HÖHERE ANALYSIS I

Mitschrift zur Vorlesung von Professor Friedrich im Wintersemester 2002/03

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung

15.10.2002

normierter Raum $(E, \|.\|)$

Definition 0.1. Ein <u>normierter Raum</u> ist ein Paar $(E, \|.\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E und einer Abbildung $\|.\| : E \to [0, \infty)$ mit

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
(3) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Metrik $d(.,.)$

Durch die Norm wird eine <u>Metrik</u> (Abstand) induziert:

$$\boxed{d(x, y) := \|x - y\|}$$

Dadurch wird E zu einem <u>metrischen Raum</u>.

Banachraum

Definition 0.2. $(E, \|.\|)$ heißt <u>Banachraum</u>, falls er bezüglich der von $\|.\|$ induzierten Metrik vollständig ist.

separabel

Ein Banachraum (B, d) heißt <u>separabel</u>, falls es eine abzählbare Menge A in B mit $\bar{A} = B$ gibt.

Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$

Definition 0.3. Ein Raum mit <u>Skalarprodukt</u> ist ein Paar $(E, \langle .,. \rangle)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E und einer Abbildung $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ mit

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
(3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle \ \forall \lambda \in K, x, y \in E$
(4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

In $(E, \langle .,. \rangle)$ wird eine <u>Norm</u> durch

$$\boxed{\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}}$$

definiert. Dies liefert dann wiederum eine <u>Metrik</u>.

Cauchy-Schwarze-Ungleichung

Lemma 0.4. *Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung:*

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Hilbert-Raum

Definition 0.5. $(E, \langle .,. \rangle)$ heißt <u>Hilbert-Raum</u>, falls E bzgl. der von $\langle .,. \rangle$ induzierten Metrik vollständig ist.

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Beispiel. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

$$\boxed{\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : X \to \bar{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\} \,\middle|\, f \text{ ist } \mathcal{A} - \text{meßbar}, \ \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}}$$

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Äquivalenzrelation: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall (d.h. bis auf eine Menge vom Maß Null).

$$\boxed{L^p(X, A, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim}$$

$\|.\|_p$

Dies ist automatisch ein normierter Raum mittels

$$\boxed{\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_X |f|^p \, d\mu}}$$

Aus der Analysis bekannt: Für $1 \leq p < \infty$ ist L^p ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist L^2 mit dem Skalarprodukt

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu}$$

ein Hilbertraum.

Spezialfälle:

(1) $X = \mathbb{R}^n$, K Kompaktum $\subset \mathbb{R}^n$, Ω offen $\subset \mathbb{R}^n$
$\mathcal{A} = \sigma$-Algebra der Borel-meßbaren Mengen
$\mu =$ Lebesgue-Maß

(2) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Potenzmenge, $\mu(A) = |A|$.
$f : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{K}}$ ist $\mathcal{A}$-meßbar, gdw. f endlich ist. l^p

$$\boxed{l^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)}$$

$$l^p = \left\{ f : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{K}} \,\middle|\, f \text{ endlich}, \int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

Eine solche Funktion kann identifiziert werden mit einer Folge $x_1 := f(1)$, $x_2 := f(2)$, ...
(Die Äquivalenzrelation $\sim$ ist hier trivial!)

$$\boxed{l^p := \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}}$$

Bemerkung. Der abstrakte L^p-Raum $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist nicht notwendig separabel ($\rightsquigarrow$ Begriff des "seperablen Maßraumes"). Alle l^p sind separabel.

Beispiel. (X, d) sei ein kompakter Raum. $\mathcal{C}(X)$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(X) & := & \{f : X \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ stetig}\} \\ \|f\| & := & \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \end{array}}$$

Analysis-Vorlesung: (X, d) mit dieser Norm ist ein Banachraum.

Definition 0.6. Sei $(B, \|.\|)$ ein Banachraum. Der <u>topologische Dualraum</u> von B ist top. Dualraum B^*

$$\boxed{B^* := \{L : B \to \mathbb{K} \,|\, L \text{ linear und stetig}\}}$$

Satz 0.7. *Ein lineares Funktional $L : B \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, falls ein $a > 0$ existiert mit*

$$\boxed{|L(x)| \leq a \cdot \|x\| \;\forall x \in B}$$

Beweis. Beschränktheit $\rightsquigarrow$ Stetigkeit: klar

Sei L stetig, insbesondere stetig in 0, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B, \|x\| < \delta : \quad |L(x)| \leq \varepsilon \;.$$

Wähle $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} |L(x)| &= \left| L\left(\frac{\|x\|}{\delta} \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \delta \right) \right| \\ &= \frac{\|x\|}{\delta} \cdot \underbrace{\left| L\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \delta \right) \right|}_{\leq 1 (= \varepsilon)} \\ &\leq \frac{\|x\|}{\delta} \end{aligned}$$

Mit $a = \frac{1}{\delta}$ folgt die Behauptung.

