RWTH Aachen Sommersemester 2002
Institut für Reine und Angewandte Mathematik 2002-07-08
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post **Blatt 9 (kleine Korrekturen)**

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 35: *Schallausbreitung in geschichteten Medien*

Seien $a, b > 0$ und $Q := [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$. Seien außerdem $c(\cdot)$ und $\rho(\cdot)$ stetig differenzierbare, strikt positive Funktionen auf $[0, b]$ (Schallgeschwindigkeit bzw. Dichte eines *geschichteten Mediums* in Q). Die Schallausbreitung hierin wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, y; t) &= [c(y)]^2 \rho(y) \nabla \frac{1}{\rho(y)} \nabla f(x, y; t) \\ &= [c(y)]^2 \Delta f(x, y; t) - [c(y)]^2 \frac{\rho'(y)}{\rho(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y; t)\end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben. Zusätzlich werden die *Neumannschen Null-Randbedingungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y; t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, y; t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0; t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, b; t) = 0$$

für alle $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$ und $t \in \mathbb{R}$ gefordert (die physikalisch als vollständige Reflexion der Schallwellen am Rand von Q interpretiert werden). Machen Sie die Separationsansätze

$$f(x, y; t) = u(x, y)T(t) \qquad \text{und} \qquad u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{2}$$

und stellen Sie gewöhnliche Differentialgleichungen und Randbedingungen für X, Y, T auf, so dass die Produkte der Lösungen dieser Randwertprobleme Lösungen von (1) und (2) bilden.

Aufgabe 36: *Neumann- bzw. ϑ-periodische Randbedinguen*

Sei $a > 0$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Randwertprobleme nichttrivial lösbar? Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen.

a) $u'' + \lambda u = 0$ mit $u'(0) = u'(a) = 0$, $u \in C^2([0, a], \mathbb{R})$ (Neumannsche Null-Randbedingungen).

b) $u'' + \lambda u = 0$ mit $u(a) = e^{i\vartheta} u(0)$ und $u'(a) = e^{i\vartheta} u'(0)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $u \in C^2([0, a], \mathbb{C})$. Für welche $\vartheta \in \mathbb{R}$ ist der Lösungsraum ein- bzw. zweidimensional?

Aufgabe 37: *Symmetrie eines Differentialoperators mit verschiedenen Randbedingungen*

Seien $p \in C^1([0, a])$ und $q \in C([0, a])$, $q \geq 0$ und $p \geq p_0$ für eine Konstante $p_0 > 0$. Weiter sei der Differentialoperator L definiert durch

$$(L\varphi)(x) = -\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big) + q(x)\varphi(x)$$

sowie für Funktionen $\varphi, \psi \in C([0, a], \mathbb{C})$ das Skalarprodukt $\langle \varphi, \psi \rangle := \int_0^a \overline{\varphi(x)} \psi(x)\, dx$.

a) Seien $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset C^2([0, a], \mathbb{C})$ die im folgenden definierten Vektorräume. Zeigen Sie, dass L jeweils eingeschränkt auf $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$ symmetrisch ist, d. h. zeigen Sie, dass die Gleichung $\langle \varphi, L\psi \rangle = \langle L\varphi, \psi \rangle$ jeweils für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{V}_1$ bzw. für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{V}_2$ erfüllt ist.

b) Zeigen Sie außerdem, dass $\langle \varphi, L\varphi \rangle \geq p_0 \int_0^a |\varphi'(x)|^2\, dx$ jeweils für alle $\varphi \in \mathcal{V}_1$ bzw. für alle $\varphi \in \mathcal{V}_2$ gilt.

(bitte wenden)

c) Gilt zusätzlich $\langle \varphi, L\varphi\rangle \geq \frac{p_0}{a^2}\int_0^a |\varphi(x)|^2\,dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{V}_1$ und/oder für alle $\varphi \in \mathcal{V}_2$? Wenn nein, warum nicht? Kann man die Ungleichungen auf kleineren $\widetilde{\mathcal{V}}_{1,2}$ erhalten?

