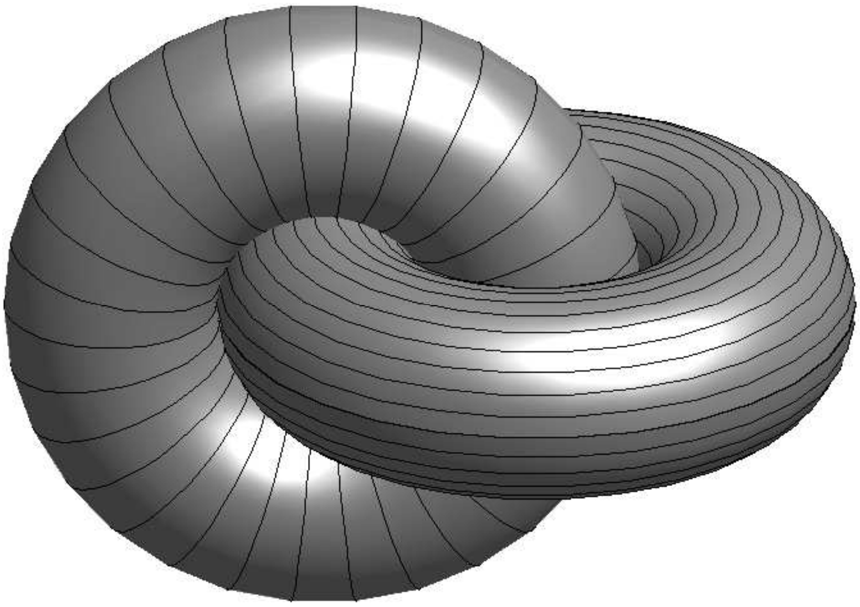
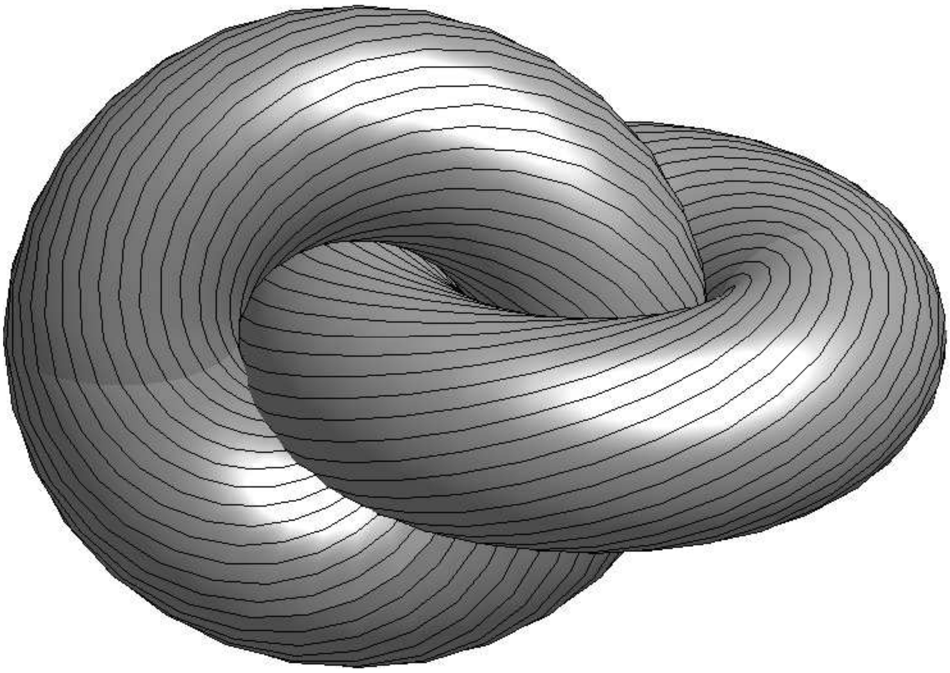
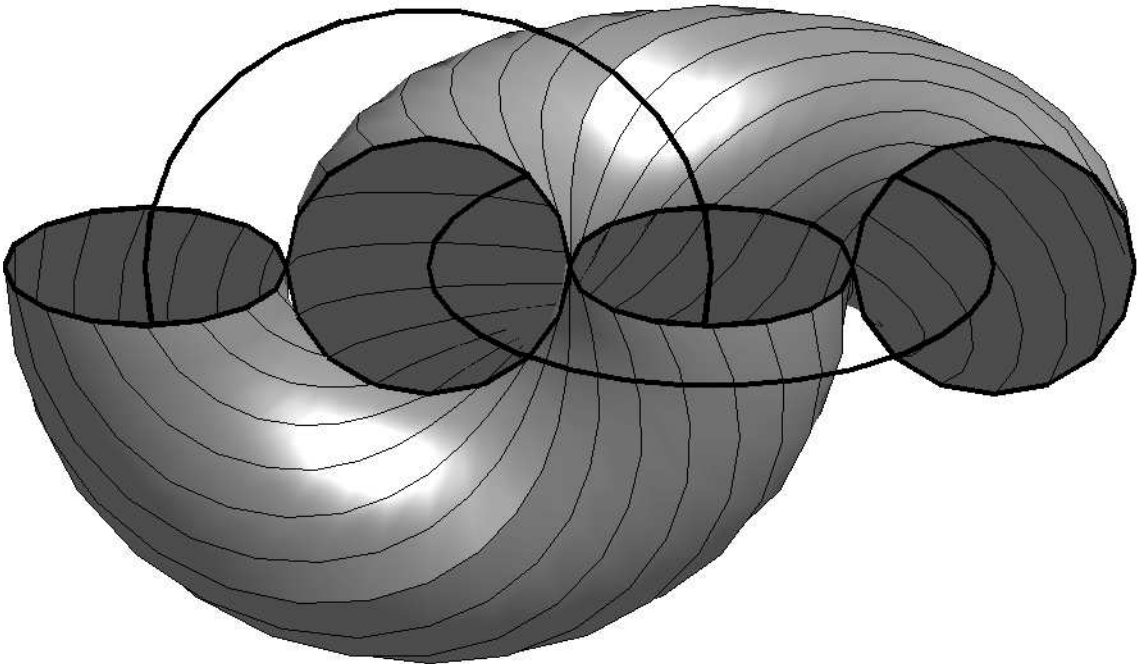
Veranschaulichung der Hopf-Faserung $S^3/S^1 \simeq S^2$



