Analysis für Lehramtsstudiengänge

Ein Kompendium zur Vorlesung von L. Recke

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**

1.1 Mengen . . . 3

1.1.1 Untermengen . . . 4

1.1.2 Operationen mit Mengen . . . 4

1.2 Abbildungen . . . 5

1.2.1 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität . . . 6

1.2.2 Einschränkung und Fortsetzung . . . 6

1.2.3 Superposition und inverse Abbildung . . . 6

1.2.4 Bilder und Urbilder von Mengen bzgl. einer Abbildung . . . 7

1.3 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen . . . 7

2 Reelle Zahlen **8**

2.1 Die Körperaxiome . . . 8

2.2 Die Ordnungsaxiome . . . 10

2.3 Das Archimedische Axiom . . . 11

2.4 Das Intervallschachtelungsaxiom. Supremum und Infimum . . . 12

3 Folgen **13**

3.1 Rechenregeln für konvergente Folgen . . . 13

3.2 Monotone Folgen . . . 14

3.3 Häufungspunkte von Folgen. Der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 14

3.4 Das Konvergenzkriterium von Cauchy . . . 15

3.5 Uneigentliche Grenzwerte . . . 15

4 Reihen 16

4.1 Das Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen 17

4.2 Kriterien für absolute Konvergenz 17

4.3 Umordnungen und Produkte von Reihen 18

5 Grenzwerte von Funktionen 19

6 Stetige Funktionen 21

6.1 Stetige Funktionen auf Intervallen: Der Zwischenwertsatz 22

6.2 Maxima und Minima stetiger Funktionen 23

6.3 Gleichmäßige Stetigkeit 23

7 Einige elementare Funktionen 23

7.1 Exponentialfunktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen 23

7.2 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen 25

7.2.1 Bogenlänge 25

7.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens 26

7.2.3 Die inversen trigonometrischen Funktionen 27

8 Folgen und Reihen von Funktionen. Potenzreihen 27

8.1 Gleichmäßige Konvergenz 27

8.2 Potenzreihen 27

8.3 Komplexe Potenzreihen 29

8.4 Die komplexe Exponentialfunktion und die Eulersche Formel 30

9 Differentialrechnung 31

9.1 Differenzierbarkeit und Ableitung 31

9.2 Höhere Ableitungen. Kurvendiskussionen 33

10 Integralrechnung 36

10.1 Integrierbarkeit und bestimmtes Integral 36

10.2 Rechenregeln 37

10.3 Stammfunktionen und Integrationsregeln. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 38

10.4 Numerische Integration 39

11 Einführung in die mehrdimensionale Differentialrechnung 40

11.1 Euklidisches Skalarprodukt und Euklidische Norm 40

11.2 Vektorfolgen und ihre Konvergenz 40

11.3 Abgeschlossene und offene Mengen. Randpunkte 42

11.4 Grenzwerte und Stetigkeit vektorwertiger Abbildungen mehrerer Variabler . . . 43

11.5 Der Banachsche Fixpunktsatz 44

11.6 Differenzierbarkeit und Ableitung vektorwertiger Abbildungen mehrerer Variabler 45

11.7 Der Satz über implizite Funktionen 49

11.8 Höhere partielle Ableitungen und lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler 50

12 Einführung in die mehrdimensionale Integralrechnung 52

12.1 Integrierbarkeit und Integral 52

12.2 Rechenregeln 54

12.3 Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini 55

12.4 Transformationsformel 56

13 Einführung in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen 56

13.1 Anfangswertaufgaben 56

13.2 Gleichungen mit getrennten Variablen 57

13.3 Lineare Gleichungen und Systeme 58

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Die Mengen der natürlichen, der ganzen bzw. der rationalen Zahlen werden mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

1.1.1 Untermengen

Wenn eine Menge X Untermenge einer Menge Y ist, d.h. wenn für alle $x \in X$ gilt $x \in Y$, so schreibt man $X \subset Y$.

Axiom der vollständigen Induktion Wenn eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ die Eigenschaften

$$1 \in \mathbb{N} \text{ (“Indutionsanfang”)}$$

und

$$\text{wenn } n \in M, \text{ dann auch } n+1 \in M \text{ (“Indutionsschritt”)}$$

besitzt, dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Definition: Binomialkoeffizienten Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Satz über das Pascalsche Dreieck Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Satz über die Anzahl von Untermengen endlicher Mengen Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, , \ldots, n\}$. Dann besitzt die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ genau 2^n verschiedene Untermengen und genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Untermengen. Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

1.1.2 Operationen mit Mengen

Definitionen: Operationen mit zwei Mengen Für Mengen X und Y definiert man ihre Vereinigung, ihren Durchschnitt, ihre Differenz und ihr kartesisches Produkt durch

$$\begin{aligned}
X \cup Y &:= \{x : \; x \in X \text{ oder } x \in Y\}, \\
X \cap Y &:= \{x : \; x \in X \text{ und } x \in Y\}, \\
X \setminus Y &:= \{x : \; x \in X \text{ und } x \notin Y\}, \\
X \times Y &:= \{(x, y) : \; x \in X \text{ und } y \in Y\}.
\end{aligned}$$

Satz: Rechenregeln für Mengenoperationen Für beliebige Mengen $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ und Z gilt

$$\begin{array}{rcl}
X \cup (Y \cap Z) & = & (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \\
X \cap (Y \cup Z) & = & (X \cap Y) \cup (X \cap Z), \\
(X \cup Y) \setminus Z & = & (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z), \\
(X \cap Y) \setminus Z & = & (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z), \\
X \setminus (Y \cup Z) & = & (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z), \\
X \setminus (Y \cap Z) & = & (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z), \\
(X \cap \tilde{X}) \times Y & = & (X \times Y) \cap (\tilde{X} \times Y), \\
(X \cup \tilde{X}) \times Y & = & (X \times Y) \cup (\tilde{X} \times Y), \\
(X \times Y) \cap (\tilde{X} \times \tilde{Y}) & = & (X \cap \tilde{X}) \times (Y \cap \tilde{Y}), \\
(X \times Y) \cup (\tilde{X} \times \tilde{Y}) & \subset & (X \cup \tilde{X}) \times (Y \cup \tilde{Y}).
\end{array}$$

Definitionen: Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler Mengen Es seien eine Menge A sowie für jedes $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben. Dann heißen die Mengen

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x : \text{ Es existiert ein } \alpha \in A \text{ mit } x \in X_\alpha.\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x : \text{ Für alle } \alpha \in A \text{ gilt } x \in X_\alpha.\}$$

Vereinigung und Durchschnitt der Mengenfamilie $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, und es gelten Rechenregeln, die analog zu den obigen sind.

1.2 Abbildungen

Wenn eine Abbildung f eine Menge X in eine Menge Y abbildet, so schreibt man $f: X \to Y$. Die Mengen X bzw. Y heißen dann Definitionsbereich bzw. Wertebereich der Abbildung f. Bisweilen wird auch die Menge

$$\{f(x) : x \in X\},$$

also eine Untermenge von Y, die möglicherweise ungleich Y ist, Wertebereich (oder Bildmenge) von f genannt.

Satz über die Anzahl verschiedener Abbildungen zwischen endlichen Mengen Es seien m und n natürliche Zahlen. Dann existieren genau n^m verschiedene Abbildungen von der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$ in die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definition: Graph einer Abbildung Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt die Menge

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

Graph von f.

1.2.1 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Definitionen Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
(i) Wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, daß $x_1 = x_2$ ist, so heißt f injektiv (oder eineindeutig).
(ii) Wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$, so heißt f surjektiv (oder Abbildung auf Y).
(iii) Wenn f injektiv und surjektiv ist, so heißt f bijektiv (oder eineindeutige Abbildung auf Y).

Satz über die Anzahl der Permutationen n-ter Ordnung Es sei n eine natürliche Zahl. Dann existieren genau

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

verschiedene bijektive Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich.

1.2.2 Einschränkung und Fortsetzung

Definitionen Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
(i) Wenn Z eine Untermenge des Definitionsbereiches X ist, so heißt die Abbildung $g : Z \to Y$, die definiert ist durch $g(z) := f(z)$ für alle $z \in Z$, Einschränkung von f auf Z, und man schreibt $f|_Z := g$.
(ii) Wenn Z eine Menge ist, in der der Definitionsbereich X eine Untermenge ist, so heißt eine Abbildung $g : Z \to Y$, für die $g|_X = f$ gilt, Fortsetzung von f auf Z.

1.2.3 Superposition und inverse Abbildung

Definition: Superposition Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $h : X \to Z$, die definiert ist durch $h(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$, Superposition von f und g, und man schreibt $g \circ f := h$.

Satz und Definition: Inverse Abbildung Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) Die Abbildung f ist bijektiv.
(ii) Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y \in Y$ genau eine Lösung $x \in X$.
(iii) Es existiert genau eine Abbildung $g : Y \to X$, so daß $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$ und daß $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in Y$ gilt. Die Abbildung g heißt dann inverse Abbildung zur Abbildung f, und man schreibt $f^{-1} := g$.

Satz über die inverse Abbildung einer Superposition Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ auch bijektiv, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Satz über den Graphen der inversen Abbildung Es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann liegt ein Tupel $(y, x) \in Y \times X$ genau dann im Graphen von f^{-1}, wenn das Tupel (x, y) im Graphen von f liegt. Wenn insbesondere X und Y Untermengen von $\mathbb{R}$ sind, so ist der Graph von f^{-1} die Spiegelung bezüglich der Geraden $y = x$ des Graphen von f.

1.2.4 Bilder und Urbilder von Mengen bzgl. einer Abbildung

Definitionen Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
(i) Wenn X_0 eine Untermenge des Definitionsbereiches X ist, so heißt die Menge

$$f(X_0) := \{y \in Y : \text{ Es existiert ein } x \in X_0 \text{ mit } f(x) = y.\}$$

Bild von X_0 bzgl. f.
(ii) Wenn Y_0 eine Untermenge des Wertebereiches Y ist, so heißt die Menge

$$f^{-1}(Y_0) := \{x \in X : f(x) \in Y_0\}$$

Urbild von Y_0 bzgl. f.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Wenn $f : X \to Y$ bijektiv ist, so gilt

$$\{x \in X : f(x) \in Y_0\} = \{f^{-1}(y) : y \in Y_0\} \tag{1.1}$$

für jede Untermenge $Y_0 \subset Y$. Mit anderen Worten: Wenn f bijektiv ist, so kann man das Symbol $f^{-1}(Y_0)$ als Urbild von Y_0 bzgl. der Abbildung f (linke Seite in (1.1)) auffassen oder als Bild von Y_0 bzgl. der Abbildung f^{-1} (rechte Seite in (1.1)), beide Auffassungen führen zu demselben Ergebnis.

Satz: Rechenregeln Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
X_0 &\subset f^{-1}(f(X_0)) \text{ für alle } X_0 \subset X,\\
f(f^{-1}(Y_0)) &\subset Y_0 \text{ für alle } Y_0 \subset Y,\\
f(X_1)) &\subset f(X_2) \text{ für alle } X_1 \subset X_2 \subset X,\\
f^{-1}(Y_1)) &\subset f^{-1}(Y_2) \text{ für alle } Y_1 \subset Y_2 \subset Y,\\
f(X_1)) \cup f(X_2) &= f(X_1 \cup X_2) \text{ für alle } X_1, X_2 \subset X,\\
f(X_1 \cap X_2) &\subset f(X_1)) \cap f(X_2) \text{ für alle } X_1, X_2 \subset X \text{ mit } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset,\\
f^{-1}(Y_1)) \cup f^{-1}(Y_2) &= f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \text{ für alle } Y_1, Y_2 \subset Y,\\
f^{-1}(Y_1)) \cap f^{-1}(Y_2) &= f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \text{ für alle } Y_1, Y_2 \subset Y \text{ mit } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

1.3 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Definitionen
(i) Eine Menge heißt endlich, wenn sie endlich viele Elemente besitzt.
(ii) Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.

(iii) Eine Menge X heißt abzählbar, wenn eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf X existiert.
(iv) Eine unendliche Menge heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

Satz Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Satz von Cantor Zwischen einer Menge und der Menge ihrer Untermengen kann keine bijektive Abbildung existieren. Folglich ist z.B. die Menge aller Untermengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar.

2 Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Wir setzen voraus, daß bekannt ist, wie die Summe und das Produkt zweier reller Zahlen definiert sind, wie die Ordnung zwischen zwei reller Zahlen definiert ist und daß die Menge der rationalen Zahlen eine Untermenge der Menge der reellen Zahlen ist. Wir zählen im folgenden die grundlegenden, die Menge der reellen Zahlen in gewissem Sinn eindeutig charakterisierenden Eigenschaften (ihre sogenannten "Axiome") sowie wesentliche, aus den Axiomen folgende Eigenschaften auf. Dabei betrachten wir nicht solche wichtigen Fragen wie:

- Existiert überhaupt eine Menge, die alle unten aufgeführten Axiome erfüllt (oder widersprechen sich vielleicht einige dieser Axiome)?
- Sind alle Mengen, die alle unten aufgeführten Axiome erfüllen, in gewissem Sinn gleich? Wenn ja, in welchem Sinn?
- Kann man Mengen, die alle unten aufgeführten Axiome erfüllen, "konstruieren"? Wenn ja, woraus und wie?
- Ist die Menge der rationalen Zahlen in gewissem Sinn Untermenge jeder Menge, die alle unten aufgeführten Axiome erfüllt? Wenn ja, in welchem Sinn?

