Tensorprodukt

Sebastian Holtz und Benjamin Obst

Kurzskript zum Proseminar "Normalformen von Matrizen"

Dr. Marko Roczen

31. Oktober 2007

Anmerkung: Die folgenden Seiten entstanden im Zusammenhang mit einem Vortrag über das Tensorprodukt während des Proseminars „Normalformen von Matrizen“ bei Dr. Marko Roczen während des Sommersemesters 2007 an der Humboldt-Universität zu Berlin. Die zwei Kapitel dieses Skripts verstehen sich als Begleitliteratur der Lektüre „Lineare Algebra individuell (Online-Fassung), Band 2“ von Marko Roczen und Helmut Wolter, erschienen 2005 im Lulu-Verlag, Morrisville. Dabei handelt es sich bei dem zweiten Kapitel um eine ausführlichere Ausformulierung der ersten Seiten des Kapitels 4.4* des oben genannten Buches.

Abgesehen von Abbildung 1 und 2 stammen sämtliche Abbildungen aus Dr. Roczen's Buch bzw. dessen Online-Publikation zum Tensorprodukt.

Vergleichen Sie dazu auch folgende Links:

- www.math.hu-berlin.de/∼roczen/papers/tensor.pdf
- www.math.hu-berlin.de/∼roczen/software/la.html

Für weitere Fragen einfach eine Mail an holtz@math.hu-berlin.de.

1 Voraussetzungen

Bevor wir das Tensorprodukt einführen können, benötigen wir zuallererst gewisse Grundkentnisse spezieller Vektorräume, mit Hilfe derer wir später das (kanonische) Tensorprodukt konstruieren. Wir beginnen mit folgender

Definition: Sei M eine nichtleere Menge und K ein Körper. Dann heißt

$$K^M := Abb(M, K)$$

der Vektorraum aller Abbildungen von M nach K, gegeben durch Abbildungen $f : M \longrightarrow K$. Im folgenden werden wir K^M als *den* K^M bezeichnen.

Bemerkung: Man sieht leicht, dass dadurch ein Vektorraum gegeben ist, da man für Abbildungen $f_1, f_2 \in K^M$ und $x \in M$ durch

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$
$$k(f_1)(x) := f_1(kx)$$

eine Vektoraddtion und Skalarmultiplikation mit $k \in K$ definieren kann.

Betrachten wir nun folgende Abbildungen $\delta_{mx} \in K^M$ für $m, x \in M$ mit

$$\delta_{mx} : M \longrightarrow K$$
$$m \longmapsto \delta_m := \begin{cases} 1 & m = x \\ 0 & sonst \end{cases}$$

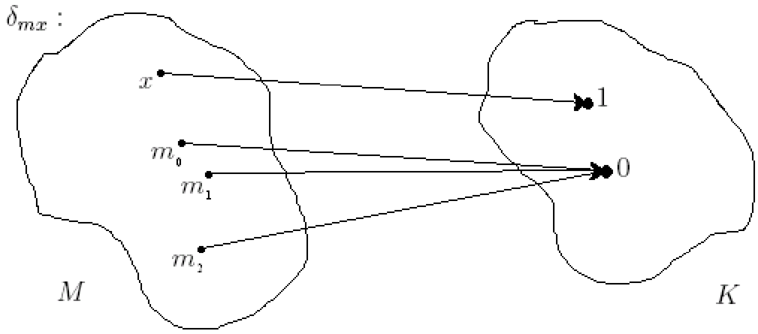

Abbildung 1: Die obige Abbildung bildet bis auf ein m alle Elemente von M auf 0 ab

Bemerkung: Durch folgende Abbildung Φ ist es uns möglich jedes $m \in M$ mit seinem zugehörigen δ_{mx} - ab sofort kurz: δ_m - zu identifizieren:

$$\Phi : M \longrightarrow K^M$$
$$m \longmapsto \delta_m$$

Offensichtlich ist Φ injektiv. Wir setzen Φ gleich „$\subseteq$“, d.h. wir betrachten Φ als Einbettung von M im K^M.

Nun wenden wir unseren Blick einer ganz konkreten Teilmenge des K^M zu.

Definition: Sei M wieder eine nichtleere Menge und K ein Körper. Dann bezeichnet

$$K^{(M)} \subseteq K^M$$

den Vektorraum aller Abbildungen $f \in K^M$ mit $f(m) = 0$ für fast alle $m \in M$, d.h. nur endlich viele Elemente aus M werden auf Körperelemente $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ungleich null abgebildet.