Die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ wird durch den Clifford-Torus $\frac{1}{\sqrt{2}}S^1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}S^1$ in zwei Voll-Tori V_1, V_2 zerlegt. Diese sind gerade die Tuben vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ um die Grosskeise $S_1 = S^1 \times \{0\}$ und $S_2 = \{0\} \times S^1$.



Die Hopf-Faserung bzgl. der kanonischen komplexen Struktur von $\mathbb{C}^2$ kann im Modell $S^3 = V_1 \cup_\partial V_2$ wie folgt veranschaulicht werden: Eine Faser $F_{\alpha,\varphi}(t) = \left(\sin\alpha \cdot e^{i\varphi}, \cos\alpha \cdot e^{i(\varphi+t)}\right)$ enspricht einer geschlossenen Kurve in V_i, die sich einmal um das "Loch" des Torus dreht und dabei dessen Seele einmal umwindet. Insbesondere für $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sieht man schön, wie sich die Fasern $F \subset \partial V_1$ bzw. $F \subset \partial V_2$ unter Identifizierung der Ränder von V_i entsprechen.



Der Quotient S^3/S^1 nach den Fasern $F \simeq S^1$ ergibt sich, indem man in V_i jeweils einen Querschnitt homöomorph zu B^2 wählt und diese beiden Kreisscheiben an ihren Rändern gemäss der Verklebung $V_1 \cup_\partial V_2$ miteinander identifiziert. Das ergibt gerade $B^2 \cup_\partial B^2 \simeq S^2$.