2.1 Die Körperaxiome

Die Operationen "Addition" und "Multiplikation" erfüllen folgende Axiome:

(I) Assoziativität der Addition Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$. Deshalb kann man dafür einfach $x + y + z$ schreiben.

(II) Kommutativität der Addition Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$.

(III) Existenz des Nullelements Es existiert ein Element in $\mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Die Summe aus x und diesem Element ist gleich x. Dieses Element ist wegen dem Axiom (II) eindeutig bestimmt, es wird Null genannt und mit dem Symbol 0 bezeichnet.

(IV) Existenz des inversen bzgl. der Addition Elements Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element in $\mathbb{R}$, so daß gilt: Die Summe aus x und diesem Element ist gleich 0. Dieses Element ist eindeutig bestimmt (wie man mit Hilfe der Axiome (I)-(III) beweisen kann), es wird “minus x” genannt und mit dem Symbol $-x$ bezeichnet.

(V) Assoziativität der Multiplikation Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x(yz) = (xy)z$. Deshalb kann man dafür einfach xyz schreiben.

(VI) Kommutativität der Multiplikation Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = yx$.

(VII) Existenz des Einselements Es existiert ein Element in $\mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Das Produkt aus x und diesem Element ist gleich x. Dieses Element ist wegen dem Axiom (VI) eindeutig bestimmt, es wird Eins genannt und mit dem Symbol 1 bezeichnet.

(VIII) Existenz des inversen bzgl. der Multiplikation Elements Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein Element in $\mathbb{R}$, so daß gilt: Das Produkt aus x und diesem Element ist gleich 1. Dieses Element ist eindeutig bestimmt (wie man mit Hilfe der anderen Axiome beweisen kann) und wird mit dem Symbol x^{-1} bezeichnet.

(IX) Distributivität von Addition und Multiplikation Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x(y+z) = xy + xz$.

(X) Es gilt $0 \neq 1$.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Jede Menge mit einer Addition und einer Multiplikation, die die obigen Axiome (I)-(X) erfüllt, heißt Körper. Die Menge der rellen Zahlen mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation ist also ein Körper. Die Menge der komplexen Zahlen mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation (vgl. Kapitel 8) ist ebenfalls ein Körper. Es existieren auch Körper, die nur endlich viele verschiedene Elementen besitzen.

Lemma: Unmittelbare Folgerungen aus den Körperaxiomen
(i) Es gilt $-0 = 0$ und $1^{-1} = 1$.
(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$ und $(-1)x = -x$.
(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$ und $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.
(iv) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(x + y) = -x + (-y)$ und $-(xy) = (-x)y = x(-y)$.
(v) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
(vi) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
(vii) Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_2 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ gilt

$$x_1x_2^{-1} + y_1y_2^{-1} = (x_1y_2 + x_2y_1)(x_2y_2)^{-1}. \tag{2.1}$$

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ schreibt man anstelle von $x + (-y)$ auch $x - y$. Mit dieser Bezeichnungsweise geht z.B. die obige Rechenregel (iv) über in $-(x + y) = -x - y$. Analog schreibt man, falls $y \neq 0$ ist, anstelle von xy^{-1} auch $\frac{x}{y}$. Dann nimmt z.B. die Formel (2.1) die folgende Form an:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2y_2}.$$

Definitionen: Potenzen mit ganzzahligen Exponenten
(i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man $x^n := x \cdot x \cdots x$ (n Faktoren).

(ii) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ definiert man $x^0 := 1$.
(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ definiert man $x^{-n} := (x^n)^{-1}$.

Lemma: Rechenregeln für Potenzen Für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ (x, y so daß die folgenden Potenzen definiert sind) gilt $x^m x^n = x^{m+n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$ und $(xy)^n = x^n y^n$.

Satz: Formel für die geometrische Summe Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Satz: Binomische Formel Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Satz: Lagrange-Identität Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{1 \le j < k \le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2.$$

2.2 Die Ordnungsaxiome

Die Ordnung "kleiner oder gleich" erfüllt folgende Axiome:

(XI) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \le y$ oder $y \le x$.

(XII) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ und $y \le x$ gilt $x = x$.

(XIII) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ und $y \le z$ gilt $x \le z$.

(XIV) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ gilt $x + z \le y + z$.

(XV) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x$ und $0 \le y$ gilt $0 \le xy$.

Bemerkungen zur Bezeichnungsweise Anstelle von $x \le y$ schreibt man auch $y \ge x$. Wenn $x \neq y$ und $x \le y$ (bzw. $x \ge y$) ist, so schreibt man $x < y$ (bzw. $x > y$). Wenn $x > 0$ (bzw. $x \ge 0$ bzw. $x < 0$ bzw. $x \le 0$) gilt, so heißt x positiv (bzw. nichtnegativ bzw. negativ bzw. nichtpositiv).

Lemma: Unmittelbare Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen
(i) Es gilt $0 < 1$.
(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \ge 0$.
(iii) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ gilt: Wenn $z \ge 0$ ist, so folgt $xz \le yz$, und wenn $z \le 0$ ist, so folgt $xz \ge yz$.
(iv) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \le y$ gilt $0 < 1/y \le 1/x$.

(v) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $x < (x+y)/2 < y$.
(vi) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Satz: Bernoullische Ungleichung Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Definitionen: Maximum und Minimum Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$, und für alle $x \in X$ gelte $x_0 \geq x$ (bzw. $x_0 \leq x$). Dann heißt x_0 Maximum (bzw. Minimum) von X, und man schreibt $\max X := x_0$ (bzw. $\min X := x_0$).

Satz: Arithmetisches und geometrisches Mittel Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Definition: Betrag Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet man mit

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

den Betrag von x.

2.3 Das Archimedische Axiom

(XVI) Für alle $x > 0$ und $y \geq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq y$.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Jede Menge mit einer Addition, einer Multiplikation und einer Ordnung, die die obigen Axiome (I)-(XVI) erfüllt, heißt Archimedisch geordneter Körper. Die Menge der reellen Zahlen mit der üblichen Addition, der üblichen Multiplikation und der üblichen Ordnung ist also ein Archimedisch geordneter Körper. Die Menge der rationalen Zahlen mit der derselben Addition, derselben Multiplikation und derselben Ordnung ist ebenfalls ein Archimedisch geordneter Körper.

Satz über die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$ (und folglich existieren unendlich viele verschiedene solche z).

Satz und Definition: Ganzer Anteil Für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt die Menge $\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leq x\}$ ein Maximum, dieses Maximum wird als ganzer Anteil von x bezeichnet, und man schreibt

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leq x\}.$$

2.4 Das Intervallschachtelungsaxiom. Supremum und Infimum

Definitionen: Intervalle Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ definiert man das abgeschlossene Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

das offene Intervall

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

die halboffenen Intervalle

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{aligned}$$

sowie die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}. \end{aligned}$$

(XVII) Für alle Folgen (a_n) und (b_n) reeller Zahlen mit

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq x \leq b_n$. Mit anderen Worten: Für jede Folge ineinandergeschachtelter abgeschlossener Intervalle

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Jede Menge mit einer Addition, einer Multiplikation und einer Ordnung, die die obigen Axiome (I)-(XVII) erfüllt, heißt vollständiger Archimedisch geordneter Körper. Die Menge der rellen Zahlen ist also ein vollständiger Archimedisch geordneter Körper, in gewissem Sinn sogar der einzige.

Satz Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Definitionen: Nach oben beschränkte, nach unten beschränkte und beschränkte Mengen
(i) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt $x \leq c$ (bzw. $x \geq c$). Die Zahl c heißt dann obere (bzw. untere) Schranke von X.
(ii) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz und Definitionen: Supremum und Infimum Es sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. nach unten) beschränkt. Dann existiert in der Menge der oberen (bzw. unteren) Schranken von X ein Minimum (bzw. ein Maximum). Diese kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von X heißt Supremum (bzw. Infimum) von X und wird mit $\sup X$ (bzw. $\inf X$) bezeichnet.

Bemerkung: Verhältnis von Maximum und Supremum (bzw. von Minimum und Infimum) Es sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, dann gilt: Die Menge X besitzt ein Maximum (bzw. ein Minimum) genau dann, wenn $\sup X$ (bzw. $\inf X$) in X liegt, und dann ist $\max X = \sup X$ (bzw. $\min X = \inf X$).

Satz über die Nicht-Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$ Die Menge der rationalen oberen Schranken von $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ist nicht leer, besitzt aber kein Minimum.

3 Folgen

Definitionen: Konvergenz, Divergenz und Beschränktheit
(i) Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heißt konvergent, wenn ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt:

$$\text{Wenn } n > n_0 \text{ ist, dann ist } |x_n - x| < \varepsilon.$$

Die Zahl x heißt dann Grenzwert der Folge (x_n), und man schreibt $x_n \to x$ für $n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
(ii) Eine Folge (x_n) heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.
(iii) Eine Folge (x_n) heißt beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle n gilt $|x_n| \leq c$.

Lemma: Elementare Eigenschaften konvergenter Folgen
(i) Eine konvergente Folge kann nicht zwei verschieden Grenzwerte besitzen.
(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3.1 Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz: Konvergenz und algebraische Operationen Es seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen, dann gilt:
(i) Die Folgen $(x_n + y_n)$ und $(x_n y_n)$ sind ebenfalls konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_0$ gilt $y_n \neq 0$. Ferner ist die Folge (x_n/y_n) konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Satz: Konvergenz und Ungleichungen Es seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen, und für alle n gelte $x_n \leq y_n$. Dann folgt:
(i) $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$
(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Ferner sei (z_n) eine Folge reeller Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$. Dann konvergiert auch (z_n), und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

3.2 Monotone Folgen

Definition
(i) Eine Folge (x_n) heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle n gilt $x_n \leq x_{n+1}$ (bzw. $x_n \geq x_{n+1}$).
(ii) Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Satz Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent.

Satz über die Dezimalbruchzerlegung
(i) Zu jedem $x \geq 0$ existiert genau eine Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, so daß gilt:

$$\xi_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ und } \xi_n \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ für alle } n > 0, \tag{3.1}$$

$$\text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } n > m \text{ mit } \xi_n \neq 9, \tag{3.2}$$

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\xi_j}{10^j}. \tag{3.3}$$

Dabei ist ξ_0 der ganze Anteil von x, d.h. $\xi_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, und ξ_{n+1} ist der ganze Anteil von $10^{n+1}x - 10^n\xi_1 - \ldots - 10\xi_n$.
(ii) Zu jeder Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ mit (3.1) und (3.2) existiert genau ein $x \in [\xi_0, \xi_0 + 1)$ mit (3.3).

3.3 Häufungspunkte von Folgen. Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz und Definition: Häufungspunkte Es seien (x_n) eine Folge und x eine reelle Zahl, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) Es existiert eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $x_{n_j} \to x$ für $j \to \infty$.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele verschiedene $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$.
Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist (und folglich beide Bedingungen erfüllt sind), so heißt die Zahl x Häufungspunkt der Folge (x_n).

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge und folglich einen Häufungspunkt.

Satz und Definitionen: Limes Superior und Limes Inferior Die Menge aller Häufungspunkte einer beschränkten Folge (x_n) besitzt ein Maximum (bzw. ein Minimum).

Dieses Maximum (bzw. Minimum) wird Limes superior (bzw. Limes inferior) von (x_n) genannt und mit

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{oder} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \left(\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{oder} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right)$$

bezeichnet. Dabei gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \quad \left(\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}\right).$$

Lemma: Äquivalente Charakterisierung von Limes superior und Limes inferior
(i) Eine reelle Zahl x ist der Limes superior einer Folge (x_n) genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele verschiedene n mit $x_n > x - \varepsilon$ und höchstens endlich viele n mit $x_n > x + \varepsilon$ existieren.
(ii) Eine reelle Zahl x ist der Limes inferior einer Folge (x_n) genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele verschiedene n mit $x_n < x + \varepsilon$ und höchstens endlich viele n mit $x_n < x - \varepsilon$ existieren.

