Analysis für Informatiker*innen (SoSe 17)

Übungsblatt 10

Aufgabe 3

Es gilt $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+2\cos x+3)(y^2+2\cos y+3)}$

a) Da $|\cos x| \leq 1$, gilt $\underbrace{x^2}_{\geq 0} + 2\cos x + 3 \geq 1$ (*)
und analog für den zweiten Faktor.
Damit ist der Nenner nie Null und f ist damit auf ganz $\mathbb{R}^2$ wohldefiniert und nach den Rechenregeln für diff'bare Funktionen differenzierbar.

Für die Existenz des Maximums teilen wir (wie schon in anderen Aufgaben) den Definitionsbereich in einen beschränkten, abgeschlossenen Teil ~~auf~~ und einen Rest, auf dem wir sicherstellen, dass f klein bleibt, auf.

Für $(x,y) \notin (-5,5) \times (-5,5)$ gilt $|x| \geq 5$ und damit $x^2 + \underbrace{2\cos x + 3}_{\geq 1} \geq 26$. oder $|y| \geq 5$ und damit $y^2 + \underbrace{2\cos y + 3}_{\geq 1} \geq 26$. Mit (*) folgt damit $f(x,y) \leq \frac{1}{26}$ für $(x,y) \notin (-5,5)^2$.

Andererseits ist $[-5,5] \times [-5,5]$ beschränkt und abgeschlossen ~~auf~~ und f stetig (nach den Rechenregeln für stetige Fkten), also nimmt f auf $[-5,5]^2$ ein Maximum an. Da

$$f(0,0) = \frac{1}{(2\cos 0 + 3)^2} = \frac{1}{25},$$

ist dieses Maximum $\geq \frac{1}{25}$ und damit

$$\max_{(x,y)\in[-5,5]^2} f(x,y) \geq \frac{1}{25} > \frac{1}{26} \geq f(\hat{x},\hat{y}) \quad \forall (\hat{x},\hat{y}) \notin [-5,5]$$

Also ist das Maximum auf $[-5,5]^2$ sogar ein globales Maximum von f auf ganz $\mathbb{R}^2$.

b) Nach den Überlegungen oben muss die Maximalstelle von f in der offenen Menge $(-5,5)\times(-5,5)$ liegen.

Laut VL muss f an dieser Stelle dann einen kritischen Punkt besitzen, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Mit der Faktorisierung des Nenners von oben erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-(2x-2\sin x)}{(x^2+2\cos x+3)^2}\cdot\frac{1}{(y^2+2\cos y+3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(2y-2\sin y)}{(y^2+2\cos y+3)^2}\cdot\frac{1}{(x^2+2\cos x+3)}$$

dh $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \iff 2x-2\sin x = 0$

$\iff x = \sin x.$

$x=0$ löst diese Gleichung und mit analogen Argumenten wie in Satz 45 (Nummerierung laut Skript) sieht man, dass $x \neq \sin x \quad \forall x \neq 0.$

Also $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x = 0$

und analog $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = 0.$

Also ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt und muss damit die Maximalstelle sein.

Das Maximum von f liegt damit bei

$$f(0,0) = \frac{1}{25}.$$