□

Operatornorm von L:

$$\boxed{\|L\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}}$$

$$\|L\| = \inf\{a \,|\, \|L(x)\| \leq a \cdot \|x\| \;\forall x \in B\}$$ Operator-norm $\|L\|$

Satz 0.8. *Der Raum B^* mit Operatornorm ist ein Banachraum.*

Beweis. Sei $L_n \in B^*$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n, m \geq N : \|L_n - L_m\| \leq \varepsilon.$$

Nach Definition der Operatornorm heißt dies:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0\, \forall n, m \geq N : |L_n(x) - L_m(x)| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

Für jedes feste $x \in B$ ist also $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Wir setzen

$$L(x) := \lim_{n\to\infty} L_n(x).$$

Auf jeden Fall ist L linear, und im Limes $n \to \infty$ folgt:

$$|L_n(x) - L(x)| \quad \leq \quad \varepsilon \cdot \|x\|$$

d.h. $L_n - L$ ist beschränkt, also stetig. Damit ist $L \in B^*$ und L_n konvergiert gegen L in B^*.

□

Riesz-Satz **Satz 0.9.** *(Riesz) Der topologische Dualraum eines Hilbertraumes ist wieder ein Hilbertraum.*

Zurück zu $\mathcal{C}(X)$:

Sei $x_0 \in X$. Wir definieren das lineares Funktional $\psi_{x_0} : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{K}$:

$$\psi_{x_0}(f) := f(x_0).$$

ψ_{x_0} ist beschränkt: $|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\| \rightsquigarrow \psi_{x_0}$ stetig.

Sei

$$\boxed{\mathcal{C}(X; x_0) := \ker \psi_{x_0} = \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, f(x_0) = 0\}}$$

Weil ψ_{x_0} stetig ist, ist $\ker \psi_{x_0}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{C}(X)$, insbesondere also selber wieder ein Banachraum.

Sei $A \subset X$ beliebig,

$$\boxed{\mathcal{C}(X; A) := \bigcap_{x_0 \in A} \mathcal{C}(X; x_0)}$$

ist wieder abgeschlossen, also ein Banachraum.

Spezialfälle: $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ ist ein kompakter Raum.

Eine stetige Funktion $X \to \mathbb{K}$ ist eine Folge $x_1 := f\left(\frac{1}{1}\right)$, $x_2 := f\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$ derart, daß

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\mathfrak{c}$

$$\boxed{\mathfrak{c} := \mathcal{C}(X) \cong \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \middle| x_i \in \mathbb{K}, \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert} \right\}}$$

Betrachte $\mathcal{C}(X; 0)$. In diesem Raum gilt

$$0 = f(0) = \lim_{i\to\infty} x_i$$

$\mathfrak{c}_0$

$$\boxed{\mathfrak{c}_0 := \mathcal{C}(X; 0) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \middle| x_i \in \mathbb{K}, \lim_{i\to\infty} x_i = 0 \right\}}$$

$\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_0$ sind Banachräume.

1. Banach-Räume

17.10.2002

Stefan Banach (1892-1945)

1.1. Endlich-dimensionale normierte Räume.

Definition 1.1. E sei ein fixierter Vektorraum, $\|,\|_1, \|.\|_2 : E \to [0,\infty)$ zwei Normen. Die Normen heißen äquivalent, falls Konstanten $m, M > 0$ derart existieren, daß für alle $x \in E$ gilt: äquivalente Normen

$$\boxed{m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1}$$

Satz 1.2. *Ist $(E, \|.\|_1)$ ein Banachraum und $\|.\|_2$ äquivalent zu $\|.\|_1$, so ist $(E, \|.\|_2)$ gleichfalls ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $x_1, x_2, \ldots$ eine $\|.\|_2$-Cauchy-Folge

$$\begin{array}{rl} & \rightsquigarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : \; d_2(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon \\ (m\|x\|_1 \leq \|x\|_2) & \rightsquigarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : \; \|x_n - x_m\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{m} \\ & \rightsquigarrow \quad x_1, x_2, \ldots \text{ ist } \|.\|_1 - \text{Cauchy-Folge.} \\ ((E, \|.\|_1) \text{ ist Banach-Raum}) & \rightsquigarrow \quad \exists x^* \in E \text{ mit } x_n \to x^* \text{ in } \|.\|_1 \\ & \rightsquigarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : \; \|x^* - x_n\|_1 < \varepsilon \\ & \rightsquigarrow \quad x_1, x_2, \ldots \text{ konvergiert gegen } x^* \text{ in } \|.\|_2 - \text{Norm.} \end{array}$$

□

Satz 1.3. *Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum (reell oder komplex). Je zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ sind äquivalent.*

Folgerung. Jeder endlich-dimensionale normierte Raum $(E, \|.\|)$ ist ein Banach-Raum.