Lemma: Verhältnis von Grenzwert, Limes superior und Limes inferior Es sei (x_n) eine Folge. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) Die Folge (x_n) konvergiert.
(ii) Jede Teilfolge von (x_n) konvergiert.
(iii) Die Folge (x_n) ist beschränkt, und ihr Limes superior ist gleich ihrem Limes inferior.
Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist (und folglich alle Bedingungen erfüllt sind), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

3.4 Das Konvergenzkriterium von Cauchy

Satz Es sei (x_n) eine Folge. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) Die Folge (x_n) ist konvergent.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m, n > n_0$ gilt $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Fundamentalfolgen Folgen, die die obige Bedingung (ii) erfüllen, heißen Fundamentalfolgen oder Cauchy-Folgen. Daß zwei verschieden Sprechweisen (nämlich "(x_n) ist konvergent" und "(x_n) ist Fundamentalfolge") für ein und denselben Sachverhalt existieren, ist folgendermaßen begründet: Sowohl die Bezeichnung "(x_n) ist konvergent" als auch die Bezeichnung "(x_n) ist Fundamentalfolge" benutzt man auch für Folgen, deren Folgenglieder nicht reelle Zahlen, sondern kompliziertere Objekte (z.B. Funktionen) sind, und dann können auch Fundamentalfolgen existieren, die nicht kovergent sind.

3.5 Uneigentliche Grenzwerte

Definition Eine Folge (x_n) konvergiert gegen Unendlich (bzw. gegen minus Unendlich) und man schreibt $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ oder $x_n \to -\infty$

für $n \to \infty$), wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt:

$$\text{Wenn } n > n_0 \text{ ist, dann ist } x_n > a \text{ (bzw. } x_n < a).$$

Satz: Uneigentliche Grenzwerte und algebraische Operationen Es seien (x_n) und (y_n) zwei Folgen, dann gilt:
(i) Wenn (x_n) einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ besitzt und (y_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) strebt, so strebt auch $(x_n + y_n)$ gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), und $(x_n y_n)$ strebt gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), wenn $x > 0$ ist, oder gegen minus Unendlich (bzw. Unendlich), wenn $x < 0$ ist. Ferner konvergiert (x_n/y_n) gegen Null.
(ii) Wenn sowohl (x_n) als auch (y_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) streben, so strebt auch $(x_n + y_n)$ gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), und $(x_n y_n)$ strebt gegen Unendlich.
(iii) Wenn (x_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) strebt und (y_n) gegen minus Unendlich (bzw. Unendlich) , so strebt $(x_n y_n)$ gegen minus Unendlich.
(iv) Wenn (x_n) gegen Null konvergiert und für alle n gilt $x_n > 0$ (bzw. $x_n < 0$), so strebt $(1/x_n)$ gegen Unendlich (bzw. gegen minus Unendlich).

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Um die etwas umständlichen Formulierungen der obigen Rechenregeln zu vermeiden, benutzt man bisweilen die folgenden, rein formalen Schreibweisen: $x + (\pm\infty) = \pm\infty$; $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, falls $x > 0$; $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, falls $x < 0$; $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$; $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty$; $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$, $1/(+0) = \infty$; $1/(-0) = -\infty$.

Bemerkung: Unbestimmte Ausdrücke Wenn (x_n) gegen Unendlich strebt und (y_n) gegen minus Unendlich, so kann mit der Folge $(x_n + y_n)$ "alles" passieren: Sie kann gegen eine beliebig vorgegebene reelle Zahl konvergieren oder auch divergieren. Wenn sie divergiert, so kann sie gegen Unendlich streben oder gegen minus Unendlich oder auch keines von beidem. Analog kann "alles" mit der Folge $(x_n y_n)$ passieren, wenn (x_n) gegen Null konvergiert und (y_n) gegen Unendlich oder gegen minus Unendlich strebt. Schließlich kann auch "alles" mit der Folge (x_n/y_n) passieren, wenn (x_n) und (y_n) gegen Null konvergieren (und $y_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$) oder wenn (x_n) und (y_n) gegen Unendlich oder gegen minus Unendlich streben.

4 Reihen

Definitionen Es sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann nennt man die Folge

$$\left(\sum_{n=0}^{m} x_n \right)_{m=0}^{\infty}$$

Reihe mit den Summanden x_n, und man schreibt dafür $\sum x_n$. Die Summen $\sum_{n=0}^{m} x_n$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) heißen Partialsummen der Reihe $\sum x_n$, d.h. eine Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen. Wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, so heißt der entsprechende Grenzwert Summe der Reihe $\sum x_n$, und man schreibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} x_n.$$

Bemerkungen zur Bezeichnungsweise (i) Häufig wird anstelle von $\sum x_n$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ geschrieben, d.h. das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ wird sowohl für die Reihe (also eine Folge von Partialsummen, die konvergieren kann oder nicht) als auch für deren Summe (also eine Zahl, die existiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert) benutzt.
(ii) Es seien (x_n) eine Folge reeller Zahlen und k eine fixierte natürliche Zahl. Dann hängt es nicht von den Folgengliedern $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ab, ob die Folge (x_n) konvergiert und welchen Grenzwert sie gegebenfalls besitzt.
Bei Reihen ist das anders: Ob eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert, hängt nicht von den Summanden $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ab, wohl aber die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Deshalb muß man sorgfältig angeben, welcher Summand der erste in der Reihe sein soll und welche Zahlen der Summationsindex n durchlaufen soll (in den meisten Fällen alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ oder $n \geq 1$).

Satz: Cauchy-Kriterium Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n > n_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big|\sum_{j=n}^{n+m} x_j\Big| < \varepsilon.$$

Folgerung: Ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für Konvergenz Wenn eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

4.1 Das Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen

Satz Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist und wenn für alle n gilt $x_n x_{n+1} < 0$ (d.h. die Summanden haben abwechselndes Vorzeichen) und $|x_n| \geq |x_{n+1}|$ (d.h. die Beträge der Summanden bilden eine monoton fallende Nullfolge).

4.2 Kriterien für absolute Konvergenz

Definition: Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum |x_n|$ ihrer Beträge konvergiert.

Satz: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert, wenn sie absolut konvergiert, und dann gilt

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

Satz: Majorantenkriterium Es seien eine Reihe $\sum x_n$ und eine konvergente Reihe $\sum y_n$ gegeben, und es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_0$ gilt $|x_n| \leq y_n$. Dann ist die Reihe

$\sum x_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Satz: Wurzelkriterium Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert absolut, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\text{Es existieren } a < 1 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so daß für alle } n > n_0 \text{ gilt } \sqrt[n]{|x_n|} \leq a. \tag{4.1}$$

Die Bedingung (4.1) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1.$$

Satz: Quotientenkriterium Eine Reihe $\sum x_n$ konvergiert absolut, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\text{Es existieren } a < 1 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so daß für alle } n > n_0 \text{ gilt } x_n \neq 0 \text{ und } \left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq a. \tag{4.2}$$

Die Bedingung (4.2) ist genau dann erfüllt, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $x_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1.$$

4.3 Umordnungen und Produkte von Reihen

Definition: Umordnung Es sei $\varphi : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum x_{\varphi(n)}$ Umordnung der Reihe $\sum x_n$.

Kleiner Umordnungssatz Wenn eine Reihe $\sum x_n$ absolut konvergiert, so konvergiert auch jede ihrer Umordnungen $\sum x_{\varphi(n)}$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}.$$

Riemannscher Umordnungssatz Es sei $\sum x_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Ferner sei a eine beliebige reelle Zahl oder $a = \infty$ oder $a = -\infty$. Dann existiert eine Umordnung $\sum x_{\varphi(n)}$ von $\sum x_n$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)} = a.$$

Satz: Multiplikation absolut konvergenter Reihen Es seien $\sum x_n$ und $\sum y_n$ zwei absolut konvergente Reihen, und

$$n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \mapsto (\varphi(n), \psi(n)) \in \{0, 1, 2, \ldots\} \times \{0, 1, 2, \ldots\}$$

sei eine bijektive Abbildung. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)} y_{\psi(n)}.$$

Dabei ist die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls absolut konvergent. Zum Beispiel, wenn man für $n = 0, 1, \ldots$ und $k = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\varphi\left(\frac{n}{2}(n+1) + k\right) := k \;\text{ und }\; \psi\left(\frac{n}{2}(n+1) + k\right) := n + 2 - k$$

setzt, so ergibt sich die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} x_m y_{n-m} \right).$$

5 Grenzwerte von Funktionen

Definition: Häufungspunkt einer Menge Eine reelle Zahl x_0 heißt Häufungspunkt einer Menge $X \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

Definitionen: Grenzwerte Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
(i) Es sei x_0 Häufungspunkt von X, $y_0 \in \mathbb{R}$, und für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ ist, dann ist } |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Dann nennt man f konvergent für x gegen x_0, y_0 heißt Grenzwert von f für x gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

(ii) Es sei x_0 Häufungspunkt von $X \cap (x_0, \infty)$ (bzw. $X \cap (-\infty, x_0)$), $y_0 \in \mathbb{R}$, und für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x - x_0 < \delta \text{ (bzw. } 0 < x_0 - x < \delta) \text{ ist, dann ist } |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Dann nennt man f konvergent für x von oben (bzw. von unten) gegen x_0, y_0 heißt eiseitiger Grenzwert von f für x von oben (bzw. von unten) gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = y_0 \;\text{ (bzw. } \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0).$$

(iii) Es sei x_0 Häufungspunkt von X, und für alle $a \in \mathbb{R}$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ ist, dann ist } f(x) > a \text{ (bzw. } f(x) < a).$$

Dann sagt man, daß f bei x gegen x_0 gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) strebt, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty).$$

(iv) Es sei $y_0 \in \mathbb{R}$, X sei nicht nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, und für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } x > b \text{ (bzw. } x < b) \text{ ist, dann ist } |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Dann nennt man f konvergent für x gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), y_0 heißt Grenzwert von f für x gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0 \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0).$$

(v) Es sei X nicht nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, und für alle $a \in \mathbb{R}$ existiere ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } x > b \text{ (bzw. } x < b) \text{ ist, dann ist } f(x) > a.$$

Dann sagt man, daß f bei x gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) gegen Unendlich strebt, und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty).$$

(vi) Es sei X nicht nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, und für alle $a \in \mathbb{R}$ existiere ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } x > b \text{ (bzw. } x < b) \text{ ist, dann ist } f(x) < a.$$

Dann sagt man, daß f bei x gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) gegen minus Unendlich strebt, und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

Lemma: Äquivalenz von $\varepsilon\delta$-Sprache und Folgensprache Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 sei Häufungspunkt von X, und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.
(ii) Für jede Folge $x_1, x_2, \ldots \in X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$.

Satz: Rechenregeln Es seien $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die konvergent sind, wenn x gegen einen Häufungspunkt x_0 von X strebt. Dann gilt:
(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls konvergent für x gegen x_0, und

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) + g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x), \quad \lim_{x \to x_0} \Big(f(x)g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

(ii) Es sei $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $g(x) \neq 0$. Ferner ist die Funktion f/g (die auf $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ korrekt definiert ist) konvergent für x gegen x_0, und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

(iii) Es sei $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ nahe x_0. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

(iv) Es sei $h : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ nahe x_0 und $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$. Dann konvergiert auch h für x gegen x_0, und

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Bemerkung Zum obigen Lemma und zum obigen Satz analoge Resultate gelten auch in den Fällen, wenn anstelle von x_0 oder y_0 Unendlich oder minus Unendlich steht oder wenn die Grenzwerte durch einseitige Grenzwerte ersetzt werden.

6 Stetige Funktionen

Definitionen Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
(i) Die Funktion f heißt stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - x_0| < \delta \text{ ist, dann ist } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) Die Funktion f heißt unstetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn sie in x_0 nicht stetig ist.
(iii) Die Funktion f heißt stetig (bzw. unstetig), wenn sie stetig in jedem $x_0 \in X$ ist (bzw. wenn sie unstetig in einem $x_0 \in X$ ist).

Bemerkung Wenn $x_0 \in X$ nicht Häufungspunkt von X ist, d.h. wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ gilt $|x - x_0| > \delta$, dann ist jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Wenn aber $x_0 \in X$ Häufungspunkt von X ist, dann ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Lemma: Stetigkeit und Ungleichungen Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig in einem Punkt $x_0 \in X$ ist, und c sei eine reelle Zahl mit $f(x_0) > c$ (bzw. $f(x_0) < c$). Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $|x-x_0| < \delta$ ebenfalls gilt $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Satz: Stetigkeit und algebraische Operationen Es seien $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetig in einem Punkt in $x_0 \in X$ sind. Dann gilt:
(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in x_0 stetig.
(ii) Es sei $g(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $g(x) \neq 0$. Ferner ist die Funktion f/g (die auf $X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ korrekt definiert ist) stetig in x_0.

Satz: Stetigkeit und Superposition Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig in einem Punkt $x_0 \in X$ ist, und $g : f(X) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig in dem Punkt $f(x_0)$. Dann ist die Superposition $g \circ f$ ebenfalls stetig in x_0.

6.1 Stetige Funktionen auf Intervallen: Der Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$) und y_0 eine reelle Zahl mit $f(a) < y_0 < f(b)$ (bzw. $f(a) > y_0 > f(b)$). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y_0$.

Folgerung Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

oder mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

z.B. ein Polynom ungerader Ordnung. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$.

