HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Analysis III für PhysikerInnen (WS 19/20)
Übungsblatt 1
Abgabetermin: 28.10.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Finden Sie alle Lösungen zu den folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = -2x(y^2 - y)$

(b) $y' = x^2 y^2$

(c) $y' = xe^{x-y}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die maximale Lösung $y(x)$ zu den folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y' = y^2 \sin x, \qquad y(0) = 1$

(b) $y' = e^{2x}(1 + y^2), \qquad y(0) = 0$

(c) $xy' = y \ln x, \qquad y(1) = e$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $f(x, y) = y - x^2 + 1$ genügt einer Lipschitz Bedingung (bzgl. y) auf $[0, 2] \times \mathbb{R}$ und berechnen Sie die Lipschitz-Konstante.

(b) Zeigen Sie, dass $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2$, mit $T > 0$, genügt **lokal** einer Lipschitz-Bedingung aber genügt keine Lipschitz-Bedingung auf dem ganzen Definitionsbereich.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$und die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Diese assoziiert zu jedem Punkt $(x, y) \in U$ die Steigung $f(x, y)$; wir bezeichnen ein Triple $(x, y, f(x, y))$ als ein Linienelement. Dabei veranschaulicht man ein Linienelement indem man an den Punkt (x, y) ein kleines Geradenstück mit der zugehörigen Steigung $f(x, y)$ einzeichnet. Die Familie aller Linienelemente nennt man auch Richtungsfeld. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = x$

(b) $y' = y$

(c) $y' = \frac{y}{x}$

(d) $y' = 1 + x - y$