RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-04-22
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 1: Lösen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Phasenportraits. *Hinweis: Es gibt vier qualitativ unterschiedliche Fälle.*

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad \text{mit} \qquad f(x,t) := \frac{|x|}{\cos^2(t)}, \qquad t, x \in \mathbb{R}, \quad t \neq (2n+1)\pi/2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Lösen Sie außerdem das Anfangswertproblem zu $x(\pi) = x_0$.

b) Die Funktion f sei durch $f(t,0) := 0$, $t \in \mathbb{R}$ fortgesetzt. Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems mit der fortgesetzten Funktion zu $x(\pi/2) = 0$.

Aufgabe 3: Lösen Sie für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \qquad x(0) = x_0.$$

Hinweis: Für jedes $x_0 \neq 0$ ist die Lösungsmenge durch einen Parameter gekennzeichnet; für $x_0 = 0$ durch zwei Parameter.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie die Picard-Interierten $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ für das zweidimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 x_2 \\ x_1^2 + \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das gleiche Problem bis zur zweiten Ordnung in t mit einem Potenzreihenansatz.

Vergleichen Sie die Resultate!

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Diagonalisieren Sie die Matrix und skizzieren Sie das Phasenportrait (Bahnkurven mit Durchlaufsinn) im „gedrehten“ System.

Präsenzaufgabe B: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x(1-x)$$

mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ und $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe C: Berechnen Sie die Picard-Interierten $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ für das dreidimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe D: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^3$$

zu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ bis auf zweite Ordnung mit einem Potenzreihenansatz. Vergleichen Sie sodann das Ergebnis mit der exakten Lösung.

Hinweis: Die Übung findet **mittwochs um 8.15 bis 9.45 Uhr im „Kleinen Physikhörsaal“** statt. Die Aufgabenblätter werden in der Regel montags in der Vorlesung verteilt. In der folgenden Übung werden die Präsenzaufgaben bearbeitet. Die Aufgaben (mit arabischen Ziffern) sind als Hausaufgaben gedacht und können in der darauffolgenden Übung abgegeben werden. Pro Aufgabe gibt es vier Punkte. Für den Übungsschein ist die Hälfte der Gesamtpunktzahl erforderlich. Die Aufgabenblätter sind auch über die unten angegebene Internet-Seite erreichbar.

Olaf Post ist im Raum 234 (Hauptgebäude) und unter der Telefonnummer 80-9 45 13 zu erreichen, insbesondere in der Sprechstunde mittwochs von 15 bis 16 Uhr.

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/GewDgl02.html`