Folgerung: Ein Fixpunktsatz Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Definitionen: Monotonie und strenge Monotonie Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
(i) Die Funktion f heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).
(ii) Die Funktion f heißt streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Satz: Streng monotone stetige Funktionen auf Intervallen Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) stetige Funktion. Dann ist f injektiv, $f(I)$ ist ebenfalls ein Intervall, und die inverse Funktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) und stetig.

6.2 Maxima und Minima stetiger Funktionen

Definition: Maximum und Minimum einer Funktion Es sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn ein $x_0 \in X$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$), so heißt $f(x_0)$ Maximum (bzw. Minimum) der Funktion f, und man sagt, daß f ein Maximum (bzw. Minimum) besitzt und daß es in x_0 angenommen wird.

Satz: Extrema stetiger Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum.

Folgerung Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\text{ (bzw. mit }\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty),$$

z.B. ein Polynom gerader Ordnung. Dann besitzt f ein Minimum (bzw. ein Maximum).

6.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Satz über die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Definition: Dichte Untermengen Es sei $X \subset Y \subset \mathbb{R}$, und für alle $y \in Y$ und $\varepsilon > 0$ existiere ein $x \in X$ mit $|y - x| < \varepsilon$. Dann heißt die Menge X dicht in der Menge Y.

Satz über die stetige Fortsetzbarkeit gleichmäßig stetiger Funktionen Es sei $X \subset Y \subset \mathbb{R}$, X sei dicht in Y, und $f : X \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig. Dann existiert genau eine stetige Fortsetzung von f auf Y.

7 Einige elementare Funktionen

7.1 Exponentialfunktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen

Satz und Definition: Exponentialfunktionen Zu jedem $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(y) \;\text{ für alle }\; x, y \in \mathbb{R}, \\ f(1) &= a. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Diese Funktion heißt Exponentialfunktion mit der Basis a, und man schreibt

$$a^x := f(x).$$

Dabei gelten folgende Eigenschaften:
Funktionalgleichungen Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \text{ (also (7.1))}, \\ a^{xy} &= (a^x)^y, \\ a^x b^x &= (ab)^x. \end{aligned}$$

Monotonie Die Exponentialfunktionen mit einer Basis $a > 1$ (bzw. $a < 1$) sind streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).
Asymptotisches Verhalten Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 1, \\ 0 & \text{falls } a < 1, \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > 1, \\ \infty & \text{falls } a < 1. \end{cases}$$

Berechnung für rationale Argumente Für alle $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdots a \text{ (n Faktoren)}, \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}. \end{aligned}$$

Ferner ist x=$a^{\frac{1}{n}}$ die eindeutige Lösung $x \in [0, \infty)$ der Gleichung $x^n = a$ (und man schreibt auch $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$), und

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}.$$

Einige wichtige Grenzwerte Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} x^x &= 1, \\ \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \text{ (die Eulersche Zahl)}, \\ \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} &= \infty \text{ für alle } a > 1 \text{ und } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Satz und Definition: Logarithmusfunktionen Zu gegebenem $a > 0$ heißt die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die invers zur Exponentialfunktion mit der Basis a ist, Logarithmusfunktion mit der Basis a, und man schreibt

$$\log_a x := g(x).$$

Die Logarithmusfunktion, deren Basis die Eulersche Zahl ist, heißt Logarithmus naturalis und wird mit $\ln x$ bezeichnet. Alle Logarithmusfunktionen sind stetig, und es gelten folgende Eigenschaften:
Funktionalgleichungen Für alle $x, y > 0$ und alle $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y, \\ y \log_a x &= \log_a x^y, \\ \log_a x &= \log_b x \log_a b. \end{aligned}$$

Monotonie Die Logarithmusfunktionen mit einer Basis $a > 1$ (bzw. $a < 1$) sind streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).
Asymptotisches Verhalten Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 1, \\ -\infty & \text{falls } a < 1, \end{cases} \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{falls } a > 1, \\ \infty & \text{falls } a < 1. \end{cases}$$

Einige wichtige Grenzwerte Für alle $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, \\ \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} &= 0 \text{ für alle } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Satz und Definition: Potenzfunktionen Für gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$x \in (0, \infty) \mapsto x^\alpha \in (0, \infty)$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten α. Diese Funktionen sind stetig, und es gelten folgende Eigenschaften:
Monotonie Die Potenzfunktionen mit einem Exponenten $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$) sind streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).
Asymptotisches Verhalten Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 0, \\ 0 & \text{falls } \alpha < 0, \end{cases} \quad \lim_{x\downarrow 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha > 0, \\ \infty & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$

Fortsetzung der Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten auf $\mathbb{R}$ Für alle $x \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^0 = 1$ und

$$\begin{aligned} x^n &= x \cdot x \cdots x \ (n \text{ Faktoren}), \\ x^{-n} &= (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen definieren für $x \leq 0$ (falls $n \geq 0$) bzw. für $x < 0$ (falls $n < 0$) stetige Fortsetzungen der Potenzfunktionen auf $\mathbb{R}$, und für diese Fortsetzungen gilt

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -x^n & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

7.2 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen

7.2.1 Bogenlänge

Definition: Lipschitz-Stetigkeit Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $L > 0$ existiert, so daß gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in X.$$

Satz und Definition: Bogenlänge Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann ist die Menge

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\Big(f(x_j) - f(x_{j-1})\Big)^2 + \Big(x_j - x_{j-1}\Big)^2} : \ n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$$

nach oben beschränkt, und ihr Supremum heißt Bogenlänge der Kurve $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Definition: Die Zahl π Das Doppelte der Bogenlänge der Kurve $y = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$ wird mit dem Symbol π bezeichnet.

7.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens

Satz und Definitionen: Sinus und Kosinus Es existiert genau ein Paar stetiger Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: Es gilt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)g(y) + f(y)g(x) \ \text{ für alle } \ x, y \in \mathbb{R}, \\ g(x+y) &= g(x)g(y) - f(x)f(y) \ \text{ für alle } \ x, y \in \mathbb{R}, \\ f(x)^2 + g(x)^2 &= 1 \ \text{ für alle } \ x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &> 0 \ \text{ für alle hinreichend kleinen } \ x > 0. \end{aligned}$$

Diese Funktionen heißen Sinus bzw. Kosinus, und man schreibt

$$\sin x := f(x) \ \text{ und } \ \cos x := g(x).$$

Ferner gelten folgende Eigenschaften:
(i) Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist x (bzw. $\frac{\pi}{2} - x$) die Bogenlänge der Kurve $\eta = \sqrt{1-\xi^2},\ \xi \in [0, \sin x]$ (bzw. $\xi \in [0, \cos x]$).
(ii) Der Sinus (bzw. der Kosinus) ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, und $\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$.
(iii) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \ \text{ und } \ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x,$$

also insbesondere $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$ und

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \text{ und } \ \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

(iv) Es gilt $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz und Definition: Tangens Die Funktion

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} : \ n \in \mathbb{Z} \right\} \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}$$

heißt Tangens. Sie ist stetig, auf jedem Interval $\big((2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\big)$ streng monoton wachsend, und es gilt:
(i) $\tan(x+\pi) = \tan x$ für alle $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
(ii) $\tan x \to \infty$ für $x \uparrow \frac{\pi}{2}$ und $\tan x \to -\infty$ für $x \downarrow -\frac{\pi}{2}$.

7.2.3 Die inversen trigonometrischen Funktionen

Definitionen
(i) Die inverse Funktion zur Funktion $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin x \in [-1, 1]$ heißt Arcussinus, und man schreibt $y = \arcsin x$, falls $x = \sin y$ und $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(ii) Die inverse Funktion zur Funktion $x \in [0, \pi] \mapsto \cos x \in [-1, 1]$ heißt Arcuskosinus, und man schreibt $y = \arccos x$, falls $x = \cos y$ und $x \in [0, \pi]$.
(iii) Die inverse Funktion zur Funktion $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ heißt Arcustangens, und man schreibt $y = \arctan x$, falls $x = \tan y$ und $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

8 Folgen und Reihen von Funktionen. Potenzreihen

8.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definitionen: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz Es sei $X \subset \mathbb{R}$, und $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sei eine Folge von Funktionen, die alle den gleichen Definitionsbereich X besitzen.
(i) Die Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent, wenn eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

d.h. wenn für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Die Funktion f heißt dann Grenzwert der Folge (f_n).
(ii) Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent, wenn eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ und $n \geq n_0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Die Funktion f heißt dann gleichmäßiger Grenzwert der Folge (f_n).
Analoge Bezeichnungsweisen werden für Reihen von Funktionen benutzt.

Satz über die Stetigkeit des gleichmäßigen Grenzwertes Es sei $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, die alle in einem Punkt x_0 stetig sind. Dann ist der Grenzwert dieser Folge ebenfalls stetig in x_0, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

8.2 Potenzreihen

Definition Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann nennt man die Reihe

$$\sum a_n (x - x_0)^n \tag{8.1}$$

Potenzreihe mit den Koeffizienten a_n und dem Zentrum x_0 im Punkt x. Die Funktion

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

die definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$, so daß (8.1) konvergiert, heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten a_n und dem Zentrum x_0.

Satz und Definition: Konvergenzradius Es sei

$$R := \begin{cases} 0 & \text{falls die Folge } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt ist,} \\ \infty & \text{falls } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt R Konvergenzradius der Potenzreihe (8.1), und es gilt:
(i) Es sei $R = 0$. Dann divergiert die Potenzreihe (8.1) für alle $x \neq x_0$.
(ii) Es sei $R = \infty$. Dann konvergiert Potenzreihe (8.1) absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner konvergiert sie gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall. Insbesondere ist sie stetig auf $\mathbb{R}$.
(iii) Es sei $0 < R < \infty$. Dann konvergiert Potenzreihe (8.1) absolut für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, und sie divergiert für alle $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$. Ferner konvergiert sie gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall, das in $(x_0 - R, x_0 + R)$ enthalten ist. Insbesondere ist sie stetig in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Einige wichtige Potenzreihen Es gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\, x^n \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \quad (R=1), \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R=\infty), \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (R=1), \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R=\infty), \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R=\infty), \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

8.3 Komplexe Potenzreihen

Wir setzen hier voraus, daß bekannt ist, was komplexe Zahlen sind und wie man sie addiert und multipliziert. Wir erinnern nur an die wichtigsten Bezeichnungsweisen und Rechenregeln.

Komplexe Zahlen haben die Form

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist i die imaginäre Einheit, und

$$\mathrm{Re} z := x, \quad \mathrm{Im} z := y, \quad |z| := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{sowie} \quad \overline{z} := x - iy$$

sind der Realteil, der Imaginärteil und der Betrag von z sowie die konjugiert-komplexe Zahl zu z. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet, und $\mathbb{R}$ kann man als Untermenge von $\mathbb{C}$ auffassen, indem man jeweils die relle Zahl x mit der komplexen Zahl $x + i0$ identifiziert.

Die Menge $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit folgender Addition und folgender Multiplikation:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2). \end{aligned}$$

Dabei ist das Nullelement in diesem Körper die komplexe Zahl, deren Realteil und deren Imaginärteil gleich (der reellen) Null sind, und das Einselement ist die komplexe Zahl, deren Realteil gleich (der reellen) Eins ist und deren Imaginärteil gleich (der reellen) Null ist.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, $|z|^2 = z\overline{z}$. Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Lemma: Dreiecksungleichung Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Definition: Offene und abgeschlossene Kugeln Für gegebene $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ heißen die Mengen

$$K(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{K}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

offene bzw. abgeschlossene Kugel um z_0 mit dem Radius R.

Satz und Definition: Konvergenzradius komplexer Potenzreihen Es sei

$$\sum a_n (z-z_0)^n \tag{8.2}$$

eine komplexe Potenzreihe und

$$R := \begin{cases} 0 & \text{falls die Folge } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt ist,} \\ \infty & \text{falls } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt R Konvergenzradius der Potenzreihe (8.2), und es gilt:
(i) Es sei $R = 0$. Dann divergiert die Potenzreihe (8.2) für alle $z \neq z_0$.
(ii) Es sei $R = \infty$. Dann konvergiert Potenzreihe (8.2) absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Ferner konvergiert sie gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kugel in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist sie stetig in $\mathbb{C}$.
(iii) Es sei $0 < R < \infty$. Dann konvergiert Potenzreihe (8.2) absolut für alle $z \in K(z_0, R)$, und sie divergiert für alle $z \notin \overline{K}(z_0, R)$. Ferner konvergiert sie gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{K}(z_0, r)$ mit $r < R$. Insbesondere ist sie stetig in $K(z_0, R)$.
Dabei sind die Begriffe "Konvergenz", "absolute Konvergenz", "gleichmäßige Konvergenz" und "Stetigkeit" definiert wie für reelle Potenzreihen.