Bemerkung: Jede Abbildung $f \in K^{(M)}$ lässt sich durch endlich viele δ_m darstellen, d.h. M bzw. $im(\Phi)$ bildet insbesondere eine Basis des $K^{(M)}$:

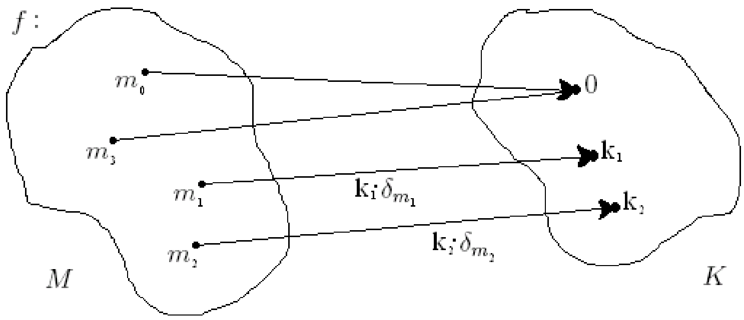

Abbildung 2: Konstruierung von f durch endlich viele δ_m

Abschließend formulieren wir noch den Begriff der p-linearen Abbildung und können uns anschließend dem Tensorprodukt widmen.

Definition: Seien $V_1, V_2, \ldots, V_p, W$ Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \longrightarrow W$$

heißt p-linear, falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ und alle $v_j \in V_j$ mit $j \neq i$ die Abbildung

$$\begin{aligned} V_i &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_p) \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von K-Vektorräumen ist, d.h. falls φ in jedem Argument linear ist.

Für „$p = 2$" bezeichnen wir φ als bilineare Abbildung. Wir führen das Tensorprodukt zunächst für bilineare Abbildungen ein und betrachten für die in diesem Kapitel verwendete Menge M den Fall $M = V \times W$, wobei V und W Vektorräume über einem Körper K sind und deren Kreuzprodukt $V \times W$ bekanntlich wieder einen K-Vektorraum bildet.

2 Definition, Existenz und Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Definition: Seien V, W, T, P K-Vektorräume, sowie $t : V \times W \longrightarrow T$ eine bilineare Abbildung mit der folgenden (Universal-)Eigenschaft:
Ist $f : V \times W \longrightarrow P$ bilinear, dann existiert genau eine bilineare Abbildung

$$\varphi : T \longrightarrow P$$

mit

$$\varphi \cdot t = f,$$

d.h. für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & P \\ & T \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ein solches Paar (T, t) oder kurz T heißt Tensorprodukt von V und W über K.

Satz: Zu jedem Paar (V, W) von K-Vektorräumen existiert ein Tensorprodukt (T, t). Es ist bis auf (kanonische) Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. für jedes Tensorprodukt (T', t') von V und W findet sich ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\psi : T \longrightarrow T'$, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & & T' \\ & T \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Darüber hinaus gibt es eine kanonische Konstruktion, die unter den (isomorphen) Tensorprodukten von V und W ein konkretes auswählt, es wird von nun an auch *das* Tensorprodukt von V und W genannt.

Beweis:
(Eindeutigkeit) Seien also T, T' Tensorprodukte von V und W mit der Universaleigenschaft. Aus ebendieser folgt, dass eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$\psi : T \longrightarrow T' \text{ und } \psi' : T' \longrightarrow T$$

existieren, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& T' \arrow[dr, "\psi'"] & \\
T \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, dotted, "\sigma"] & & T \\
& V \times W \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "t'"'] \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist für das Tensorprodukt (T, t) von V und W der Homomorphismus

$$\sigma = \psi' \cdot \psi : T \longrightarrow T \text{ mit } \sigma \cdot t = t$$

eindeutig bestimmt. Gleiches gilt jedoch auch für

$$id_T \cdot t = t$$

und die Eindeutigkeit von σ ergibt:

$$\sigma = id_T, \text{ d.h. } \psi' \cdot \psi = id_T.$$

Analog kann man $\psi \cdot \psi' = id_{T'}$ schlussfolgern und somit ist ψ ein Isomorphismus, d.h. alle Tensorprodukte stehen in Bijektion zueinander.

(Existenz) Betrachten wir zunächst die Einbettungsabbildung:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V \times W)} & \\
& V \times W \arrow[ul, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

und die Menge $U \subseteq K^{(V\times W)}$, die von allen Vektoren der Form

$$\begin{gathered}
(v+v', w) - (v, w) - (v', w) \\
(v, w+w') - (v, w) - (v, w') \\
(av, w) - a(v, w), (v, aw) - a(v, w)
\end{gathered}$$

mit $v, v' \in V, w, w' \in W, a \in K$ erzeugt wird.

