Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Analysis III für PhysikerInnen (WS 19/20)
Übungsblatt 2
Abgabetermin: 4.11.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Ein Behälter enthalte V Liter Salzwasser, und es werde eine Kochsalzlösung mit einem Salzgehalt von k Gramm/Liter mit einer Rate von m Liter/Minute in den Behälter gegeben. Wir nehmen an, dass das Salz im Behälter zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig verteilt ist (z.B. durch ständiges Rühren). Gleichzeitig fließe durch ein Rohr dieselbe Menge, also m Liter/Minute, aus dem Behälter heraus.

Stellen Sie die Differentialgleichung für die Menge an Salz im Behälter auf (Verwenden Sie dazu die Notation $y(t)$ für die Menge an Salz im Behälter zum Zeitpunkt 't')

(b) Wir nehmen an, dass die Werte k, m konstant sind. Lösen Sie zuerst die in (a) aufgestellte Differentialgleichung mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. Wohin konvergiert die Lösung für $t \to \infty$? Ist dieses Verhalten realistisch? Vergleichen Sie dieses Grenzverhalten mit Ihrer physikalischen Intuition.

(c) Wir betrachten nun einen zweiten, identischen Behälter. Insbesondere enthält auch dieser V Liter Salzwasser und ein Rohr aus dem m Liter/Minute Flüssigkeit entweicht. Angenommen die Flüssigkeit des ersten Behälters fließt durch dessen Rohr direkt in den zweiten Behälter. Wie lautet die Differentialgleichung für die Menge an Salz im zweiten Behälter?

Angenommen wir haben konstante Werte $m = 2$, $k = 10$ und $V = 1$ (für beide Behälter). Lösen Sie die Differentialgleichung für den zweiten Behälter unter der Annahme dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ kein Salz im ersten Behälter befindet (siehe Aufgabenteil (b))und zur Zeit $t = 2$ kein Salz im zweiten Behälter befindet?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und geben Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form an. Falls eine Gleichung nicht exakt sein sollte, so finden Sie zuerst einen integrierenden Faktor.

(a) $e^x \sin(x) + e^y \cos(y) y' = 0$

(b) $e^y + y\cos(xy) + (xe^y + x\cos(xy))\, y' = 0$

(c) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + (3x^2 - 1)y(x) = x^2 e^x, \qquad y(0) = -1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Leiche wurde am Tatort um 2:20 Uhr gefunden. Eine halbe Stunde später wurde eine Körpertemperatur von 15 Grad gemessen. Wann hat den Mord statt gefunden, wenn zum Zeitpunkt des Fundes die Körpertempertur 20 Grad betrug und die Außentemperatur bei -5 Grad lag ? (*Hinweis:* Nach Newtons Gesetz wissen wir, dass die Geschwindigkeit der Abkühlung proportional zur Differenz der Temperaturen ist. Man nimmt an, dass die normale Körpertempertur von 36,7 Grad ist).