Identitätssatz für Potenzreihen Es seien $\sum a_{1n}(z-z_1)^n$ und $\sum a_{2n}(z-z_2)^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_1 und R_2. Ferner gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1n}(z-z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(z-z_2)^n \ \text{ für unendlich viele verschiedene } \ z \in K(z_1, R_1) \cap K(z_2, R_2)$$

(also insbesondere $|z_1 - z_2| < R_1 + R_2$). Dann folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1n}(z-z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(z-z_2)^n \ \text{ für alle } \ z \in K(z_1, R_1) \cap K(z_2, R_2).$$

8.4 Die komplexe Exponentialfunktion und die Eulersche Formel

Satz und Definition: e^z für $z \in \mathbb{C}$
(i) Die Potenzreihe

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, und die entsrechende komplexe Funktion $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ heißt komplexe Exponentialfunktion (mit der Basis e).
(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Satz: Eulersche Formel Es gilt

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Folgerung: Polarkoordinaten Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ existieren genau ein $r > 0$ und genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ (die sogenannten Polarkoordinaten von z), so daß gilt

$$z = re^{i\varphi}.$$

Folgerung: Die Moivre'schen Formeln Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \cos n\varphi & = & \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \ldots, \\ \sin n\varphi & = & \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \ldots \end{array}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

9 Differentialrechnung

In diesem Kapitel bezeichnet I stets ein Intervall in $\mathbb{R}$.

9.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

Definitionen Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
(i) Die Funktion f heißt differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
(ii) Die Funktion f heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in I$ ist. Die Funktion $x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ heißt dann Ableitung von f und wird mit f' bezeichnet.

Satz und Definition: Tangente Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ ist, so existiert genau eine Gerade $y = ax + b$, so daß gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{x - x_0} = 0,$$

nämlich $a = f'(x_0)$ und $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Diese Gerade heißt Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Lemma: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ ist, so ist f in x_0 auch stetig.

Satz: Differenzierbarkeit und algebraische Operationen Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die differenzierbar in einem Punkt in $x_0 \in I$ sind. Dann gilt:
(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ und } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(ii) Es sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist die Funktion f/g (die für $x \in I$ nahe x_0 korrekt definiert ist) differenzierbar in x_0, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Satz: Kettenregel Es seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to J$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist auch die Superposition $g \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Satz: Ableitung der inversen Funktion Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, differenzierbar in $x_0 \in I$, und es gelte $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar, und

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = f'(x_0)^{-1}.$$

Mittelwertsatz Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\theta \in (a, b)$ mit

$$f'(\theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerung: Lösung der einfachsten Differentialgleichung Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gelte $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f eine konstante Funktion.

Folgerung: Kriterien für Monotonie Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:
(i) Die Funktion f ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend) genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt.
(ii) Wenn $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) gilt für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Differentiation Es sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, die bei $n \to \infty$ punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ strebe. Ferner strebe die Folge (f_n') der Ableitungen bei $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar, und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Folgerung: Ableitung von Potenzreihen Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \text{ für alle } x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Der Konvergenzradius der summandenweise differenzierten Potenzreihe ist wieder gleich R.

Satz: Regel von l'Hospital Es seien $-\infty \le a < b \le \infty$, $-\infty \le A \le \infty$, und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien zwei differenzierbare Funktionen. Ferner sei $g'(x) \ne 0$ für alle $x \in (a,b)$, und für ein $a \le c \le b$ gelte

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

sowie

$$\text{entweder } \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty.$$

Dann gilt $g(x) \ne 0$ für alle $x \in (a,b)$ nahe c und

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Einige wichtige Ableitungen Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x^\alpha &= \alpha x^{\alpha-1},\\
\frac{d}{dx} a^x &= a^x \ln a,\\
\frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{1}{x \ln a},\\
\frac{d}{dx} \sin x &= \cos x,\\
\frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x,\\
\frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x},\\
\frac{d}{dx} \cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x},\\
\frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\frac{d}{dx} \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{1+x^2},\\
\frac{d}{dx} \mathrm{arccot} x &= -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

9.2 Höhere Ableitungen. Kurvendiskussionen

Definition Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
(i) Die Funktion f heißt zweifach differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und wenn ihre

Ableitung f' ebenfalls differenzierbar ist. Die Ableitung der Ableitung f' wird zweite Ableitung von f genannt und mit f'' bezeichnet, d.h.

$$f'' := (f')'$$

und

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für alle} \quad x_0 \in I.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f n-fach differenzierbar, wenn f $(n-1)$-fach differenzierbar ist und wenn die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung dieser $(n-1)$-ten Ableitung wird n-te Ableitung von genannt und mit $f^{(n)}$ bezeichnet, also

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$$

und

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für alle} \quad x_0 \in I.$$

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f n-fach stetig differenzierbar, wenn f n-fach differenzierbar ist und wenn die n-te Ableitung $f^(n)$ stetig ist.

Satz und Definition: Krümmung Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar, $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0.$ und $f''(x_0) \neq 0$. Dann existiert genau ein Kreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = r^2\}$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, so daß gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \eta + \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2}}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Dabei gilt $\xi = x_0$, $\eta = f(x_0) + \mathrm{sgn} f''(x_0)r$ und

$$|f''(x_0)| = \frac{1}{r},$$

und diese Zahl heißt Krümmung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Lemma: Leibnitz-Formel Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x_0) g^{(n-i)}(x_0).$$

Satz über die Taylor-Formel Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar. Dann existiert für beliebige $x, x_0 \in I$ ein θ zwischen x und x_0, so daß gilt

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Folgerung: Lokale Approximation durch Polynome Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar, und $f^{(n)}$ sei stetig in $x_0 \in I$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Definitionen: Lokale, globale und strenge Extrema Es seien $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in X$.
(i) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$), so sagt man, daß f in x_0 ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) besitzt.
(ii) Wenn f ein Maximum (bzw. Minimum) besitzt, das in x_0 angenommen wird, so sagt man zur Unterscheidung von lokalen Extrema, daß f in x_0 ein globales Maximum (bzw. globales Minimum) besitzt.
(ii) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$ (bzw.$f(x) > f(x_0)$), so sagt man, daß f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. strenges lokales Minimum) besitzt. Analog benutzt man die Begriffe strenges globales Maximum und strenges globales Minimum.

Satz: Ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema
(i) Wenn eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt und wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.
(ii) Wenn eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar ist und wenn in einem Punkt $x_0 \in I$ gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$), dann ist x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. ein strenges lokales Minimum) von f.

Satz: Globale Minima von Funktionen auf einem Intervall Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $a := \inf I$, $b := \sup I$.
(i) Wenn f die Gleichung $f'(x) = 0$ keine Lösung besitzt, dann gilt: Wenn f streng monoton wachsend ist, so besitzt f ein globales Minimum genau dann, wenn $a \in I$, und dieses globale Minimum wird in a angenommen. Wenn f streng monoton fallend ist, so besitzt f ein globales Minimum genau dann, wenn $b \in I$, und dieses globale Minimum wird in b angenommen.
(ii) Wenn f die Gleichung $f'(x) = 0$ endlich viele Lösungen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ besitzt mit $f(x_0) \leq f(x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$, dann gilt: Wenn $f(x_0) \leq \min\{\lim_{x \downarrow a} f(x), \lim_{x \uparrow b} f(x)\}$, dann besitzt f in x_0 ein strenges globales Minimum. Wenn dagegen $\min\{\lim_{x \downarrow a}, \lim_{x \uparrow a} f(x)\} < f(x_0)$, dann gilt: Wenn

$$\min\left\{\lim_{x \downarrow a} f(x), \lim_{x \uparrow a} f(x)\right\} = \lim_{x \downarrow a} f(x) \text{ und } a \notin I$$

oder wenn

$$\min\left\{\lim_{x \downarrow a} f(x), \lim_{x \uparrow a} f(x)\right\} = \lim_{x \uparrow b} f(x) \text{ und } b \notin I,$$

so besitzt f kein globales Minimum. Wenn $\min\{\lim_{x \downarrow a} f(x), \lim_{x \uparrow a} f(x)\} = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ und $a \in I$ bzw. wenn $\min\{\lim_{x \downarrow a} f(x), \lim_{x \uparrow a} f(x)\} = \lim_{x \uparrow b} f(x)$ und $b \in I$, so besitzt f ein globales Minimum, und dieses wird in a bzw. b angenommen.

Satz und Definition: Konvexität und Konkavität Es sei $f : I \to \mathbb{R}$.
(i) Die Funktion f heißt konvex (bzw. streng konvex bzw. konkav bzw. streng konkav), wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ und für alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{9.1}$$

(bzw. (9.1) mit $<$ bzw. (9.1) mit $\geq$ bzw. (9.1) mit $>$).
(ii) Wenn f zweifach differenzierbar ist, so gilt: f ist konvex (bzw. konkav) genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.
(iii) Wenn f zweifach differenzierbar ist und wenn $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) gilt für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex (bzw. streng konkav).

Satz und Definition: Asymptoten Es sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und die Grenzwerte

$$\alpha := \lim_{x\to\infty} f'(x) \text{ und } \beta := \lim_{x\to\infty} (f(x) - xf'(x))$$

mögen existieren. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0,$$

und die Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt Asymptote von f für $x \to \infty$.

10 Integralrechnung

10.1 Integrierbarkeit und bestimmtes Integral

Definition mit Hilfe Riemannscher Summen Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn ein $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ existiert, so daß folgendes gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von $[a, b]$ mit $\max\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\} < \delta$ und für alle $\xi_1 \in (x_0, x_1), \ldots, \xi_n \in (x_n, x_{n-1})$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{I} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahl $\mathcal{I}$ (die dann durch die obige Bedingung eindeutig bestimmt ist) heißt Integral von f über $[a, b]$, und man schreibt

$$\int_a^b f(x)dx := \mathcal{I}.$$

Die Summe $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ heißt Riemannsche Summe der Funktion f zur Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und zu den Zwischenwerten $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Satz: Integrierbarkeit und Darbouxsche Summen Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von $[a, b]$ existiert mit

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1}\leq\xi\leq x_i} f(\xi)\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1}\leq\xi\leq x_i} f(\xi)\,(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Dabei heißen die Summen

$$O(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1}\le\xi\le x_i} f(\xi)(x_i - x_{i-1}) \text{ bzw. } U(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1}\le\xi\le x_i} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

Darbouxsche Ober- bzw. Untersumme der Funktion f zur Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_Z U(f,Z) = \inf_Z O(f,Z).$$

Definition: Beschränkte Funktionen Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn ihr Wertebereich $\{f(x) : x \in X\}$ eine beschränkte Menge ist.

Satz: Beschränkte Funktionen sind integrierbar genau dann, wenn sie "fast überall" stetig sind. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und

$$M := \{x \in [a,b] : f \text{ ist in } x \text{ unstetig}\}$$

sei die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f. Dann gilt: Die Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existiert mit

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Folgerung Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die nicht mehr als abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt, ist integrierbar.

10.2 Rechenregeln

Lemma: Integrierbarkeit und Linearkombinationen Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien integrierbar. Dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Satz: Integrierbarkeit auf Teilintervallen Es sei $a \le b \le c$. Dann ist eine Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar genau dann, wenn ihre Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind, und dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f|_{[a,b]}(x)dx + \int_b^c f|_{[b,c]}(x)dx.$$

Anstelle von $\int_a^b f|_{[a,b]}(x)dx$ und $\int_b^c f|_{[b,c]}(x)dx$ schreibt man auch einfacher $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_b^c f(x)dx$.

Lemma: Integration von Ungleichungen Wenn zwei Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und wenn für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) \le g(x)$, so gilt auch

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Lemma: Integralabschätzungen Wenn eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, so gilt

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}(b-a).$$

Ferner ist dann auch die Funktion $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die bei $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strebe. Dann ist f ebenfalls integrierierbar, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

10.3 Stammfunktionen und Integrationsregeln. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, F : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, F sei differenzierbar, und es gelte $F' = f$. Dann heißt F Stammfunktion von f.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Satz über das Integral als Funktion seiner oberen Integrationsgrenze Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert ist durch

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \;\text{ für alle }\; x \in [a, b].$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f.

Definition Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $a \le c \le d \le b$. Dann bezeichnet man

$$\int_d^c f(x)dx := -\int_c^d f(x)dx.$$

Folgerung Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi, \psi : J \to I$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $x \in J \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Satz über die partielle Integration Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Insbesondere gilt: Wenn F eine Stammfunktion von fg' ist, so ist $fg - F$ eine Stammfunktion von $f'g$.

Substitutionsregel Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [c, d] \to [a, b]$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und es gelte $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Dann folgt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(y))g'(y)dy.$$

Insbesondere gilt: Wenn F eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ ist, so ist $F \circ g^{-1}$ eine Stammfunktion von f.

Satz: Eine Formel für die Bogenlänge Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{10.1}$$

die Bogenlänge der Kurve $y = f(x),\ x \in [a, b]$.

10.4 Numerische Integration

Satz (i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + (j-1)\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2n} \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|(b-a)^2.$$

(ii) Trapezregel: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \ldots + 2f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) + f(b) \right) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2n^2} \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|(b-a)^3.$$

11 Einführung in die mehrdimensionale Differentialrechnung

11.1 Euklidisches Skalarprodukt und Euklidische Norm

Definition Für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

das Euklidisches Skalarprodukt von x und y und mit

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

die Euklidische Norm von x.

