Analysis für Informatiker*innen
ÜBUNGSBLATT 8 (Probeklausur)

Aufgabe 4.2

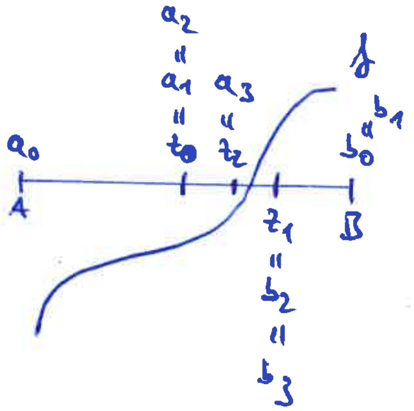
Erinnerung: Das Bisektionsverfahren zum Finden einer Nullstelle.

$f: [A;B] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(A) < 0 < f(B)$

Setze $a_0 := A$, $b_0 := B$. und für alle $m \in \mathbb{N}$

$$z_m := \frac{a_m + b_m}{2}$$ und dann

$$a_{m+1} := \begin{cases} a_m & \text{falls } f(z_m) > 0 \\ z_m & \text{falls } f(z_m) \leq 0 \end{cases}$$



$$b_{m+1} := \begin{cases} b_m & \text{falls } f(z_m) \leq 0 \\ z_m & \text{falls } f(z_m) > 0. \end{cases}$$

Nach Beweis des ZWS gilt

$n \in [a_m, b_m] \quad \forall m \in \mathbb{N}$. ($n$ ist die Nullstelle)

Außerdem ist $b_m - a_m = \frac{1}{2^m} \cdot (B - A)$.

$$\Rightarrow |n - z_m| \leq \frac{1}{2^m}(B-A).$$

Seien nun g_1, g_2 vorgegeben. Dann ist

$$N_1 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid g_1(z_m) < g_1\}$$
$$\leq \min\{m \in \mathbb{N} \mid |n - z_m| < g_1\}$$
$$\leq \min\{m \in \mathbb{N} \mid \tfrac{1}{2^m}(B-A) < g_1\}$$
$$= \min\{m \in \mathbb{N} \mid \left(\tfrac{1}{2}\right)^m < g_1 (B-A)\}.$$

Um $N_2 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid g_2(z_m) < g_2\}$ zu bestimmen, nutzen wir, dass aus der Stetigkeit von f auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[A; B]$ gleichmäßige Stetigkeit folgt. Damit ex. ein $\delta > 0$ sodass

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < g_2/2.$$

Wählt man nun m hinreichend groß, dass

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^m < \delta \quad \text{und} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^m < g_2/2.$$

so folgt für m:

$$|z_m - n| \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^m < g_2/2 \quad \text{und}$$

$$|z_m - n| \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^m < \delta \Rightarrow |f(z_m) - f(n)| = |f(z_m)| < g_2/2,$$

und damit $g_2(z_m) < g_2$.