



Übungsaufgaben zur Vorlesung  
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)  
Übungsblatt 4

Abgabetermin: 18.11.2019 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer  
und Ihre Übungsgruppe drauf.

**Aufgabe 1**

(5 Punkte)

Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten, lösen Sie das inhomogene System:

$$\begin{cases} x' = x + y - 5t + 2 \\ y' = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases}$$

**Aufgabe 2**

(5 Punkte)

Wir betrachten die Schwingung eines Pendels mit der Masse  $m$ , die an einem Faden der Länge  $\ell$  hängt und beschreiben die Bewegung durch den Auslenkungswinkel  $\varphi(t)$  als Funktion der Zeit  $t$ . Die Komponente der an  $m$  angreifenden Schwerkraft in Richtung der Bahntangente ist  $mg \sin \varphi$ ; dabei ist  $g$  die Fallbeschleunigung. Der Weg ist  $\ell\varphi$ , die Beschleunigung ist also  $\ell\varphi''$ . Begründen Sie warum die Gleichung

$$m\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

gilt. Wir nehmen nun an, dass die Auslenkung  $\varphi$  so klein ist, dass man  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  ersetzen kann. Lösen Sie die Gleichung

$$\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0$$

mit Anfangsbedingung  $\varphi(0) = \epsilon$  und  $\varphi'(0) = 0$ . Berechnen Sie die Schwingungsdauer  $T$ .

**Aufgabe 3**

(4 Punkte)

Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  beliebig und  $\sigma(A)$  die Menge aller Eigenwerte von  $A$ . Gegeben sei eine Lösung  $y(t)$  des folgenden Systems

$$y' = Ay.$$

Überprüfen Sie ob die folgenden Aussagen wahr sind:

- (a) Falls für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , dann folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$
- (b) Falls für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ , dann folgt  $\sup_{t \geq 0} \|y(t)\| < \infty$ .

#### Aufgabe 4

(6 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

(a)  $y'' - y' - 2y = 4x^2$

(b)  $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$