Satz: Eigenschaften
(i) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
(ii) Es gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(iii) Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(iv) Dreiecksungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, d.h.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(v) Binomische Formel: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
(vi) Satz von Pythagoras: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

11.2 Vektorfolgen und ihre Konvergenz

Bemerkung zur Bezeichnungsweise Analog zu den Folgen reeller Zahlen bezeichnet man eine Folge

$$x_1 = (x_{11}, \dots, x_{n1}), x_2 = (x_{12}, \dots, x_{n2}), \dots, x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj}), \dots$$

mit $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ oder kürzer mit (x_j). Wenn alle Folgenglieder x_j Elemente einer fixierten Untermenge X von $\mathbb{R}^n$ sind, d.h. wenn $x_j \in X$ für alle $j = 1, 2, \dots$ gilt, so schreibt man $(x_j) \subset X$.

Definitionen: Konvergenz, Divergenz und Beschränktheit von Folgen
(i) Eine Folge $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$ von Vektoren heißt konvergent, wenn ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt:

$$\text{Wenn } j > j_0 \text{ ist, dann ist } \|x_j - x\| < \varepsilon.$$

Der Vektor x heißt dann Grenzwert der Folge (x_j), und man schreibt $x_j \to x$ für $j \to \infty$ oder $\lim_{j\to\infty} x_j = x$.
(ii) Eine Folge $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.
(iii) Eine Folge (x_j) heißt beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle j gilt $\|x_j\| \leq c$.

Lemma: Konvergenz bzw. Beschränktheit sind komponentenweise Konvergenz bzw. Beschränktheit Es seien

$$(x_{11}, \ldots, x_{n1}), (x_{12}, \ldots, x_{n2}), \ldots, (x_{1j}, \ldots, x_{nj}), \ldots \tag{11.1}$$

eine Folge von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:
(i) Die Vektorenfolge (11.1) konvergiert gegen den Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann, wenn für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Zahlenfolge $(x_{kj})_{j=1}^{\infty}$ gegen die Zahl x_k konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\lim_{j\to\infty} (x_{1j}, \ldots, x_{nj}) = \left(\lim_{j\to\infty} x_{1j}, \ldots, \lim_{j\to\infty} x_{nj} \right).$$

(ii) Die Vektorfolge (11.1) ist beschränkt genau dann, wenn für alle $k = 1, \ldots, n$ die Zahlenfolgen $(x_{kj})_{j=1}^{\infty}$ beschränkt sind.

Lemma: Elementare Eigenschaften konvergenter Folgen
(i) Eine konvergente Folge kann nicht zwei verschiedene Grenzwerte besitzen.
(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz: Konvergenzkriterium von Cauchy Eine Folge $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $j, k > j_0$ gilt $\|x_j - x_k\| < \varepsilon$.

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Vektorfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz: Konvergenz und algebraische Operationen Es seien (x_j) und (y_j) zwei konvergente Vektorfolgen, dann gilt:
(i) Für beliebige konvergente Zahlenfolgen (λ_j) und (μ_j) ist auch die Vektorfolge $(\lambda_j x_j + \mu_j y_j)$ konvergent, und

$$\lim_{j\to\infty} (\lambda_j x_j + \mu_j y_j) = \lim_{j\to\infty} \lambda_j \lim_{j\to\infty} x_j + \lim_{j\to\infty} \mu_j \lim_{j\to\infty} y_j.$$

(ii) Die Zahlenfolge $(\langle x_j, y_j \rangle)$ ist ebenfalls konvergent, und es gilt

$$\lim_{j\to\infty} \langle x_j, y_j \rangle = \left\langle \lim_{j\to\infty} x_j, \lim_{j\to\infty} y_j \right\rangle.$$

11.3 Abgeschlossene und offene Mengen. Randpunkte

Definitionen
(i) Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$K(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

offene Kugel um x_0 mit dem Radius r.
(ii) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_j) \subset X$ gilt $\lim_{j\to\infty} x_j \in X$.
(iii) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn für jeden Punkt $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K(x, \varepsilon) \subset X$.
(iv) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn ein $r > 0$ existiert, so daß gilt $X \subset K(0, r)$.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Kompakte Mengen Abgeschlossene, beschränkte Untermengen von $\mathbb{R}^n$ werden auch kompakt genannt. Daß zwei verschiedene Sprechweisen (nämlich "$X \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und beschränkt" und "$X \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt") für ein und denselben Sachverhalt existieren, ist folgendermaßen begründet: Sowohl die Bezeichnung "X ist abgeschlossen und beschränkt" als auch die Bezeichnung "X ist kompakt" verallgemeinert man auch auf Mengen, deren Elemente nicht Tupel reeller Zahlen, sondern kompliziertere Objekte (z.B. Funktionen) sind, und dann können auch abgeschlossene, beschränkte Mengen existieren, die nicht kompakt sind.

Satz: Eigenschaften
(i) Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, so ist $X \setminus Y$ abgeschlossen. Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, so ist $X \setminus Y$ offen. Insbesondere ist eine Untermenge $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen (bzw. offen) genau dann, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen (bzw. abgeschlossen) ist.
(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenener Mengen ist wieder abgeschlossen.
(iii) Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

Satz und Definition: Randpunkte Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von X, wenn gilt:

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existieren ein } y \in X \cap K(x, \varepsilon) \text{ und ein } z \in K(x, \varepsilon) \setminus X.$$

Dabei gilt: Die Menge X ist abgeschlossen (bzw. offen) genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte (bzw. keinen ihrer Randpunkte) enthält.

Lemma über den positiven Abstand disjunkter Mengen Es seien X und Y nichtleere abgeschlossene beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und es gelte $X \cap Y = \emptyset$. Dann folgt

$$\inf\{\|x - y\| : \ x \in X, \ y \in Y\} > 0.$$

Satz: Abgeschlossene und offene Mengen reeller Zahlen Jede nichtleere abgeschlossene (bzw. offene) Menge reeller Zahlen ist gleich der endlichen oder abzählbaren Vereinigung von disjunkten abgeschlossenen (bzw. offenen) Intervallen.

11.4 Grenzwerte und Stetigkeit vektorwertiger Abbildungen mehrerer Variabler

Definition: Häufungspunkt einer Menge von Vektoren Eine Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, wenn für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < \|x - x_0\| < \delta$.

Definition Es sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Abbildung.
(i) Es sei x_0 ein Häufungspunkt von X, $y \in \mathbb{R}^m$, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta \ \text{ ist, dann ist } \ \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

Dann heißt y Grenzwert von f für x gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := y.$$

(ii) Die Abbildung f heißt stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\text{Wenn } \ \|x - x_0\| < \delta \ \text{ ist, dann ist } \ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

(iii) Die Abbildung f heißt unstetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn sie in x_0 nicht stetig ist.
(iv) Die Abbildung f heißt stetig (bzw. unstetig), wenn sie stetig in jedem $x_0 \in X$ ist (bzw. wenn sie unstetig in einem $x_0 \in X$ ist).

Bemerkungen Es sei $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$.
(i) Wenn x_0 ein Häufungspunkt von X ist, so ist eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(ii) Wenn x_0 kein Häufungspunkt von X ist (dann nennt man x_0 isolierten Punkt von X), dann ist jedes $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig in x_0.

Lemma: Grenzwert und Stetigkeit gelten komponentenweise. Es sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Abbildung, und es gelte

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \ \text{ für alle } \ x \in X$$

mit Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$. Ferner sei x_0 ein Häufungspunkt von X. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_m(x) \right), \tag{11.2}$$

dabei existiert der Grenzwert auf der linken Seite von (11.2) genau dann, wenn alle Grenzwerte auf der rechten Seite von (11.2) existieren.
Insbesondere gilt: Die Abbildung f ist stetig genau dann, wenn alle Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ stetig sind.

Satz: Grenzwert, Stetigkeit und algebraische Operationen Es seien $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $g, h : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen, und x_0 sei ein Häufungspunkt von X. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} (g(x)+h(x)) &= \lim_{x\to x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} h(x), \\
\lim_{x\to x_0} \langle g(x), h(x)\rangle &= \Big\langle \lim_{x\to x_0} g(x), \lim_{x\to x_0} h(x)\Big\rangle,
\end{aligned}$$

dabei existieren die Grenzwerte jeweils auf der linken Seite, wenn alle Grenzwerte jeweils auf der rechten Seite existieren.
Insbesondere gilt: Wenn f, g und h stetig sind, so sind auch fg, $g+h$ und $\langle g, h\rangle$ stetig.

Lemma: Stetigkeit bzgl. einzelner Argumente Wenn $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so sind auch für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$y \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, y) \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R} \tag{11.3}$$

stetig. Andererseits existieren Funktionen $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die unstetig sind, obwohl für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktionen (11.3) stetig sind.

Satz: Stetigkeit und Superposition Es seien $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : f(X) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist die Superposition $g \circ f$ ebenfalls stetig.

Folgerung: Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$, und für alle $x, y \in X$ existiere eine stetige Abbildung $\phi : [0,1] \to X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi(1) = y$ (dann nennt man die Menge X bogenzusammenhängend). Ferner sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, und es mögen Punkte $a, b \in X$ existieren mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert auch ein $c \in X$ mit $f(c) = 0$.

Satz: Extrema stetiger Funktionen mehrerer Variabler auf abgeschlossenen beschränkten Mengen Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann existieren ein $x_* \in X$ und ein $x^* \in X$, so daß für alle $x \in X$ gilt $f(x_*) \le f(x)$ und $f(x_*) \ge f(x)$.

Satz über die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Abbildungen auf abgeschlossenen beschränkten Mengen Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und $f : X \to \mathbb{R}^m$ sei stetig. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in X$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

11.5 Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $f : X \to X$ sei eine Abbildung, und es exitiere ein $c < 1$, so daß gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X.$$

Dann existiert genau ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$. Ferner gilt: Wenn $x_1 \in X$ beliebig gewählt ist und wenn die Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ induktiv definiert ist durch

$$x_{j+1} := f(x_j) \text{ für } j = 1, 2, \ldots,$$

dann ist $x_0 = \lim_{j\to\infty} x_j$ und

$$\|x_j - x_0\| \le \frac{c}{1-c}\|x_j - x_{j-1}\| \le \frac{c^j}{1-c}\|x_2 - x_1\| \text{ für } j = 1, 2, \dots .$$

11.6 Differenzierbarkeit und Ableitung vektorwertiger Abbildungen mehrerer Variabler

Definition Es seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.
(i) Es sei $x_0 \in U$ ein Punkt, A eine $m \times n$-Matrix (m Zeilen und n Spalten), und für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U$ gilt:

$$\text{Wenn } \|x - x_0\| < \delta \text{ ist, dann ist } \|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Dann heißt f differenzierbar (oder total differenzierbar oder Frechet-differenzierbar) in x_0, A heißt Ableitung von f in x_0, und man schreibt

$$f'(x_0) := A.$$

(ii) Wenn f in jedem $x_0 \in U$ differenzierbar ist, so heißt f differenzierbar, und die Abbildung $x_0 \mapsto f'(x_0)$ heißt Ableitung von f und wird mit f' bezeichnet.

Satz und Definition: Richtungsableitungen Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, und $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in x_0. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x_0 + tv) - f(x_0)\Big) = f'(x_0)v,$$

und dieser Grenzwert wird Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v genannt. Insbesondere ist die Ableitung von f in x_0 durch f und x_0 eindeutig bestimmt.

Satz und Definition: Partielle Ableitungen Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, und es gelte

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{für alle } x \in U \tag{11.4}$$

mit Funktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$.
(i) Wenn f sei differenzierbar in einem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ist, so existieren für alle $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\Big),$$

und es gilt

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Die Zahlen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ heißen partielle Ableitungen von f_i nach x_j in x. Insbesondere gilt

$$f'(x)v = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)v_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x)v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)v_j \end{bmatrix} \quad \text{für alle} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{11.5}$$

Wenn man die Bezeichnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

benutzt, so kann man (11.5) auch kürzer schreiben:

$$f'(x)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)v_j.$$

(ii) Wenn f differenzierbar in allen Punkten $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ist, so heißen die Abbildungen

$$x \in U \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots, n$$

partielle Ableitungen von f_i nach x_j, und sie werden mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ bezeichnet.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Ableitung und Jacobi-Matrix Die obigen Definitionen von Differenzierbarkeit und Ableitung kann man verallgemeinern auf Abbildungen zwischen sogenannten unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen. Dann sind die Ableitungen lineare Abbildungen, die nicht mehr mit ihren Matrix-Darstellungen bzgl. gewisser Basen identifiziert werden können. Deshalb sind auch im Fall von Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, wo man lineare Abbildungen mit ihren Matrix-Darstellungen bzgl. der Standard-Basen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ identifizieren kann, verschiedene Sprechweisen üblich:
Wenn die Ableitung $f'(x)$ als lineare Abbildung aufgefaßt wird, so nennt man sie auch Differential von f in x, umd man benutzt die Bezeichnungen $Df(x)$ oder $df(x)$. Wenn dagegen die Ableitung als Matrix aufgefaßt wird, so nennt man sie auch Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix von f in x, und man benutzt die Bezeichnung

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x).$$

Lemma: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in U$ ist, so ist f in x_0 auch stetig.

