Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)
Übungsblatt 10
Abgabetermin: 20.01.2020 vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq 1$ sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig und fest. Betrachten Sie die Abbildung $\ell : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}, \ell(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$. Sei $\mathcal{C}^0([0,1])$ mit der Norm $||f||_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ausgestattet. Berechnen Sie $||\ell||$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Menge der stetigen Operatoren in $\mathcal{H}$.

(a) Sei $T \in \mathcal{H}$ bijektiv mit stetiger Inverse. Zeigen Sie, dass dann der adjungierte Operator T^* invertierbar ist.

(b) Sei $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren die gegen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann T selbstadjungiert ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen und $T : \ell_2 \to \ell_2$ der lineare Operator, der durch $T(x) = (x_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a = (a_n) \in \ell_2$, definiert ist. Zeigen Sie dass T stetig ist und berechnen Sie den adjungierten Operator T^*.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $X \neq \{0\}$ ein normierter Raum, und seien $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit $ST - TS = Id$. Das Ziel der Aufgabe ist zu beweisen, dass S oder T unstetig ist.

(a) Zeigen Sie, dass $||T^n|| \leq ||T||^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie nach Induktion dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Mit Hilfe von (b) zeigen Sie: wenn T beschräkt ist, gilt $||S||||T|| \geq \frac{n+1}{2}$.

(d) Eine Schliessfolgerung anziehen.