HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)
Übungsblatt 11
Abgabetermin: 29.01.2020 vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear, mit $\mathcal{D}(T) = X$ (überall definiert). Beweisen Sie:

(a) Wenn T eine stetige Inverse besitzt, dann existiert ein $m > 0$ mit $m||x|| \leq ||Tx||, \forall x \in X$

(b) Wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $||x_n|| = 1$ und $Tx_n \to 0$ gibt, dann besitzt T keine stetige Inverse.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Folge (u_n) in einem Banachraum $\mathcal{B}$ (über $\mathbb{C}$) heißt *schwach konvergent*, wenn $(f(u_n))$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist für jedes $f^* \in \mathcal{B}^*$. Bezeichnung: $u_n \rightharpoonup u, \quad n \to \infty$, bedeutet u_n ist schwach konvergent gegen u.
Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter überall definiert linearer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $x_n \rightharpoonup x$ als $n \to \infty$ in $\mathcal{H}$. Zeigen Sie: $Tx_n \rightharpoonup Tx$, als $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei U unitärer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und λ ein Spektralwert. Zeigen Sie, dass dann $|\lambda| = 1$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $X = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ und $\phi \in X$ eine strenge monotone Funktion. Wir definieren den linearen Operator $A_\phi : X \to X$ als $A_\phi(f) = \phi f$ (multiplikation mit f). Beweisen Sie, dass $\sigma(A_\phi) = \phi([a, b])$.