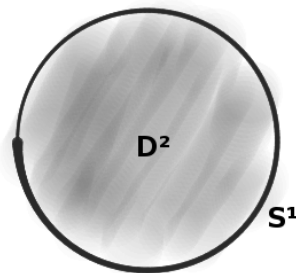
Da $f^{-1}(y)$ durch F auf die Hyperebene $y \times \mathbb{R}^{m-1}$ abgebildet wird, wird $f^{-1}(y) \cap U_x$ diffeomorph auf $y \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V$ abgebildet. Dies ist aber eine offene Umgebung in \mathbb{R}^{m-1} und damit ist $f^{-1}(y)$ eine Mfgk der Dimension $(m-1)$. Genauso wird aber $f^{-1}([0, \epsilon])$ auf $[0, \epsilon] \times \mathbb{R}^{m-1}$ abgebildet. Damit ist f^{-1} der Rand einer m -dim. berandeten Mfgk. \square

Beispiel 1. Betrachte

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$f : x \mapsto 1 - \|x\|^2$$

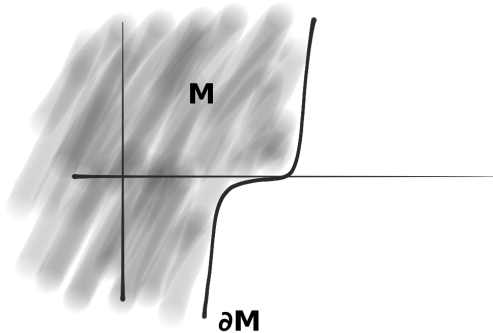
Dann ist $D^n := f^{-1}(\mathbb{H})$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $S^{n-1} := f^{-1}(0)$ ihr Rand.



Lemma 1.2. Sei nun $f : C^k(M, N)$ mit $m > n$ und y ein regulärer Wert von sowohl f , als auch $f|_{\partial M}$.
 Dann ist $f^{-1}(y) \subset M$ eine $(m-n)$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand $f^{-1}(y) \cap \partial M$.

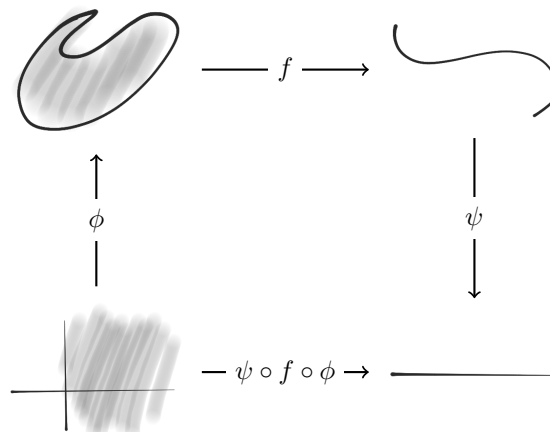
Bemerkung. Dass y ein regulärer Wert von f ist, impliziert nicht, dass es auch einer für $f|_{\partial M}$ ist.

Um dies einzusehen, betrachte folgende Situation:



sowie $N := \mathbb{R}$.

Beweis. Da wir eine lokale Eigenschaft beweisen wollen, genügt es den Spezialfall $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu betrachten.



Sei $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Falls \bar{x} ein innerer Punkt ist, dann ist (wie zuvor) $f^{-1}(y)$ eine C^k -Mfgk in der Umgebung von \bar{x} . Sei \bar{x} also ein Randpunkt.

Wähle nun eine glatte Abbildung $g : U_{\bar{x}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf ganz $U_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^m$ definiert ist und auf $U_{\bar{x}} \cap \mathbb{H}^m$ mit f übereinstimmt. Indem wir $U_{\bar{x}}$ ^{offen} gegebenenfalls durch eine kleinere Umgebung U ersetzen, können wir annehmen, dass g keine kritischen Punkte in U besitzt. Damit ist $g^{-1}(y)$ eine C^k -Mfgk der Dimension $(m-n)$.

Nun werden wir das letzte Lemma verwenden, um zu zeigen, dass $g^{-1}(y) \cap \mathbb{H} =$

$f^{-1}(y)$ eine berandete Mfgk ist.

Bezeichne im folgenden mit $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die letzte Koordinate: $\pi : x \mapsto x_m$.

π hat 0 als regulären Wert. Denn für $x \in \pi^{-1}(0)$ gilt, dass $T_x(g^{-1}(y)) = \ker d_x g$. Da aber $f|_{\partial \mathbb{H}^m}$ regulär in x ist (und $d_x g = d_x f$, da $x \in \mathbb{H}^m = \text{dom } f$), kann dieser Kern nicht komplett in $\mathbb{R}^{m-1} \times 0$ enthalten sein.

Damit können wir aus dem letzten Lemma folgern, dass $g^{-1}(y) \cap \mathbb{H}^m = f^{-1}(y) \cap U$ eine Mfgk mit Rand $\pi^{-1}(0)$ ist. \square

2 Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Nun werden wir diese Ergebnisse anwenden, um den zentralen Satz zu beweisen, der zum Brouwer'schen Fixpunktsatz führt.

