Analysis für Informatiker*innen
Übungsblatt 12

Aufgabe 1.1

(Einfachere Lösung als in der Übung besprochen)

Sei $f: [0;\infty) \to \mathbb{R}$ eine diff'bare Funktion für die $c, d \in \mathbb{R}$ ex. sodass

$$c \cdot f(x) \leq f'(x) \leq d \cdot f(x)$$

Beh: $$f(0)e^{cx} \leq f(x) \leq f(0)e^{dx}.$$

Beweis Betrachte $g: [0;\infty) \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x)e^{-cx}.$$

Dann ist g diff'bar und es gilt

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} + f(x)(-c e^{cx})$$

$$= \underbrace{e^{-cx}}_{>0}\underbrace{(f'(x) - c \cdot f(x))}_{\geq 0 \text{ nach Voraussetzung}}$$

dh $g'(x) \geq 0 \ \forall x \in [0;\infty)$, also ist g monoton wachsend

$\Rightarrow g(x) \geq g(0)$ für alle $x \in [0;\infty)$

$\Rightarrow g(x) \geq f(0) \cdot e^{-c \cdot 0} = f(0)$

$\Leftrightarrow f(x)e^{-cx} \geq f(0)$

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(0)e^{cx} \quad \forall x \in [0;\infty)$

Die andere Abschätzung wird analog bewiesen. $\square$

Analysis für Informatiker*innen

Übungsblatt 12

Aufgabe 4

1. Beh $\ln(x) < x - 1 \quad \forall x \in (0;\infty) \setminus \{1\}$.

Bew. Betrachte $f: (0;\infty) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x - (x-1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Dann gilt:
- Für $x \in (0;1)$ ist $\frac{1}{x} > 1$

  $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f_{|(0;1)}$ monoton wachsend.

- Für $x \in (1;\infty)$ ist $\frac{1}{x} \in (0,1)$

  $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f_{|(1;\infty)}$ monoton fallend

Da andererseits $f(1) = \ln 1 - (1-1) = 0$, folgt

$$f(x) < f(0) = 0 \iff \ln x - (x-1) < 0$$
$$\iff \ln x < x - 1$$

für alle $x \in (0;\infty)\setminus\{1\}$ aus der Monotonie.

2. Beh $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in [0;1)$

Bew Nach den Rechenregeln für Ableitungen gilt, dass f^{-1} diff'bar mit

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$$

wenn f diff'bar an x und f^{-1} stetig.

Da sin diff'bar und arcsin stetig, folgt also

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Wir nennen das Argument nun $y = \sin x$

und erhalten $y^2 = \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = 1 - y^2$

Für $x \in [0,1)$ ist $\cos x > 0$ und damit

$$\cos x = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \arccos'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$