HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PD DR. ANGELA ORTEGA

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)
Übungsblatt 7
Abgabetermin: 16.12.2019 vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Lösen Sie das folgende RWP

$$\begin{cases} u'' = x^2 & \text{auf } [0,1] \\ u(0) = 0 & \\ u(1) + u'(1) = 2. & \end{cases}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu folgendem Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(x) = -\lambda u(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0) = u'(\pi) = 0 & \end{cases}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $v \in V$, $v_0 \in U$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $v - v_0 \in U^\perp$ ist, dann gilt

$$||v - v_0|| < ||v - u|| \quad \text{für alle} \quad u \in U,\ u \neq v_0.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Pythagoras)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{H}$ orthonormiert. Zeigen Sie

$$||f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2,$$

wobei $f_k = \langle \varphi_k, f \rangle$ die Fourierkoeffizienten sind.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Man betrachte den Vektorraum $C^0([-1,1]) := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$ und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0([-1,1]) \times C^0([-1,1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.
Wenden Sie das Schmidt-Orthonormierungsverfahren an, um die (lineare unabhängige) Polynome $1, x, x^2, x^3, \ldots$ zu orthonormieren (Berechnen Sie die erste 4 Elemente). So erhählt man den Legendren-Polynomen.