Beweis. Sei $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ eine algebraische Basis in E. Wir definieren eine dritte Norm in E durch

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \right\|_3 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2}$$

Wir zeigen: $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ sind äquivalent zu $\|.\|_3$.

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^n \; (\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}^1$,

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|_1$$

- f ist stetig
- $f|_{S^{n-1}} > 0$ in allen Punkten; $S^{n-1} = \{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) | \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1 \} \subset \mathbb{R}^n$
- Satz von Weierstraß:

$$\begin{array}{rcl} 0 < m & := & \inf\limits_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S^{n-1}} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ M & := & \sup\limits_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S^{n-1}} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

Sei $0 \neq x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ ein beliebiger Vektor aus E, so gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} \cdot \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2}} \right\|_1 \\
&= \|x\|_3 \cdot f \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2}}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2}} \right)}_{\in S^{n-1}} \\
&\rightsquigarrow \quad m \|x\|_3 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_3
\end{aligned}$$

□

Folgerung. Sei $(E, \|.\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum und sei $F \subset E$ ein linearer Teilraum. Dann ist $F \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge.

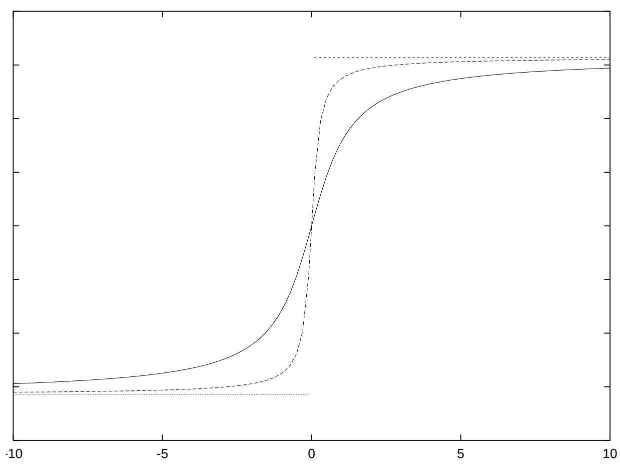
Beispiel. Die letzte Folgerung ist nicht allgemeingültig:

$$\begin{aligned}
E = L^2[0,1] &= \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ integrierbar}, \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \\
\|f\| &= \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}
\end{aligned}$$

$(L^2, \|.\|)$ ist ein Banach-Raum.

$\mathcal{C}[0,1] =$ Raum aller stetigen Funktionen $\subset E = L^2[0,1]$.

Bemerkung. $\mathcal{C}[0,1] \subset L^2[0,1]$ ist <u>keine</u> abgeschlossene Teilmenge.



$f_n \in \mathcal{C}[0,1]$, $f_n \to f$ in L^2 und $f \notin \mathcal{C}[0,1]$

1.2. Kompakte und präkompakte Mengen in Banach-Räumen.

Lemma 1.4. *Sei $(E, \|.\|)$ ein beliebiger normierter Raum. $E_0 \subset E$ ein abgeschlossener Halbraum, $E_0 \neq E$.*

Dann gilt: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein Vektor $x_\varepsilon \in E$ mit

(1) $\|x_\varepsilon\| = 1$.
(2) $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, E_0) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis. Wähle $x_0 \in E \setminus E_0$. Dann ist $\operatorname{dist}(x_0, E_0) > 0$, weil E_0 abgeschlossen ist.

$$\rho := \operatorname{dist}(x_0, E_0) = \inf_{e_0 \in E_0} \|x_0 - e_0\|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle zu $\varepsilon > 0$ die Zahl η mit

$$\frac{\eta}{\rho + \eta} < \varepsilon \qquad (*)$$

Weiterhin wählen wir $e_0^* \in E_0$ mit

$$\rho \leq \|x_0 - e_0^*\| \leq \rho + \eta \qquad (**)$$

Setze

$$x_\varepsilon := \frac{x_0 - e_0^*}{\|x_0 - e_0^*\|}$$

Dann gilt:

