

Übungsaufgaben zur Vorlesung  
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)  
Übungsblatt 6

Abgabetermin: 2.12.2018 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer  
und Ihre Übungsgruppe drauf.

**Aufgabe 1**

(4 Punkte)

Wir betrachten das DG System.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -h(x) - y \end{cases}$$

wobei die Funktion  $h$  lokal Lipschitz-stetig ist, mit  $h(0)=0$  und  $xh(x) > 0, \forall x \neq 0$ . Sei  $0 < k < 1$  Konstante. Überprüfen Sie, dass

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x \ y) \begin{pmatrix} k & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \int_0^x h(s) ds$$

eine starke-Lyapunov Funktion des DG Systems für die Ruhelage  $(0, 0)$  ist. Zeigen Sie, dass die Stationäre Lösung  $(0, 0)$  asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 2**

(6 Punkte)

Gegeben sei das folgende System:

$$(*) \begin{cases} x' = y - (x^2 + y^2)x \\ y' = -x - (x^2 + y^2)y \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt des Systems ist und linearisieren Sie die Gleichung in  $(0, 0)$  (berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $J_f((0, 0)) := A$ ). Ist das lineare System  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

(b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung  $(x(t), y(t))$  von  $(*)$  mit  $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$  gilt

$$\frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2) < 0.$$

Ist  $(0, 0)$  eine stabile, asymptotisch stabile oder eine instabile Ruhelage des Systems?

**Aufgabe 3**

(5 Punkte)

Berechnen Sie die Green'sche Funktion für

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 = u'(1). \end{cases}$$

**Aufgabe 4**

(5 Punkte)

Lösen Sie die inhomogene DG

$$u'' + u = e^x \quad \text{auf } [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$