Musterlösungen zur Serie 2: Konvergenz und Stetigkeit von Abbildungen

1. Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$$

einen Grenzwert für $(x,y) \to (0,0)$ besitzen, und berechnen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \sin y$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \sin x$,

(d) $f(x,y) = x \sin \dfrac{1}{y}$,

(e) $f(x,y) = x^y$,

(f) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{xy}$,

(g) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$,

(h) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Lösung (a) Wir betrachten die Nullfolge $(x_j, y_j) = (j^{-1}, j^{-2})$, $j = 1, 2, \ldots$ in $\mathbb{R}^2$. Wegen

$$f(x_j, y_j) = j \to \infty \ \text{ für } \ j \to \infty$$

existiert kein Grenzwert von f, falls $(x,y) \to (0,0)$.

(b) Wir benutzen den bekannten Grenzwert $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Dann folgen die Existenz des Grenzwertes von f für $(x,y) \to (0,0)$ und seine Berechnung nach den bekannten Rechenregeln:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \frac{\sin y}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = 0 \cdot 1 = 0.$$

(c) Wir betrachten die Nullfolgen $(x_j, y_j) = (j^{-1}, j^{-1})$ und $(\xi_j, \eta_j) = (j^{-1}, j^{-2})$, $j = 1, 2, \ldots$ in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$f(x_j, y_j) = \sin \frac{1}{j} \to 0 \text{ und } f(\xi_j, \eta_j) = \frac{\sin \frac{1}{j}}{\frac{1}{j}} \to 1 \ \text{ für } \ j \to \infty,$$

also existiert kein Grenzwert von f, falls $(x, y) \to (0, 0)$.

(d) Es sei (x_j, y_j) eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ mit $x_j > 0, y_j > 0$ für alle j. Dann gilt insbesondere $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$. Also gilt auch $\lim_{j\to\infty} x_j \sin \frac{1}{y_j} = 0$, weil $|\sin \frac{1}{y_n}| \leq 1$ für alle j ist. Also folgt

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0.$$

(e) Wir betrachten die Nullfolgen $(x_j, y_j) = (2^{-j}, 1/j)$ und $(\xi_j, \eta_j) = (2^{-j}, 2/j)$, $j = 1, 2, \ldots$ in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$f(x_j, y_j) = \frac{1}{2} \text{ und } f(\xi_j, \eta_j) = \frac{1}{4} \text{ für alle } j.$$

Also existieren die Grenzwerte $\lim_{j\to\infty} f(x_j, y_j)$ und $\lim_{j\to\infty} f(\xi_j, \eta_j)$ und sind verschieden. Also existiert der Grenzwert von f für $(x, y) \to 0$ nicht.

(f) Wir benutzen den bekannten Grenzwert $\lim_{z\downarrow 0} z \ln z = 0$. Daraus folgt

$$|xy \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{1}{2}|(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)| \to 0 \text{ bei } (x, y) \to (0, 0).$$

Also gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to 0} e^{xy \log(x^2+y^2)} = e^0 = 1.$$

(g) Es gilt $\lim_{x\downarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$, aber $\lim_{x\downarrow 0} f(x, 2x) = \frac{1}{5}$. Da die Grenzwerte verschieden sind, kann $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y)$ nicht existieren.

(h) Es gilt

$$\left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| = |x| \left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |x| \to 0 \text{ for } (x, y) \to (0, 0),$$

also $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0$.

2. Aufgabe Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass für alle stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die folgenden Behauptungen gelten:

(a) Für alle offenen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, dass auch $f(X)$ offen ist.

(b) Für alle abgeschlossenen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, dass auch $f(X)$ abgeschlossen ist.

(c) Für alle beschränkten Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, dass auch $f(X)$ beschränkt ist.

(d) Für alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, dass auch $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt ist.

(e) Für alle offenen Mengen $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt, dass auch $f^{-1}(Y)$ offen ist.

(f) Für alle abgeschlossenen Mengen $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt, dass auch $f^{-1}(Y)$ abgeschlossen ist.

Dabei sind $f(X) := \{f(x) \in \mathbb{R}^m : x \in X\}$ bzw. $f^{-1}(Y) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in Y\}$ die Bildmenge bzw. die Urbildmenge von X bzw. Y bzgl. f.

Lösung (a) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen $n = 1$, $X = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(X) = \{0\}$ nicht offen.

(b) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen $n = 1$, $X = \mathbb{R}$ und $f(x) = 2^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(X) =]0, \infty[$ nicht abgeschlossen.

(c) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen $n = 1$, $X =]0, 1[$ und $f(x) = 1/x$ für alle $x \in]0, 1[$. Dann ist $f(X) =]1, \infty[$ nicht beschränkt.

(d) Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt:

Wenn $f(X)$ nicht beschränkt wäre, so würde eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ existieren mit

$$\|f(x_j)\| \to \infty \text{ für } j \to \infty. \tag{1}$$

Weil X beschränkt ist, können wir, nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_j \to x$ für $j \to \infty$. Weil X abgeschlossen ist, folgt $x \in X$. Und weil f stetig ist, folgt $f(x_j) \to f(x)$ für $j \to \infty$. Das ist ein Widerspruch zu (1).