Satz und Definition: Stetige Differenzierbarkeit Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, und es gelte (11.4). Ferner mögen für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ und $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ die Grenzwerte

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big(f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \Big),$$

existieren und stetig von x abhängen. Dann ist f in jedem $x \in U$ differenzierbar, und man sagt, f sei stetig differenzierbar.

Satz: Differenzierbarkeit von Linearkombinationen Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ zwei Abbildungen, die differenzierbar in einem Punkt in $x_0 \in U$ sind. Dann sind auch die Abbildungen $\lambda f + \mu g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

Satz: Kettenregel Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V$ differenzierbar in $x \in U$ und $g : V \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $f(x)$. Dann ist auch die Superposition $g \circ f$ differenzierbar in x, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x). \tag{11.6}$$

Dabei ist das Produkt auf der rechten Seite von (11.6) als Produkt der entsprechenden Jacobi-Matrizen zu verstehen. Insbesondere gilt für alle $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \ \text{ mit } \ \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) := \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(f(x)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_k}(f(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_k}(f(x)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l.$$

Satz und Definition: Der Fall $n = 1$. Tangenten Es seien $U \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in x_0, und es gelte (11.4). Dann artet die Jacobi-Matrix von f in x_0 zu einem Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^m$ aus, und es gilt

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{bmatrix} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. $f'(x_0)$ ist der Grenzwert der Sekantenvektoren $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x \to x_0$. Wenn $f'(x_0) \neq 0$, dann heißt die Gerade

$$\{ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \in \mathbb{R}^m : \ x \in \mathbb{R} \}$$

Tangente an die Kurve

$$\{ f(x) \in \mathbb{R}^m : \ x \in U \}, \tag{11.7}$$

d.h. an die Bildmenge von f, in x_0, und sie ist diejenige Gerade in $\mathbb{R}^m$ durch den Punkt $f(x_0)$, die sich am besten an die Kurve (11.7) in diesem Punkt anschmiegt. Genauer gesagt gilt folgendes: Wenn für ein $a \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0,$$

dann ist die Gerade $\{f(x_0) + a(x - x_0) \in \mathbb{R}^m : \ x \in \mathbb{R}\}$ die Tangente an die Kurve (11.7) in x_0, d.h. $a = f'(x_0)$.

Satz und Definition: Der Fall $m = 1$. Gradienten Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0. Dann artet die Jacobi-Matrix von f in x_0 zu einem Zeilenvektor aus $\mathbb{R}^n$ aus. Dieser Vektor wird auch Gradient von f in x_0 genannt und mit $\nabla f(x_0)$ bezeichnet, d.h.

$$\nabla f(x) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big) \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn f stetig differenzierbar ist, so gilt: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = \|\nabla f(x_0)\|$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $t \in [0, \varepsilon]$ gilt

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0 + t\nabla f(x_0)),$$

d.h. der Vektor $\nabla f(x_0)$ zeigt in die Richtung des maximalen Wachsens von f, lokal in x_0.

Satz und Definition: Der Fall $m = 1, n = 2$. Tangentialebenen Es seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in U$, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0. Ferner seien die Funktionen $\xi : (-1, 1) \to U$ und $\eta : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in Null, und es gelte

$$\eta(t) = f(\xi(t)) \text{ für alle } t \in (-1, 1) \text{ und } \xi(0) = x_0, \ \eta(0) = f(x_0).$$

Dann heißt der Vektor $(x_0 + \xi'(0), f(x_0) + \eta'(0)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ Tangentialvektor an die Fläche

$$\{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : y = f(x)\}, \tag{11.8}$$

d.h. an den Graphen von f, in x_0. Ein Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ist ein solcher Tangentialvektor genau dann, wenn gilt

$$y = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Die Menge aller dieser Tangentialvektoren heißt Tangentialebene an die Fläche (11.8) in x_0, und sie ist diejenige Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$, die sich am besten an die Fläche (11.8) in diesem Punkt anschmiegt. Genauer gesagt gilt folgendes: Wenn für ein $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle a, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0,$$

dann ist die Ebene $\{(x, f(x_0) + \langle a, x - x_0 \rangle) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}^2\}$ die Tangentialebene an die Fläche (11.8) in x_0, d.h. $a = \nabla f(x_0)$.

Mittelwertsatz Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x, y \in U$, und für alle $\lambda \in [0,1]$ gelte $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$. Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann folgt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \right|^2} \, \|x - y\|.$$

11.7 Der Satz über implizite Funktionen

Satz Es seien $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $(\lambda_0, x_0) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $f(\lambda_0, x_0) = 0$ und

$$\det \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\lambda_0, x_0) \right]_{j,k=1}^{n} \neq 0.$$

Dann existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit $K(\lambda_0, \varepsilon) \times K(x_0, \delta) \subset U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : K(\lambda_0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, so dass für $\lambda \in K(\lambda_0, \varepsilon)$ und $x \in K(x_0, \delta)$ gilt

$$f(\lambda, x) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = \varphi(\lambda).$$

Ferner gilt für $\lambda \in K(\lambda_0, \varepsilon)$

$$\varphi'(\lambda) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda))$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\lambda, \varphi(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\lambda, \varphi(\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\lambda, \varphi(\lambda)) \end{bmatrix}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_m}(\lambda, \varphi(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_m}(\lambda, \varphi(\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \lambda_1}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial \lambda_2}(\lambda, \varphi(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \lambda_m}(\lambda, \varphi(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

Folgerung: Satz über den lokalen Diffeomorphismus Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und

$$\det f'(x_0) \neq 0.$$

Dann existieren offene Mengen $V \subset U$ und $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in V$ und $f(x_0) \in W$, so dass die Abbildung f die Menge V bijektiv auf die Menge W abbildet und dass die entsprechende Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig differenzierbar ist. Ferner gilt für alle $x \in V$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \left(f'(x)\right)^{-1}.$$

11.8 Höhere partielle Ableitungen und lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

Definition Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.
(i) Die Abbildung f heißt zweifach differenzierbar, wenn f differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen von f differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen von f werden zweite partielle Ableitungen von f genannt und mit $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ bezeichnet, d.h.

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) := \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)(x) \text{ für } i = 1, \dots, m, \;\; j, k = 1, \dots, n \text{ und } x \in U.$$

Ferner schreibt man zur Vereinfachung

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}(x) := \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_j}(x).$$

(ii) Für $l \in \mathbb{N}$ heißt f l-fach differenzierbar, wenn f $(l-1)$-fach differenzierbar ist und wenn alle $(l-1)$-ten partiellen Ableitungen von f differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen dieser $(l-1)$-ten partiellen Ableitungen werden l-te partielle Ableitungen von f genannt und mit

$$\frac{\partial^l f_i}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_r}^{k_r}}(x) \;\; (k_1 + \dots k_r = l)$$

bezeichnet.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise In der obigen Definition ist definiert, wann eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l-fach differenzierbar ist und was ihre l-ten partiellen Ableitungen sind. Diese Definitionen arbeiten durch Induktion bzgl. l, und das ist möglich, weil die l-ten partiellen Ableitungen und die $l-1$-ten partiellen Ableitungen Objekte von derselben Sorte sind, nämlich Abbildungen von U in $\mathbb{R}$.
Analog kann man induktiv bzgl. l definieren, was die l-te Ableitung einer l-fach differenzierbaren Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist. Das ist allerdings nicht mehr so einfach wie bei den partiellen Ableitungen, weil die l-te Ableitung und die $l-1$-te Ableitung nur dann Objekte von derselben Sorte sind, wenn man den Begriff "Objekte von derselben Sorte" hinreichend allgemein faßt. Zum Beispiel müssen dabei die Ableitung nullter Ordnung, also die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, und die Ableitung erster Ordnung, also die Abbildung f', die U in die Menge der $m \times n$-Matrizen abbildet, Objekte von derselben Sorte sein.

Satz von Schwarz Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei zweifach differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) \text{ für alle } i = 1, \dots, m, \;\; j, k = 1, \dots, n \text{ und } x \in U.$$

Satz über die Taylor-Formel Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x, y \in U$, und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gelte $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$. Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}$ sei $(l+1)$-fach differenzierbar. Dann existiert ein

$\theta \in (0,1)$, so daß gilt

$$f(y) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j_1+\ldots+j_n=i} \frac{1}{j_1!\ldots j_n!} \frac{\partial^i f}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}(x)(y_1-x_1)^{j_1}\ldots(y_n-x_n)^{j_n}$$
$$+ \sum_{j_1+\ldots+j_n=l+1} \frac{1}{j_1!\ldots j_n!} \frac{\partial^{l+1} f}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}(\theta x+(1-\theta y))(y_1-x_1)^{j_1}\ldots(y_n-x_n)^{j_n}.$$

Insbesondere gilt im Fall $n=2,\ l=1$

$$\begin{aligned} f(y) = {} & f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1-x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)(y_2-x_2) \\ & + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\theta x+(1-\theta y))(y_1-x_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\theta x+(1-\theta y))(y_2-x_2)^2\Big) \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\theta x+(1-\theta y))(y_1-x_1)(y_2-x_2). \end{aligned}$$

Satz und Definition: Lokale Extrema und notwendige Bedingungen dafür Es seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$.
(i) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in U$ mit $\|x-x_0\| < \varepsilon$ gilt $f(x) \le f(x_0)$ (bzw. $f(x) \ge f(x_0)$), so heißt x_0 lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) von f.
(ii) Wenn f differenzierbar in x_0 ist und wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f ist, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0. \tag{11.9}$$

(iii) Wenn f zweifach differenzierbar ist, wenn alle zweiten partiellen Ableitungen von f stetig in x_0 sind und wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) < \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)\Big)^2, \tag{11.10}$$

erfüllt ist, dann ist x_0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum von f. In diesem Fall nennt man x_0 Sattelpunkt von f.

Satz und Definition: Strenge lokale Extrema und hinreichende Bedingungen dafür Es seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$.
(i) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in U$ mit $0 < \|x-x_0\| < \varepsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$), so heißt x_0 strenges lokales Maximum (bzw. strenges lokales Minimum) von f.
(ii) Es sei f zweifach differenzierbar, alle zweiten partiellen Ableitungen von f seien stetig in x_0, und (11.9) sei erfüllt, dann gilt: Wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) < 0, \tag{11.11}$$

dann ist x_0 strenges lokales Maximum von f. Wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) > \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)\Big)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) > 0, \tag{11.12}$$

dann ist x_0 strenges lokales Minimum von f.

Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Hesse'sche Matrix Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei zweifach differenzierbar in $x_0 \in U$. Dann heißt die Matrix

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right]_{j,k=1}^n$$

Hesse'sche Matrix von f in x_0. Die Bedingungen (11.10) bzw. (11.11) bzw. (11.12) sind äquivalent dazu, daß die Hesse'sche Matrix von f in x_0 indefinit bzw. negativ definit bzw. positiv definit ist.

12 Einführung in die mehrdimensionale Integralrechnung

12.1 Integrierbarkeit und Integral

Definitionen: Quader, Zerlegungen, Zwischenwertevektoren, Riemannsche Summen, Integrierbarkeit und Integral
(i) Für $j = 1, \ldots, n$ seien reelle Zahlen $a_j \leq b_j$ gegeben. Dann heißt die Menge

$$Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n\}$$

(beschränkter, abgeschlossener, achsenparalleler, n-dimensionaler) Quader, und

$$\text{mes } Q := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

heißt Maß von Q.
(ii) Es seien $Q_1, Q_2, \ldots \subset Q$ Quader, und für alle $j \neq k$ gelte entweder $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ oder mes $Q_j \cap Q_k = 0$. Dann heißt die Menge $Z = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ Zerlegung von Q. Das Maximum aller Seitenlängen aller Quader in Z heißt Feinheit von Z.
(iii) Für $j = 1, \ldots, m$ seien Vektoren $\xi_j \in Q_j$ gegeben. Dann heißt der Vektor

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{mn}$$

Zwischenwertevektor zu der Zerlegung Z.
(iv) Eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn ein $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ existiert, so daß folgendes gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle Zerlegungen Z von Q, deren Feinheit kleiner als δ ist, sowie für alle Zwischenwertevektoren ξ zu Z gilt

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \text{ mes } Q_j - \mathcal{I} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahl $\mathcal{I}$ (die dann durch die obige Bedingung eindeutig bestimmt ist) heißt Integral von f über Q, und man schreibt

$$\int_Q f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n := \int_Q f(x) dx := \mathcal{I}.$$

Die Summe $\sum_{k=1}^m f(\xi_j)$ mes Q_j heißt Riemannsche Summe der Funktion f zur Zerlegung Z und zu dem Zwischenwertevektor ξ.
(v) Es sei M eine beschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn ein Quader Q in $\mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq Q$ existiert, so daß die Nullfortsetzung $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ von f auf Q, d.h.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in M, \\ 0 & \text{für} \quad x \in Q \setminus M, \end{cases}$$

integrierbar ist. Die Zahl

$$\int_M f(x)dx := \int_Q \tilde{f}(x)dx.$$

heißt dann Integral von f über M (und ist, ebenso wie die Integrierbarkeitseigenschaft von f, nicht von der Wahl von Q abhängig).

