Undine Falkenhagen

Der Abbildungsgrad modulo 2

Betrachten glatte Funktion

$f: M \to N$ mit M kompakte Mfgk. ohne Rand
N zusammenhängend
$\dim(M) = \dim(N)$

Sei y regulärer Wert, dann bezeichnet $\# f^{-1}(y)$ die Anzahl der x mit $f(x) = y$.

Um über $\# f^{-1}(y)$ reden zu können, müssen wir zeigen, dass die Zahl tatsächlich endlich ist.

__Satz:__ $\# f^{-1}(y) < \infty$

__Beweis:__ $\{y\}$ abgeschlossen

$\xRightarrow{f \text{ stetig}}$ $f^{-1}(y)$ abgeschlossen (wenn f stetig, ist das Urbild einer abgeschl. Menge wieder abgeschl.)

$\xRightarrow{M \text{ kompakt}}$ $f^{-1}(y)$ kompakte Umfgk. der Dimension 0 (abgeschl. Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt) (da $\dim(M) = \dim(N)$: $\dim(f^{-1}(y)) = M - N$)

$\Longrightarrow \forall x \in f^{-1}(y): \exists$ offene Umgebung $U_x: \forall x' \in f^{-1}(y): x' \notin U_x$ (für $x' \neq x$)

$\xRightarrow{f^{-1}(y) \text{ kompakt}}$ $\exists$ endliche Überdeckung mit Umgebungen einzelner Punkte
$\bigcup_{i=1,\dots,n} U_{x_i} \supset f^{-1}(y)$ (die U_{x_i} enthalten nur je einen Punkt)

$\Longrightarrow$ Anzahl der Punkte in $f^{-1}(y)$ ist endlich $\square$

Wir werden zeigen, dass die Restklasse modulo 2 von $\# f^{-1}(y)$ nicht von der Wahl des regulären Wertes y abhängt.
Für den Beweis am Ende brauchen wir aber noch einige Definitionen und Lemmata.

__Definition:__ Sei $X \subset \mathbb{R}^k$. $X \times [0,1] = \{(x,t) \mid x \in X, 0 \leq t \leq 1\}$
Zwei Abbildungen $f, g: X \to Y$ heißen <u>glatt homotop</u> ($f \sim g$) $\Longleftrightarrow \exists F: X \times [0,1] \to Y$ glatte Abbildung mit

$$F(x,0) = f(x) \text{ und } F(x,1) = g(x), \ \forall x \in X.$$

F heißt dann <u>glatte Homotopie zwischen f und g</u>.

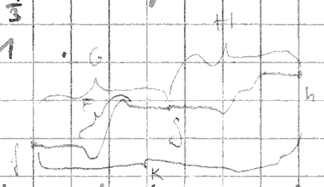
__Satz:__ Die glatte Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

__Beweis:__ Reflexivität: $F(x,t) = f(x)$ ✓

Symmetrie: $G(x,t) = F(x, 1-t)$ für gegebenes F, das f nach g überführt ✓

Transitivität: $\exists$ glatte Funktion $\varphi: [0,1] \to [0,1]$
mit $\varphi(t) = 0$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
und $\varphi(t) = 1$ für $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$
(z.B. $\varphi(t) = \lambda(t - \frac{1}{3}) / (\lambda(t - \frac{1}{3}) + \lambda(\frac{2}{3} - t))$, wobei
$\lambda(r) = 0$ für $r \leq 0$, $\lambda(r) = \exp(-r^{-1})$ für $r > 0$)

Sei F glatte Homotopie zwischen f und g.
Dann ist $G(x,t) := F(x, \varphi(t))$ auch glatte Homotopie zwischen f und g mit
$G(x,t) = f(x)$ für $0 \le t \le \frac{1}{3}$
$G(x,t) = g(x)$ für $\frac{2}{3} \le t \le 1$.



Ebenso sei H zwischen g und h.

$$K(x,t) := \begin{cases} G(x,2t) & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H(x,2t-1) & , \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

ist Homotopie zwischen f und h ✓

□

<u>Definition:</u> Seien $f,g : X \to Y$ Diffeomorphismen.
f ist <u>isotop</u> zu g $:\Leftrightarrow$ $\exists F : X \times [0,1] \to Y$ glatte Homotopie mit:
$\forall t \in [0,1]: F_t(x) := F(x,t) : X \to Y$ ist Diffeomorphismus.
Die Isotopie ist auch eine Äquivalenzrelation.

<u>Homotopie-Lemma:</u>

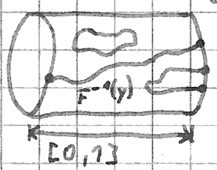
Seien $f,g : M \to N$ glatt homotope Funktionen mit M kompakte Mfgk, $\dim(M) = \dim(N)$
Sei $y \in N$ regulärer Wert für f und g.

$$\Rightarrow \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod 2$$

<u>Beweis:</u> Sei $F : M \times [0,1] \to N$ glatte Homotopie zwischen f und g.
Angenommen, y ist auch regulärer Wert für F.

$\Rightarrow$ $F^{-1}(y)$ ist kompakte 1-Mfgk. mit Rand:
$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = (F^{-1}(y) \cap (M \times 0) \cup F^{-1}(y) \cap (M \times 1))$$
$$= f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1$$
$\Rightarrow$ Anzahl der Randpunkte von $F^{-1}(y)$ $= \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$
Andererseits hat kompakte 1-Mfgk. immer gerade Anzahl Randpunkte.