Theorem 2.1 (Retraktsatz). *Sei M eine kompakte, berandete Mfgk. Dann existiert keine glatte Retraktion auf ∂M .*

Beweis. Durch Widerspruch.

Angenommen es gäbe eine glatte Retraktion f und $y \in \partial M$ sei ein regulärer Wert dieser. (Existenz nach Satz von Sard) Da $f|_{\partial M}$ die Identität ist, ist y auch ein regulärer Wert der Einschränkung von f . Damit ist nach Lemma 2.2. $f^{-1}(y)$ eine glatte, 1-dimensionale Mfgk., die nur $f^{-1}(y) \cap \partial M = \{y\}$ als Rand hat. Da M kompakt ist, muss auch $f^{-1}(y)$ kompakt sein. Die einzigen kompakten 1-Mfgk sind jedoch disjunkte Vereinigungen von Strecken und Schleifen. Das bedeutet aber, dass $\partial f^{-1}(y)$ aus einer geraden Anzahl an Punkten bestehen muss. Widerspruch! \square

Insbesondere kann es also keine glatte Retraktion $D^m \rightarrow S^{m-1}$ geben.

Diese Tatsache lässt sich alternativ beweisen, indem man den Homologiefunktor nutzt. Dieser Beweis sei hier, seiner Schönheit wegen, kurz skizziert.

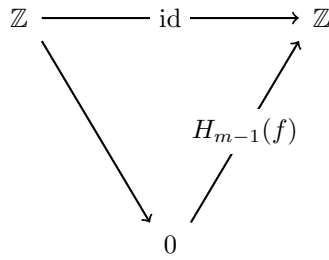
Beweis. Durch Widerspruch.

Angenommen f sei eine Retraktion von D^m auf S^{m-1} . Dann kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^{m-1} & \xrightarrow{\text{id}} & S^{m-1} \\
 \downarrow \iota & & \uparrow f \\
 & & D^m
 \end{array}$$

in **Top**.

Nun können wir hierauf den $(m-1)$. Homologiefunktor $H_{m-1} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Abl}$ anwenden und erhalten das Diagramm



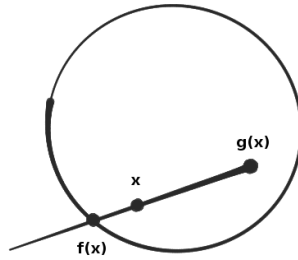
Dieses Diagramm existiert aber nicht.
 Damit kann schon das erste Diagramm nicht existieren. □

Diese Tatsache nutzen wir nun für den Beweis des folgenden

Lemma 2.2.

Jede Abbildung $g \in C^\infty(D^n, D^n)$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Angenommen g hätte keinen Fixpunkt. Dann definiere man $f(x) \in S^{n-1}$ als den Schnittpunkt der Geraden durch x und $g(x)$, der näher an x liegt.



Da g keinen Fixpunkt besitzt, ist diese Abbildung wohldefiniert, glatt und besitzt die Eigenschaft, dass $f(x) = x$ für $x \in S^{n-1}$. Damit ist f eine glatte Retraktion. Widerspruch!

Um einzusehen, dass f wirklich glatt ist, betrachte man folgende explizite Beschreibung von f :

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= x + tu \\
 u &:= \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|} \\
 t &:= -x \cdot u + \sqrt{1 - x^2 + (x \cdot u)^2}
 \end{aligned}$$

(An dieser Stelle wäre zu zeigen, dass f die geforderten Eigenschaften einer glatten Retraktion erfüllt. Dies habe ich mit Absicht nicht gemacht, da es unübersichtlich ist und folglich verständlicher, wenn man diese einfachen Rechnungen selbst durchführt.) □

Theorem 2.3 (Brouwer'scher Fixpunktsatz).

Jede Abbildung $G \in C(D^n, D^n)$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Wir werden diesen Satz auf das vorherige Lemma zurückführen, indem wir G durch eine glatte Funktion approximieren. Wähle ein $\epsilon > 0$. Nach dem Approximationssatz von Stone und Weierstass existiert ein Polynom $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|P_1(x) - G(x)\| < \epsilon$ für $x \in D^n$.

Durch die gegebene Ungenauigkeit von ϵ kann es jedoch passieren, dass P_1 Punkte aus D^n auf Punkte abbildet, die nicht mehr in D^n liegen.



Abbildung 1: Nota Bene: $\|P_1(x)\| < (1 + \epsilon)$

Um das zu verhindern definieren wir $P(x) := P_1(x)/(1 + \epsilon)$. Nun bildet P D^n nach D^n ab und es gilt $\|P(x) - G(x)\| < 2\epsilon$ für alle $x \in D^n$. Angenommen $G(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Dann muss die stetige Funktion $\|G(x) - x\|$ ein Minimum $\mu > 0$ im Kompaktum D^n annehmen. Wählen wir nun $\epsilon \leq \mu/2$, dann gilt $\|P(x) - G(x)\| < \mu \leq \|G(x) - x\|$ und damit $P(x) \neq x$. Damit wäre P eine fixpunktfreie, glatte Abbildung von D^n in sich selbst. Dies ist ein Widerspruch zum letzten Lemma. \square