(1) $x_\varepsilon \in E$
(2) $\|x_\varepsilon\| = 1$.
(3) zu zeigen: $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, E_0) \geq 1 - \varepsilon$.
Wähle $e_0 \in E_0$ beliebig und betrachte

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon - e_0\| &= \left\| \frac{x_0 - e_0^*}{\|x_0 - e_0^*\|} - e_0 \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_0 - e_0^*\|} \cdot \Bigg\| x_0 - \overbrace{\underbrace{e_0^*}_{\in E_0} - \|x_0 - e_0^*\| \underbrace{e_0}_{\in E_0}}^{\in E_0, \text{ da lin. Teilraum}} \Bigg\| \\
&\geq \frac{1}{\|x_0 - e_0^*\|} \cdot \operatorname{dist}(x_0, E_0) \\
&= \frac{1}{\|x_0 - e_0^*\|} \cdot \rho \\
&\overset{(**)}{\geq} \frac{\rho}{\rho + \eta} \\
&= \frac{\eta + \rho}{\rho + \eta} - \frac{\eta}{\rho + \eta} \\
&= 1 - \frac{\eta}{\rho + \eta} \\
&\overset{(*)}{\geq} 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

Konsequenz: $\forall e_0 \in E_0 : \|x_\varepsilon - e_0\| \geq 1 - \varepsilon \rightsquigarrow \operatorname{dist}(x_\varepsilon, E_0) \geq 1 - \varepsilon$.

□

Bezeichnung: $(E, \|.\|)$ normierter Raum, $x_0 \in E, \varepsilon > 0$. $\mathcal{K}(x_0, \varepsilon)$, $\overline{\mathcal{K}(x_0, \varepsilon)}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(x_0, \varepsilon) &:= \{x \in E \,|\, \|x_0 - x\| < \varepsilon\} \\
\overline{\mathcal{K}(x_0, \varepsilon)} &:= \{x \in E \,|\, \|x_0 - x\| \leq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

E endl.dim. $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{K}(x_0,\varepsilon)}$ kompakt

Satz 1.5. *Sei $(E, \|.\|)$ ein beliebiger, normierter Raum (nicht unbedingt vollständig). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) *E ist endlich-dimensional*
(2) *Alle abgeschlossenen Kugeln $\overline{\mathcal{K}(x_0,\varepsilon)}$ sind kompakt.*
(3) *Es existiert eine Kugel $\overline{\mathcal{K}(x_0,\varepsilon)}$ mit positivem Radius $\varepsilon > 0$, die kompakt ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) trivial

(3) $\Rightarrow$ (1) ist äquivalent zu folgender Aussage: Ist E nicht endlich-dimensional, so ist keine Kugel $\overline{\mathcal{K}(x_0,\varepsilon)}$ mit positivem Radius $\varepsilon > 0$ kompakt.

Sei E ein normierter Raum, $\dim E = \infty$.

Wähle $e_1 \in E$ mit $\|e_1\| = 1$. Bilde $E_1 = \operatorname{Lin}(e_1)$ (lineare Hülle von e_1)

Aber: $E_1 \neq E$. Wende letztes Lemma auf $E_1, \varepsilon = \frac{1}{2}$, an: $\exists e_2 \in E$, $\|e_2\| = 1$, $\operatorname{dist}(e_2, E_1) \geq 1-\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow \|e_1 - e_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Bilde $E_2 = \operatorname{Lin}(e_1, e_2)$.

Aber: $E_2 \neq E$. Wende letztes Lemma auf E_2 und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ an: $\exists e_3 \in E$, $\|e_3\| = 1$, $\operatorname{dist}(e_3, E_2) \geq \frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow \|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|e_3 - e_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Damit entsteht eine Folge $e_1, e_2, e_3, \ldots \in E$ mit

$$\|e_i\| = 1 \text{ und } \|e_i - e_j\| \geq \frac{1}{2},\ i \neq j.$$

Sei $\mathcal{K}(x_0,\varepsilon)$ eine beliebige Kugel. Betrachte

$$x_n = x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot e_n \in \mathcal{K}(x_0,\varepsilon)$$

mit $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{4}\varepsilon$. Damit enthält $x_1, x_2, \ldots$ keine konvergente Teilfolge!

$\rightsquigarrow \mathcal{K}(x_0,\varepsilon)$ ist nicht präkompakt.

□

präkompakt

22.10.2002

Definition 1.6. Sei $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt präkompakt, falls ihre abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ kompakt ist.

Bemerkung. Mit anderen Worten: Aus jeder Folge $a_1, a_2, \ldots \in A$ kann eine in E konvergente Teilfolge ausgewählt werden - aber der Grenzwert muß nicht in A liegen!