Satz: Integrierbarkeit und Darbouxsche Summen Es sei Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{Q_j : \ j = 1, \ldots, m\}$ von Q existiert mit

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon.$$

Dabei heißen die Summen

$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^m \sup_{\xi \in Q_j} f(\xi) \text{ mes } Q_j$$

bzw.

$$U(f, Z) := \sum_{j=1}^m \inf_{\xi \in Q_j} f(\xi) \text{ mes } Q_j$$

Darbouxsche Ober- bzw. Untersumme der Funktion f zur Zerlegung Z, und es gilt

$$\int_Q f(x)dx = \sup_Z U(f, Z) = \inf_Z O(f, Z).$$

Definition: Nullmengen Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern $Q_1, Q_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$M \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty \text{mes } Q_j < \varepsilon.$$

Satz und Definition: Meßbare Mengen und Maß Es sei M eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) ∂M ist eine Nullmenge.
(ii) Die konstante Funktion $x \in M \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ ist integrierbar.
Wenn (i) und (ii) erfüllt sind, so nennt man M meßbar, man definiert

$$\text{mes } M := \int_M dx$$

und nennt diese Zahl Maß von M, und es gilt

$$\text{mes } M = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\text{mes } Q_j : \ Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ Quader, } M \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} Q_j, \ \text{mes } Q_j \cap Q_k = 0 \text{ für alle } j \neq k\right\}.$$

Satz von Lebesgue Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, dann gilt: Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn f beschränkt ist und wenn die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\{x \in M : f \text{ ist in } x \text{ unstetig}\}$ eine Nullmenge ist.

12.2 Rechenregeln

Lemma: Integrierbarkeit und Linearkombinationen Es seien M eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien integrierbar. Dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ integrierbar, und es gilt

$$\int_M (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_M f(x)dx + \mu \int_M g(x)dx.$$

Satz Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ zwei meßbare Mengen. Dann sind auch die Mengen $M \cup N$ und $M \cap N$ meßbar. Wenn ferner $f : M \cup N \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist, so sind auch ihre Einschränkungen $f|_M$, $f|_N$ und $f|M \cap N$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{M\cup N} f(x)dx = \int_M f(x)dx + \int_N f(x)dx - \int_{M\cap N} f(x)dx.$$

Lemma: Integration von Ungleichungen Es sei M eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wenn zwei Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und wenn für alle $x \in M$ gilt $f(x) \leq g(x)$, so gilt auch

$$\int_M f(x)dx \leq \int_M g(x)dx.$$

Lemma: Integralabschätzungen Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar ist und wenn $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, so gilt

$$\inf\{f(x) : x \in M\} \text{ mes } M \leq \int_M f(x)dx \leq \sup\{f(x) : x \in M\} \text{ mes } M.$$

Ferner ist dann auch die Funktion $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\left|\int_M f(x)dx\right| \leq \int_M |f(x)|dx.$$

12.3 Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini

Satz Es seien $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Ferner sei

$$N := \{x \in \mathbb{R}^M : \text{Es existiert ein } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } (x, y) \in M.\},$$

und für alle $x \in N$ sei die Funktion $f(x, \cdot) : M_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\}$ integrierbar. Dann ist auch die Funktion

$$x \in N \mapsto \int_{M_x} f(x, y) dy$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_M f(x, y) dx dy = \int_N \left(\int_{M_x} f(x, y) dy \right) dx.$$

Folgerung Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen, $\varphi_+, \varphi_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\varphi_-(x) \leq \varphi_+(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\psi_+, \psi_- : M_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_-(x) \leq y \varphi_+(x)\} \to \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $\psi_-(x, y) \leq \psi_+(x, y)$ für alle $(x, y) \in M_0$. Dann ist jede stetige Funktion

$$f : M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x),\ \psi_-(x, y) \leq z \leq \psi_+(x, y)\} \to \mathbb{R}$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \left(\int_{\psi_-(x,y)}^{\psi_+(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Folgerung: Gauß'scher Integralsatz für Quader Es seien $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\int_Q \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) dx = \\ &\quad = \sum_{j=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \ldots \int_{a_n}^{b_n} (f_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - \\ &\quad - f_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)) \, dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Satz: Prinzip von Cavalieri Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen, und für jedes $x \in [a, b]$ seien meßbare Mengen $M_x \subset \mathbb{R}^n$ gegeben so dass die Funktion

$$x \in [a, b] \mapsto \text{mes } M_x \in \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Dann ist auch die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in [a, b],\ y \in M_x\}$ meßbar, und es gilt

$$\text{mes } M = \int_a^b \text{mes } M_x dx.$$

12.4 Transformationsformel

Satz Es seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, M eine meßbare Teilmenge von U, $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit $\det g'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ und $f : g(U) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist auch die Menge $g(M)$ meßbar, und es gilt

$$\int_{g(M)} f(y)dy = \int_M f(g(x))|\det g'(x)|dx.$$

Folgerung: Guldinsche Regel Es sei $M \in \mathbb{R}^2$ eine meßbare Menge, und es gelte $x \geq 0$ für alle $(x, z) \in M$. Dann ist auch die entsprechende Rotationsmenge (Rotation um die z-Achse)

$$\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (r, z) \in M, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

meßbar, und es gilt

$$\text{mes}\,\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (r, z) \in M, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} = 2\pi \int_M x dx dz.$$

13 Einführung in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

13.1 Anfangswertaufgaben

In diesem Kapitel sind $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine fixierte Menge und $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ bzw. $g : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ fixierte Abbildungen, und wir betrachten

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{13.1}$$

ein sogenanntes System (gewöhnlicher Differentialgleichungen) n-ter Ordnung (in Normalform), sowie

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \tag{13.2}$$

eine sogenannte (skalare gewöhnlicher Differential-) Gleichung n-ter Ordnung (in Normalform). Funktionen $x : I \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y : I \to \mathbb{R}$ heißen Lösung von (13.1) bzw. (13.2), wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, wenn x bzw. y differenzierbar ist und wenn (13.1) bzw. (13.2) für alle $t \in I$ erfüllt ist, d.h. wenn insbsondere für alle $t \in I$ gilt $x(t) \in U$ bzw. $(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}) \in U$.

Die Anfangswertaufgabe zu dem System (13.1) bzw. zu der Gleichung (13.2) besteht darin, zu gegebenen $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ bzw. $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in U$ eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y : I \to \mathbb{R}$ von (13.1) bzw. (13.2) mit

$$x(t_0) = x_0 \tag{13.3}$$

bzw.

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \tag{13.4}$$

also insbsondere mit $t_0 \in I$, zu finden.

Maximale Lösung Eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y : I \to \mathbb{R}$ von (13.1) bzw. (13.2) heißt maximal, wenn für jede andere Lösung $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ von (13.1) bzw. (13.2) gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $\tilde{x}(t) = x(t)$ bzw. $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle $t \in \tilde{I}$.

Satz: Existenz, Eindeutigkeit und Verhalten am Rand des Definitionsbereiches Es seien U offen, f bzw. g stetig, und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(t,x)$ mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in U$ und $j,k = 1,\ldots,n$ bzw. $\frac{\partial g}{\partial y_k}(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ mit $t \in \mathbb{R}$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in U$ und $k = 0, 1, , \ldots, n-1$ mögen existieren und stetig von t und x bzw. $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ abhängen. Dann gilt:
(i) Es existiert genau eine maximale Lösung von (13.1)(13.3) bzw. (13.2)(13.4).
(ii) Der Definitionsbereich jeder maximalen Lösung ist offen.
(iii) Es sei $U = \mathbb{R}^n$, I sei der Definitionsbereich einer maximale Lösung von (13.1) bzw. (13.2), und es gelte $\sup I < \infty$. Dann folgt

$$\|x(t)\| \to \infty \text{ bzw. } |y(t)| + |y'(t)| + \ldots + |y^{(n-1)}(t)| \to \infty \text{ für } t \uparrow \sup I.$$

13.2 Gleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Unterkapitel betrachten wir Anfangswertaufgaben vom Typ

$$x'(t) = f(x(t))g(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{13.5}$$

mit stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ unf $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einem offenen Intervall $U \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$.

Satz Es sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, $F : U \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$, und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von g. Ferner sei $I \subseteq \mathbb{R}$ das maximale Intervall mit

$$G(I) \subseteq G(t_0) - F(x_0) + F(U) \text{ und } t_0 \in I.$$

Dann ist

$$x : I \to U :\ x(t) := F^{-1}(G(t) - G(t_0) + F(x_0))$$

die maximale Lösung von (13.5).

Bemerkung Die algebraische Gleichung zur Berechnung der Werte $x(t)$ der maximalen Lösung von (13.5) ist

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau, \tag{13.6}$$

und der Definitionsbereich dieser maximalen Lösung ist das größte Intervall I, das t_0 enthält und das die Eigenschaft besitzt, dass für alle $t \in I$ die Gleichung (13.6) eine Lösung $x(t) \in U$ besitzt.

13.3 Lineare Gleichungen und Systeme

In diesem Unterkapitel betrachten wir lineare inhomogene Systeme

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{13.7}$$

mit stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_n$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und die entsprechenden linearen homogenen Systeme

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{13.8}$$

bzw. lineare inhomogene Gleichungen

$$y'(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \tag{13.9}$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und und die entsprechenden linearen homogenen Gleichungen

$$y'(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \tag{13.10}$$

Lemma Jede maximale Lösung von (13.7) bzw. (13.9) ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Im weiteren ist mit "Lösung" stets eine maximale Lösung gemeint, und wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen des linearen homogenem Systems (13.8) bzw. der linearen homogenen Gleichung (13.10).

Satz: Algebraische Struktur der Lösungsmengen (i) Die Menge $\mathcal{L}$ ist ein n-dimensionaler Unterraum im Raum aller Abbildungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(ii) Die Menge aller Lösungen von (13.7) bzw. (13.9) ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum im Raum aller Abbildungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich $x_* + \mathcal{L}$ bzw. $y_* + \mathcal{L}$. Dabei ist $x_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $y_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige fixierte Lösung von (13.7) bzw. (13.10).

Satz: Lineare homogene autonome Systeme Es sei $A(t) = A$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelte

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \text{ mit } \lambda_j \neq \lambda_k \text{ für } j \neq k.$$

Ferner gelte

$$\dim \ker(\lambda_j I - A) = \alpha_j \text{ für } j = 1, \ldots, m$$

d.h. die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A sind gleich den entsprechenden geometrischen Vielfachheiten. Die Eigenwerte seien folgendermaßen geordnet:

$$\lambda_j = \overline{\lambda}_{l+j} \notin \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, l, \quad \text{und} \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 2l+1, \ldots, m.$$

Schließlich seien $v_{j,1}, \ldots, v_{j,\alpha_j}$ linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_j (komplex für $j = 1, \ldots, l$ und reell für $j = 2l+1, \ldots, m$). Dann bilden die folgenden n Funktionen eine Basis in $\mathcal{L}$:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \ \mathrm{Re}v_{j,k} - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \ \mathrm{Im}v_{j,k}) \\ e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \ \mathrm{Im}v_{j,k} + \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \ \mathrm{Re}v_{j,k}) \end{array}\right\} j = 1, \ldots, l, \ k = 1, \ldots, \alpha_j$$

und

$$e^{\lambda_j t} v_{j,k}, \;\; j = 2l+1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, \alpha_j.$$

Satz: Lineare homogene autonome Gleichungen Es sei $a_j(t) = a_j$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $j = 0, 1, \ldots, n-1$, und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelte

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \text{ mit } \lambda_j \neq \lambda_k \text{ für } j \neq k.$$

Ferner seien die Nullstellen folgendermaßen geordnet:

$$\lambda_j = \overline{\lambda}_{l+j} \notin \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, l, \quad \text{und} \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 2l+1, \ldots, m.$$

Dann bilden die folgenden n Funktionen eine Basis in $\mathcal{L}$:

$$e^{\mathrm{Re}\lambda_j t} t^k \cos \mathrm{Im}\lambda_j t, \;\; e^{\mathrm{Re}\lambda_j t} t^k \sin \mathrm{Im}\lambda_j t, \;\; j = 1, \ldots, l, \; k = 1, \ldots, \alpha_j$$

und

$$e^{\lambda_j t} t^k, \;\; j = 2l+1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, \alpha_j.$$