Wenn $f(X)$ nicht abgeschlossen wäre, so würde eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ existieren mit

$$f(x_j) \to y \text{ für } j \to \infty, \text{ aber } y \notin f(X). \tag{2}$$

Weil X beschränkt ist, können wir, nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_j \to x$ für $j \to \infty$. Weil X abgeschlossen ist, folgt $x \in X$. Und weil f stetig ist, folgt $f(x_j) \to f(x)$ für $j \to \infty$. Das ist ein Widerspruch zu (2).

(e) Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Es seien $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in f^{-1}(Y)$. Nach Definition der Menge $f^{-1}(Y)$ existiert ein $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Weil Y offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K(y_0, \varepsilon) \subseteq Y$. Weil f stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $x \in K(x_0, \delta)$ gilt $f(x) \in K(y_0, \varepsilon)$, also $x \in f^{-1}(K(y_0, \varepsilon))$, also $x \in f^{-1}(Y)$. Daraus folgt $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(Y)$.

(f) Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Wenn $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, so ist $\mathbb{R}^n \setminus Y$ offen. Nach (e) ist dann auch

$$f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus Y) = \mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(Y)$$

offen. Also ist $f^{-1}(Y)$ abgeschlossen.

***Aufgabe** Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Behauptungen:

(a) Die inverse Funktion f^{-1} ist ebenfalls stetig.

(b) Wenn X ein Intervall ist, so ist die inverse Funktion f^{-1} ebenfalls stetig.

Lösung für (a) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir wählen $X = [0, 1[\times [2, 3]$, $Y = [0, 2]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1[, \\ x - 1 & \text{für } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Dann folgt

$$f^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}1\neq f^{-1}(1)=2,$$

also ist f^{-1} in Eins nicht stetig.

Lösung für (b) Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt:

Zunächst beweisen wir, dass f streng monoton ist: Wenn das nicht der Fall wäre, so würden Punkte $x_1 < x_2 < x_3$ in X existieren mit

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \text{ oder } f(x_1) > f(x_2) < f(x_3).$$

Weil X ein Intervall ist, würden nach dem Zwischenwertsatz im ersten Fall Punkte $\xi_1 \in]x_1, x_2[$ und $\xi_2 \in]x_2, x_3[$ existieren mit

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \min\left\{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right\}.$$

Wegen $\xi_1 \neq \xi_2$ widerspricht das aber der Injektivität von f. Analog behandelt man den zweiten Fall.

Es sei f z.B. streng monoton wachesend. Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an, d.h. dass ein $y_0 \in Y$ existiert so dass f^{-1} nicht stetig in y_0 ist. Dann existiert eine Folge $y_1, y_2, \ldots \in Y$ mit $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$ so dass gilt:

$$f^{-1}(y_n) \text{ strebt nicht gegen } f^{-1}(y_n). \tag{3}$$

Es gilt $y_n < y_0$ für unendlich viele verschiede Indizes n oder $y_n > y_0$ für unendlich viele verschiede Indizes n. Also können wir eine Teilfolge (y_{n_k}) auswählen so dass alle Elemente dieser Teilfolge auf einer Seite von y_0 liegen, z.B. $y_{n_k} < y_0$ für alle k. Aus dieser Teilfolge können wir eine monoton wachsende Teilfolge auswählen (die wir der Einfachheit halber wieder mit (y_{n_k}) bezeichnen), also

$$y_{n_1} \leq y_{n_2} \leq \ldots \leq y_{n_k} < y_0.$$

Wegen der Monotonie von f folgt

$$f^{-1}(y_{n_1}) \leq f^{-1}(y_{n_2}) \leq \ldots \leq f^{-1}(y_{n_k}) < f^{-1}(y_0).$$

Also ist die Folge $(f^{-1}(y_{n_k}))$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent: Es existiert ein

$$x_0 \geq f^{-1}(y_{n_k}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

mit

$$f^{-1}(y_{n_1}) \leq f^{-1}(y_{n_2}) \leq \ldots \leq f^{-1}(y_{n_k}) \to x_0 \leq f^{-1}(y_0) \text{ für } k \to \infty. \tag{5}$$

Wegen (3) gilt $x_0 \neq f^{-1}(y_0)$, und deshalb liefert (5) $x_0 < f^{-1}(y_0)$. Weil der Definitionsbereich von f ein Intervall ist und weil $f^{-1}(y_1) \leq x_0 < f^{-1}(y_0)$ gilt, ist x_0 im Definitionsbereich von f. Also folgt wegen der Monotonie $f(x_0) < y_0$. Wegen $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$ folgt daraus $f(x_0) < y_n$ für alle großen Indizes n, d.h. $x_0 < f(y_n)$ für alle großen Indizes n. Das widerspricht aber (4).