Analysis für Informatiker SoSe 17

ÜBUNGSBLATT 7

Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge der möglichen Kanten

$$M = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x \cdot y = 1\}$$

und die Abbildung

$$U: M \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto 2(x+y),$$

die einem Kantenpaar den Umfang zuordnet.

Wir wollen den Satz aus der Vorlesung nutzen, dass jede stetige Funktion auf einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Die Menge M ist jedoch nicht beschränkt. Wir betrachten daher

$$\hat{M} := M \cap [\tfrac{1}{10}, 10] \times [\tfrac{1}{10}, 10].$$

Ist $x > 10$ und $(x,y) \in M$, so folgt $y < \frac{1}{10}$ und $U(x,y) > 20$. Andererseits ist $U(1,1) = 2$, also ist das Minimum auf $\hat{M}$ höchstens kleiner und somit auf jeden Fall kleiner als $U(x,y)$ für $x > 10$. Analog für $y > 10$.

Es gilt nun

- $\hat{M}$ ist beschränkt (klar).
- $\hat{M}$ ist abgeschlossen: Sei (x,y) eine Folge in $\hat{M}$, dh $\frac{1}{10} \le x(n) \le 10$, $\frac{1}{10} \le y(n) \le 10$ und $x(n) \cdot y(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt dann $\frac{1}{10} \leq \lim(x) \leq 10$, $\frac{1}{10} \leq \lim(y) \leq 10$ und $\lim(x) \cdot \lim(y) = 1$, dh $\lim(x,y) \in \hat{M}$.

Damit nimmt f auf $\hat{M}$ ein Minimum an, d.h. es ex. $(a,b) \in \hat{M}$ so dass $U(a,b) \leq U(x,y) \quad \forall x,y \in \hat{M}$.

Nach den obigen Überlegungen folgt auch

$$U(a,b) \leq U(x,y) \quad \forall x,y \in M.$$

$\blacksquare$

Analysis für Informatiker SoSe 17
ÜBUNGSBLATT 7

Aufgabe 4

1. (Neue Nummerierung) (N, d_N) metr. Raum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und $f: M \to N$ gleichmäßig stetig.

Beh Dann ist f gleichmäßig stetig.

Bew Ang., f wäre nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in M : d(x_\delta, y_\delta) < \delta \text{ und } d_N(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon$$

Insb. ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ x_n und $y_n \in M$ sodass

(*) $$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

1. Schritt Die Folge x besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew Betrachte die Koordinatenabbildungen

$$c_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_j.$$

Dann ist $c_1 \circ x$ eine beschränkt Folge in $\mathbb{R}$, also ex. eine konvergente TF $c_1 \circ x \circ g_1$.

Nun ist $c_2 \circ x \circ g_1$ eine beschränkt Folge in $\mathbb{R}$, also ex. eine konvergente TF $c_2 \circ x \circ g_1 \circ g_2$

Iteration $\Rightarrow$ Wir erhalten eine Teilfolge $x \circ g_1 \circ \dots \circ g_n$

sodass $c_j \circ (x \circ g_1 \circ \dots \circ g_n)$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert auch

$$x \circ g := x \circ g_1 \circ \dots \circ g_n$$

in $\mathbb{Q}^n$. Sei $\xi := \lim (x \circ g)$.

Da M abgeschlossen ist, ist $\xi \in M$.

<u>2. Schritt</u> $\lim (y \circ g) = \xi$ (insb. konvergiert $y \circ g$).

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq n_0$

$$d(x \circ g(n), \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Weiter ex. ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{g(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$.

Dann gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$:

$$d(y \circ g(n), \xi) \leq d(y \circ g(n), x \circ g(n)) + d(x \circ g(n), \xi)$$
$$\overset{(*)}{<} \frac{1}{g(n)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

<u>3. Schritt</u> Da f stetig ist, folgt nun

$$f(\xi) = \lim (f \circ x \circ g) = \lim (f \circ y \circ g)$$

Also ex. ein $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$d(f \circ x(g(n)), f \circ y(g(n))) \leq d(f \circ x(g(n)), \xi)$$
$$+ d(f \circ y(g(n)), \xi)$$
$$< \varepsilon \qquad \forall n \geq \hat{n}_0,$$

was ein Widerspruch zu $(*)$ ist.

Also war unsere Annahme falsch und f muss gleichmäßig stetig sein.

$\blacksquare$

2. $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

- q ist als Polynom stetig laut VL.
- q ist nicht gleichmäßig stetig.

~~Betrachte $x(n) =$ Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$~~

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ beliebig.

Wähle $x = \frac{1}{\delta}$, $y = x + \delta/2 \Rightarrow |x - y| < \delta$,

aber $|q(x) - q(y)| = |(x-y)(x+y)|$

$$= \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 > \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zur gleichmäßigen Stetigkeit. ■