$\Rightarrow \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$ gerade $\Rightarrow \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod 2$



Angenommen, y ist kein regulärer Wert von F.

Haben: $\#f^{-1}(y)$ und $\#g^{-1}(y)$ sind lokal konstante Funktionen (solange man sich von kritischen Werten fernhält) | (z.B. im Vortrag von Benjamin Lehmann)

$\Rightarrow$ $\exists V_1 \subset N$ offene Umgebung von y, bestehend aus reg. Werten von f, sodass $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$, $\forall y' \in V_1$

$\exists V_2 \subset N$ analog für g

$y \in V_1 \cap V_2$, also $V_1 \cap V_2$ nichtleere, offene Menge

$\Rightarrow$ $\exists z \in V_1 \cap V_2$ regulärer Wert von F (man findet Ball um y in $V_1 \cap V_2$ und Menge der krit. Punkte ist Nullmenge)

Dann: $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \underset{(\text{mod } 2)}{\equiv} \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y)$

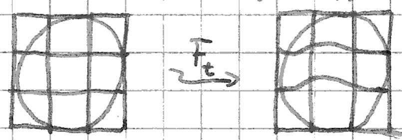
□

Homogenitätslemma:

Seien y, z beliebige innere Punkte der zusammenhängenden Mfgk. N.
Dann ex. $h: N \to N$ Diffeomorphismus, der glatt isotop zur Identität ist mit $h(y) = z$.

Beweis: (Für den Spezialfall $N = S^n$ Sphäre ist der Beweis einfach, man wähle h als Rotation, die y in z abbildet und alle Vektoren orthogonal zur Ebene durch y, z nicht verändert.)

Wir konstruieren erst eine glatte Isotopie $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die alle Punkte außerhalb des Einheitsballes fixiert und den Nullpunkt in einen beliebigen ~~offenen~~ Punkt im offenen Einheitsball verschiebt.



Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatte Funktion mit

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{für } \|x\| < 1$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{für } \|x\| \geq 1$$

(z.B. $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$ für $\lambda(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ für $t > 0$)

Wähle $c \in S^{n-1}$ fester Einheitsvektor.
Betrachte die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \, \varphi(x_1, \dots x_n) \qquad , i = 1 \dots n$$

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \; \exists$ eindeutige Lösung $x = x(t)$ mit $x(0) = \bar{x}$ (Anfangsbedingung)

Schreibe: $F_t(\bar{x}) = x(t)$

Ana3 $\Longrightarrow$ 1) $F_t(x)$ definiert $\forall t, \bar{x}$
2) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$
3) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$

$\Longrightarrow F_t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist Diffeomorphismus

Wenn man t variieren lässt, sieht man, dass F_t glatt isotop zur Identität ist, mit einer Isotopie, die alle Punkte außerhalb des Einheitsballes fixiert.
Mit entsprechender Wahl von c, t wird F_t den Nullpunkt an einen beliebigen Punkt im offenen Einheitsball tragen.

Betrachte zusammenhängende Mfgk. N.

Zwei Punkte in N heißen "isotop" wenn ein zur Identität glatt isotoper Diffeomorphismus existiert, der einen Punkt im anderen abbildet.
(Äquivalenzrelation)
Für y innerer Punkt ex. Umgebung diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Damit ist jeder genügend nahe Punkt an y isotop zu y.
D.h. jede Isotopie-Klasse von inneren Punkten in N ist offene Menge und das Innere von N ist in disjunkte offene Isotopieklassen geteilt. Da das Innere von N zusammenhängend ist, gibt es nur eine solche Isotopie-Klasse. $\square$

<u>Theorem:</u> (i) Sei M kompakt, ohne Rand, N zusammenhängend, $\dim(M) = \dim(N)$, $f: M \to N$ glatte Funktion.
Seien y, z reguläre Werte von f.

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2$$

(ii) Der Abbildungsgrad modulo 2 von f hängt nur von der Äquivalenzklasse bezügl. der glatten Homotopie von f ab.

<u>Beweis:</u> (i) Sei $h: N \to N$ Diffeomorphismus, isotop zur Id. mit $h(y) = z$.
(h ex. nach Homogenitätslemma)

$\Rightarrow z$ reg. Wert von $h \circ f$, $h \circ f$ homotop zu f

$\Rightarrow \# (h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2$ (Homo~~ge~~topielemma)

$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$ (nach Def. von h)

$\Rightarrow \# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \bmod 2$

Nenne diese Restklasse $\deg_2(f)$.

(ii) Jetzt f glatt homotop zu g.

Sard's Theorem: $\exists\, y \in N$ reg. Wert für f und g

$\deg_2 f \overset{\text{n.Def.}}{\equiv} \# f^{-1}(y) \overset{\circledast}{\equiv} \# g^{-1}(y) \overset{\text{n.Def.}}{\equiv} \deg_2 g \pmod 2$ ⊛ Homotopielemma

Also $\deg_2 f$ ist unabhängig von Repräsentant der Äquivalenzklasse bzgl. glatter Homotopie. □

<u>Beispiele:</u> $c: M \to M$ konstant hat geraden Abb-grad.
Id hat ungeraden Abb.-grad.
$\Rightarrow$ sind nicht homotop.

Daher ex. keine glatte Funktion $f: D^{n+1} \to S^n$, die die Sphäre punktweise fixiert. Eine solche Funktion würde nämlich eine glatte Homotopie

$$F: S^n \times [0,1] \to S^n$$
$$F(x,t) = f(x\,t) \quad \text{(zwischen c und Id)}$$

implizieren.