Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Angela Ortega

Analysis III (WS 19/20)

Probeklausur Analysis III

Aufgabe 1 ($4 \times 4 = 16$ Punkte)

Sagen Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben eine kurze Begründung (skizzieren Sie den Beweis oder geben ein Gegenbeispiel an).

(a) In einem normierten Vektorraum jeder Teilraum ist abgeschlossen.

(b) Ist (f_n) eine konvergente Folge in $\mathcal{C}^0([a,b])$ bzgl. $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, dann konvergiert f_n punktweise.

(c) Jede beschränkte Folge ist Cauchy.

(d) In einem Hilbertraum jede konvergente Folge $x_n \to x$, schwach konvergiert $x_n \rightharpoonup x$.

Aufgabe 2 ($8 + 8 = 16$ Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differeleichung

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Geben Sie dieser Lösung für den Anfangswert $y(1) = y'(1) = 0$.

(b) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$y' + \frac{2x^2 - 1}{x} y = e^{-x^2} \ln x, \qquad x > 0.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der homogene Gleichung an. Wir lautet die Lösung der inhomogene Gleichung, für die $y(1) = 1$ gilt?

Aufgabe 3 ($12 + 2 = 14$ Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Lösung $\mathbf{y}$ gilt $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 4 ($6+6=12$ Punkte)

Wir betrachten dias Differentialgleichungssytem

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - xy \end{cases}$$

(a) Finden Sie die stationäre Lösungen (kritische Punkte) des Gleichungssytems.

(b) Linearisieren Sie die Gleichung in den kritischen Punkte und bestimmen ob die Punkte stabil oder instabil sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Finden Sie die Fourierreihe von $f(x) = 1 + x$ auf $[-\pi, \pi]$.

Aufgabe 6 ($8 + 8 = 16$ Punkte)

(a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linear Operator. Zeigen Sie dass $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$.

(b) Sei ℓ_2 der Hilbertraum aller Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$, mit $||x||_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Begründen Sie, warum die Menge

$$E = \{x = (x_n) \in \ell^2 \ \mid \ x_n \neq 0 \text{ für nur endliche viele } n \in \mathbb{N}\}$$

nicht abgeschlossen in ℓ_2 sein kann (man kann ein Gegenbeispiel geben).

Aufgabe 7 ($5+5+2+4=16$ Punkte)

Wir betrachten $X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}, f(0) = 0, f \text{ stetig in } 0 \text{ und } 1\}$ und den Operator $Tf(t) := tf(t),\ t \in [0,1]$ auf X. Zeigen Sie:

(a) $(X, ||f||_\infty)$ ist ein Banachraum,

(b) T ist einer beschränkter linearer Operator,

(c) $||T|| = 1$,

(d) $\sigma(T) \subset [0,1]$ (*Hinweis:* Zeigen dass für $\lambda \notin [0,1]$, $T - \lambda I$ eine Inverse besitzt).