Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD Dr. Angela Ortega

**Übungsaufgaben zur Vorlesung**
**Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 19/20)**
**Übungsblatt 9**
**Abgabetermin: 13.01.2020 vor der Vorlesung**
**Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe drauf.**

---

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Untersuchen Sie ob die folgenden Funktionenfolgen punktweise oder gleichmäßige konvergieren und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_n = e^{-nx}\sin(2nx)$ auf $[a,\infty]$ für $a>0$.

(b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ auf $\mathbb{R}$.

(c) $f_n(x) = n^{1/2}x^n(1-x)$ auf $[0,1]$.

(d) $f_n(x) = nx^n(1-x)$ auf $[0,1]$.

## Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{P} := \mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ definieren wir $||p|| := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Beweisen Sie, dass $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass dieser Raum nicht vollständig ist.

## Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten den normierten Raum $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ aus Aufgabe 2. Überprüfen Sie welche der folgenden Abbildungen beschränkte lineare Abbildungen sind und welche nicht. Geben Sie ggf. die Operatornorm an.

$$\begin{aligned}
T_1 &: \mathcal{P}\to\mathcal{P}, && (T_1p)(x) := \int_0^x p(\tau)d\tau;\\
T_2 &: \mathcal{P}\to\mathcal{P}, && (T_2p)(x) := p(x+1);\\
T_3 &: \mathcal{P}\to\mathbb{R}, && T_3p := p'(1);\\
T_4 &: \mathcal{P}\to\mathbb{R}, && T_4p := p'(0).
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Sei $X$ ein reeller normierter Raum, $T : X \to \mathbb{R}$ ein linearer Operator. Zeigen Sie: $T$ ist steig genau dann, wenn die Menge $M := \{x \in X \ \mid \ ||Tx|| = 1\}$ abgeschlossen ist.
(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass wenn nicht stetig ist, existiert es eine Folge $(y_n) \subset M$ mit $y_n \to 0$).