Achtung: Hierbei handelt es sich um Elemente des $K^{(V\times W)}$, also um Abbildungen und zwar genau um die, welche den jeweiligen Vektorpärchen bei der Einbettung zugeordnet werden. Eine präzisere Schreibweise von U wäre

$$\delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)} \text{ usw.}$$

Da der Span bzw. die lineare Hülle von Vektoren eines Vektorraums V einen Unterraum W aufspannt (nämlich genau den kleinsten Unterraum, der all diese Vektoren enthält) können wir nun den $K^{(V\times W)}$ nach U ausfaktorisieren und setzen

$$T := K^{(V\times W)}/U.$$

Weiter bezeichnen wir durch π die kanonische, surjektive Projektion vom $K^{(V\times W)}$ nach T, die jedem Element des $K^{(V\times W)}$ seine Äquivalenzklasse bezüglich U zuordnet:

$$\pi : K^{(V\times W)} \longrightarrow T = K^{(V\times W)}/U$$

$$\begin{tikzcd}
K^{(V\times W)} \arrow[rd, "\pi"] & \\
 & T \\
 & V \times W \arrow[luu, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

Mit t bezeichnen wir nun die Hintereinanderausführung der Einbettung mit der Projektion und erhalten:

$$t : V \times W \longrightarrow T = K^{V\times W}/U.$$

$$\begin{tikzcd}
K^{(V\times W)} \arrow[dr, "\pi"] & \\
& T \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Wahl von U ist t bilinear, da z.B. für $v, v' \in V, w \in W$

$$t((v+v',w)-(v,w)-(v',w)) = \delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)} \in U, \text{ d.h.}$$
$$t((v+v',w)-(v,w)-(v',w)) = \overline{0} + U \text{ folgt}$$

und somit $(v+v',w)-(v,w)-(v',w)$ durch t auf das Nullelement von T abgebildet wird, also gilt

$$t(v+v',w) = t((v,w)+(v',w)) = t(v,w) + t(v',w).$$

Somit haben wir also einen Kandidaten (T,t) für unser Tensorprodukt konstruiert. Nun muss lediglich noch bewiesen werden, dass (T,t) die Universaleigenschaft des Tensorprodukts besitzt, d.h. wir haben für eine beliebige bilineare Abbildung

$$f : V \times W \longrightarrow P$$

zu zeigen, dass eine eindeutig bestimmte, lineare Abbildung

$$\varphi : T \longrightarrow P$$

mit

$$f = \varphi \cdot t$$

existiert:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V\times W)} \arrow[dr, "\pi"] & & P \\
& T \arrow[ur, dotted, "\varphi"] & \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"'] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Wie wir aus Kapitel 1 wissen, bildet $V \times W$ eine Basis des $K^{(V \times W)}$ und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung folgt damit, dass eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\sigma : K^{(V \times W)} \longrightarrow P$$

mit

$$\sigma(v, w) = f(v, w)$$

für $v \in V, w \in W$ existiert. Es kommutiert das äußere Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V \times W)} \arrow[rr, dotted, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"] & & P \\
& T & \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"'] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Da f bilinear ist, gilt dies auch für σ. Dadurch werden alle Elemente aus U (U wurde gerade so gewählt) auf 0 abgebildet, d.h.

$$U \subseteq ker(\sigma).$$

Daraus folgt, dass σ in die kanonische Projektion π eine lineare Abbildung

$$\varphi : T \longrightarrow P$$

mit

$$\sigma = \varphi \cdot \pi$$

faktorisiert. Somit kommutiert das gesamte Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V \times W)} \arrow[rr, dotted, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"] & & P \\
& T \arrow[ur, dotted, "\varphi"] & \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"'] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Um die Eindeutigkeit von φ zu beweisen nehmen wir an, es gäbe ein zweites

$$\varphi' : T \longrightarrow P$$

mit

$$f = \varphi' \cdot t.$$

Aufgrund der linearen Fortsetzung gilt somit aber auch

$$\sigma = \varphi' \cdot \pi.$$

Daher erhalten wir

$$\varphi \cdot \pi = \sigma = \varphi' \cdot \pi$$

und mit Hilfe der Surjektivität von π können wir die Gleichung

$$\varphi \cdot \pi = \varphi' \cdot \pi$$

„von rechts kürzen“ und erhalten

$$\varphi = \varphi'.$$

$\square$

Für alle weiteren Informationen zum Tensorprodukt verweisen wir auf das eingangs erwähnte Kapitel 4.4*.