$\mathcal{V}_1 := \{\varphi \in C^2([0,a],\mathbb{C}) \mid \varphi'(0) = \varphi'(a) = 0\}$ Neumannsche Null-Randbedingungen

$\mathcal{V}_2 := \{\varphi \in C^2([0,a],\mathbb{C}) \mid \varphi(0) = \varphi(a)$ und $\varphi'(0) = \varphi'(a)\}$ periodische Randbedingungen

Bei $\mathcal{V}_2$ sind zusätzlichen Voraussetzungen an p erforderlich. Welche?

Aufgabe 38: *Greensche Funktion*

a) Seien p, $q \in C([a,b],\mathbb{R})$ und u_1, u_2 linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $u'' + pu' + qu = 0$, für die Wronskideterminate gilt somit $w(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) \neq 0$ für ein $x \in [a,b]$ (und damit auch für alle x, vgl. Aufgabe 9). Zu $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ sei

$$u(x) := u_2(x)\int_a^x \frac{u_1(y)}{w(y)}\, f(y)\,dy + u_1(x)\int_x^b \frac{u_2(y)}{w(y)}\, f(y)\,dy. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ und $u'' + pu' + qu = f$ gilt.

b) Schreiben Sie (3) als $u(x) = \int_a^b G(x,y)\, f(y)\,dy$ und geben Sie die Greensche Funktion G an. Ist G stetig auf $[a,b] \times [a,b]$?

c) Welche Bedingungen müssen u_1 und u_2 erfüllen, damit u die Dirichlet-Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ erfüllt für alle f? Sei $k > 0$, $k \notin \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Greensche Funktion G zu $u'' + k^2u = f$ mit $u(0) = u(\pi) = 0$. Wie verhält sich G für $k \to 0$ und $k \to n \in \mathbb{N}$?

d) Welche Bedingungen müssen u_1 und u_2 erfüllen, damit u die Neumann-Randbedingungen $u'(a) = u'(b) = 0$ erfüllt für alle f? Sei $k > 0$. Bestimmen Sie die Greensche Funktion G zu $u'' - k^2u = f$ mit $u'(0) = u'(1) = 0$.

Präsenzaufgabe A: *(zu Aufgabe 36)*
Sei $a > 0$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem $u'' + \lambda u = 0$ mit $u(0) = u(a)$ und $u'(0) = u'(a)$ (periodische Randbedingungen), $u \in C^2([0,a],\mathbb{R})$, nichttrivial lösbar? Bestimme für diese λ den Lösungsraum.

Präsenzaufgabe B: *(zu Aufgabe 37)*
Zeigen Sie, dass L eingeschränkt auf $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$ positiv ist, d. h. dass $\langle \varphi, L\varphi\rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{V}_1$ bzw. für alle $\varphi \in \mathcal{V}_2$ gilt.

Präsenzaufgabe C: *(zu Aufgabe 37)*
Sei $L\colon \mathcal{D} \longrightarrow L(\mathcal{D})$ ein strikt positiver Operator (d. h. es gibt eine Konstante $b > 0$ mit $\langle \varphi, L\varphi\rangle \geq b\langle \varphi, \varphi\rangle = b\|\varphi\|^2$ für alle $\varphi \in \mathcal{D} \subset C^2([0,a],\mathbb{C})$). Zeigen Sie, dass dann die Inverse $L^{-1}\colon L(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$ existiert und beschränkt ist (d. h. es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|L^{-1}v\| \leq c\|v\|$ für alle $v \in L(\mathcal{D})$).

Präsenzaufgabe D: *(zu Aufgabe 37)*
Sei $\mathcal{V} := \{\varphi \in C^2([0,a],\mathbb{C}) \mid \varphi(0) = 0\}$ (Dirichletsche Null-Randbedingung bei $x = 0$). Zeigen Sie, dass es eine Konstante $b > 0$ mit $\langle \varphi', \varphi'\rangle \geq b\langle \varphi, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{V}$ gibt.