Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20) Übungsblatt 9

Abgabetermin: 6.01.2020 vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$ bzgl. der Hilbert-Basis:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \; -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{falls } \; 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ bzgl. der Orthonormalfolge von Aufgabe (1).

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}^1([0,1], \mathcal{R})$ und setze

$$||f||_1 := |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|,$$

$$||f||_2 := \max\left\{ \left| \int_0^1 f(x)dx \right|, \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $|| \cdot ||_j$, $j = 1, 2$ jeweils eine Norm auf $\mathcal{C}^1([0,1], \mathcal{R})$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $Lip[a, b]$ die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (d.h. $\exists C > 0$ so dass $\forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$), und setze

$$||f||_L := ||f||_\infty + \sup_{a \leq x < y \leq b} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$$

Zeigen Sie, dass $(Lip[a, b], || \cdot ||_L)$ ein normierter Raum ist. Zeigen Sie dass $(Lip[a, b], || \cdot ||_L)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Raum $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mid \ f \text{ ist stetig } \}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$. Sei $F = \{f \in E \ \mid \ f(0) = 0\}$. Zeigen Sie, dass F ein Teilraum von E ist und $F^{\perp} = \{0\}$. (*Hinweis:* Man bemerkt dass die Funktion $g : x \to xf(x)$ auf $[0,1]$ ist in F für alle $f \in E$).