Musterlösungen zur Serie 6: Extrema ohne Nebenbedingungen

1. Aufgabe Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \quad f(x,y) := 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2,$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \quad f(x,y) := 3x^2y - x^3 - y^4,$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \quad f(x,y,z) := 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$

Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

Lösung für (a) Es ist

$$\nabla f(x,y) = \left(8x^3 - 4x,\ 4y^3 - 4y\right).$$

Ein lokales Extremum erfüllt die notwendige Bedingung $\nabla f(x,y) = 0$, daher kommen nur die Punkte $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm 1)$ und $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \mp 1)$ als lokale Extrema in Frage. Die Hesse-Matrix für f ist

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

Wegen

$$\det H_f(0,\pm 1) = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{und} \quad \det H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = \det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} < 0$$

sind die Punkte $(0,\pm 1)$ und $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ Sattelpunkte und folglich keine lokalen Extrema. Wegen

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4 < 0$$

ist der Punkt $(0,0)$ ein lokales Maximum. Und schließlich sind die Punkte $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm 1\right)$ und $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \mp 1)$ lokale Minima, denn in diesen Punkten gilt

$$\det H_f = \det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 > 0.$$

Lösung für (b) Es ist

$$\nabla f(x,y) = \left(6xy - 3x^2,\ 3x^2 - 4y^3\right)$$

und

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6(y-x) & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y)=0$ und damit die potentiallen lokalen Extrema sind $x=y=0$ und $x=6, y=3$. Der Punkt $(6,3)$ ist ein lokales Maximum wegen

$$\det H_f(6,3)) = \det \begin{bmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{bmatrix} > 0 \;\text{ und }\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,3) = -18 < 0.$$

Wegen $\det H_f(0,0) = 0$ arbeitet das Sylvester-Kriterium für den Punkt $(0,0)$ nicht. Aber z.B. die Reduktion $f(x,0) = -x^3$ von f auf die x-Achse zeigt, dass beliebig nahe an dem Punkt $(0,0)$ Punkte mit positiven f-Werten und andere mit negativen f-Werten existieren, d.h. dass $(0,0)$ kein lokales Extremum ist.

Lösung für (c) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = \big(4x - y + 2z,\ 3y^2 - x - 1,\ 2(x+z)\big)$$

und

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$ und damit die potentiallen lokalen Extrema sind

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = -\frac{1}{3}$$

und

$$x = -\frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}.$$

Der erste Punkt ist ein lokales Minimum weil die drei Hauptminore der Matrix

$$H_f(1/3, 2/3, -1/3)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

positiv sind:

$$4 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 15 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 > 0.$$

Der zweite Punkt ist ein kein lokales Extremum weil die Matrix

$$H_f(-1/4, -1/2, 1/4)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

indefinit ist:

$$4 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -13 < 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -14 < 0.$$

2. Aufgabe Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Menge

$$\{\sin x + \sin y - \sin(x+y) : \ 0 \le x \le 2\pi, \ 0 \le y \le 2\pi - x\}.$$

Lösung Kandidaten für lokale Extrema, die nicht Randpunkte des Definitionsbereiches von f sind, sind die Lösungen von

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \cos x - \cos(x+y) & = & 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \cos y - \cos(x+y) & = & 0, \end{array}\right\} \ 0 < x < 2\pi, \ 0 < y < 2\pi - x. \tag{1}$$

Das System (1) ist äquivalent zu

$$\cos x = \cos y, \tag{2}$$
$$\cos x = \cos(x+y). \tag{3}$$

Die Lösungen von (2) mit $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi - x$ sind

$$x = y \in \,]0, 2\pi[\quad \text{oder} \quad y = 2\pi - x, \ x \in \,]0, 2\pi[.$$

Das in (3) eingesetzt ergibt $\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ oder $\cos x = \cos 2\pi$, also $\cos x = -\frac{1}{2}$ oder $\cos x = 1$, d.h. $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = 0$ oder $x = 2\pi$. Also existiert genau eine Lösung von (1) nämlich

$$(x,y) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right).$$

Die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ lautet

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x + \sin(x+y) & \sin(x+y) \\ \sin(x+y) & -\sin y + \sin(x+y) \end{bmatrix},$$

also

$$H_f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist negativ definit (nach dem Sylvester Kriterium). Also ist $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ lokales Maximum mit $f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
Andererseits ist $f(x,y) = 0$ für alle Randpunkte (x,y) des Definitionsbereiches von f. Also: Wenn das globale Maximum in einem Punkt (x,y) angenommen wird, so kann (x,y) nicht Randpunkt des Definitionsbereiches von f sein, muß also Lösung von (1) sein, also $(x,y) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$.
Fazit: Das globale Maximum ist $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ und wird in genau einem Punkt, nämlich $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ angenommen.

Das globale Minimum ist Null und wird in allen Randpunkten des Definitionsbereiches und nirgendwo anders angenommen. Wäre es kleiner als Null, so gäbe es einen inneren Punkt

$(x, y) \neq (\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ des Definitionsbereichs, welcher Lösung von (1) wäre. Das geht nicht.

***Aufgabe** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, und es gelte $\det f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R} \tag{4}$$

keine lokalen Maxima besitzt. Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in $\mathbb{R}^3$.

Lösung Es sei das Gegenteil der Fall, d.h ein Punkt $x_0 \in U$ sei ein lokales Maximum der Funktion (4). Dann existiert eine Kugel $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$ um x_0 mit einem Radius $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| \text{ für alle } x \in K(x_0, \varepsilon). \tag{5}$$

Wegen der Voraussetzung $\det f'(x_0) \neq 0$ arbeitet der Satz über den lokalen Diffeomorphismus für f in x_0, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ so dass gilt

$$\text{für alle } y \in K(f(x_0), \delta) \text{ existiert ein } x \in K(x_0, \varepsilon) \text{ mit } f(x) = y. \tag{6}$$

Wenn $f(x_0) = 0$ wäre, so würde aus (5) folgen $f(x) = 0$ für alle $x \in K(x_0, \varepsilon)$, und das wäre ein Widerspruch zu (6). Also ist $f(x_0) \neq 0$.
Es sei nun $1 < s < 1+\delta$. Dann ist $sf(x_0) \in K(f(x_0), \delta)$. Wegen (6) existiert ein $x \in K(x_0, \varepsilon)$ mit $f(x) = sf(x_0)$. Daraus folgt

$$\|f(x)\| = \|sf(x_0)\| = s\|f(x_0)\| > \|f(x_0)\|.$$

Das ist ein Widerspruch zu (5).