Beweis. ($\Rightarrow$) trivial

($\Leftarrow$) Sei $x_1, x_2, \ldots \in \bar{A}$. Dann existieren Elemente $a_1, a_2, \ldots \in A$ mit

$$\begin{aligned} \|x_1 - a_1\| &< 1 \\ \|x_2 - a_2\| &< \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge in A. Nach Voraussetzung ex. eine Teilfolge $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots \to x^* \in E$.

Wir betrachten nun $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$. Dann gilt

$$\left\|x_{n_j} - x^*\right\| \leq \left\|x_{n_j} - a_{n_j}\right\| + \left\|a_{n_j} - x^*\right\| \leq \frac{1}{n_j} + \left\|a_{n_j} - x^*\right\| \to 0 + 0 = 0, \text{ d.h. } x_{n_j} \to x^*.$$

□

Definition 1.7. $A \subset E$ sei eine beliebige Teilmenge. Ein endliches ε-Netz von A ist eine endliche Familie von Kugeln $\mathcal{K}(x_1, \varepsilon), \mathcal{K}(x_2, \varepsilon), \ldots, \mathcal{K}(x_n, \varepsilon)$ mit endl. ε-Netz

$$\boxed{A \subset \mathcal{K}(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup \mathcal{K}(x_n, \varepsilon)}$$

Satz 1.8. *(Präkompaktheitskriterium von Hausdorff): Eine Teilmenge $A \subset E$ ist genau dann präkompakt, falls A zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz besitzt.*

Beweis.

($\Rightarrow$): Angenommen, es existiert $\varepsilon_0 > 0$ derart, daß A kein ε_0-Netz hat.
Wähle $a_1 \in A$ beliebig. Dann gilt $\mathcal{K}(a_1, \varepsilon_0) \not\supseteq A$, d.h. es ex. $a_2 \in A \setminus \mathcal{K}(a_1, \varepsilon_0)$.
Somit gilt: $\|a_1 - a_2\| \geq \varepsilon_0$.
Erneut gilt $\mathcal{K}(a_1, \varepsilon_0) \cup \mathcal{K}(a_2, \varepsilon_0) \not\supseteq A$, d.h. es ex. $a_3 \in A \setminus (\mathcal{K}(a_1, \varepsilon_0) \cup \mathcal{K}(a_2, \varepsilon_0))$.
Somit gilt: $\|a_1 - a_3\| \geq \varepsilon_0$, $\|a_2 - a_3\| \geq \varepsilon_0$.
Damit entsteht eine Folge $a_1, a_2, \ldots \in A$ mit $\|a_i - a_j\| \geq \varepsilon_0 > 0 \ (i \neq j)$.
Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ besitzt keine konvergente Teilfolge. Dann ist A nicht präkompakt.

($\Leftarrow$): Voraussetzung: A besitze für jede $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz.
Wir betrachten eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in A$. $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
$\varepsilon = 1$: Es ex. endlich viele Kugeln $\mathcal{K}_1^1, \ldots, \mathcal{K}_{m_1}^1$ mit Radius 1 und $A \subset \mathcal{K}_1^1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_{m_1}^1$. Sei $\mathcal{K}_1$ eine Kugel, welche unendlich viele Elemente der Folge $x_1, x_2, \ldots$ enthält. Diese Teilfolge sei $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$: Es ex. endlich viele Kugeln $\mathcal{K}_1^2, \ldots, \mathcal{K}_{m_2}^2$ von Radius $\frac{1}{2}$ mit $A \subset \mathcal{K}_1^2 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_{m_2}^2$. Sei $\mathcal{K}_2$ diejenige Kugel, welche unendlich viele Elemente aus $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots$ enthält. Diese Teilfolge von $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots$ bezeichnen wir mit $x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \ldots$.
Damit entsteht:

(1) Ein System von Kugeln $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \ldots$ mit $\operatorname{diam}(\mathcal{K}_i) \leq \frac{2}{i}$.
(2) Teilfolgen $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \ldots$ in $\mathcal{K}_i$.

Bilde $x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, \ldots$. Dies ist eine Teilfolge von $x_1, x_2, \ldots$.
Zu zeigen: Diese Folge ist konvergent.
Wir wissen: $x_{i,i} \in \mathcal{K}_i$, $x_{i+1,i+1} \in \mathcal{K}_i$, ...
Damit gilt:

$$\|x_{i,i} - x_{j,j}\| \leq \operatorname{diam}(\mathcal{K}_i) \leq \frac{2}{i} \quad \forall j \geq i$$

$\rightsquigarrow x_{1,1}, x_{2,2}, \ldots$ ist eine Cauchy-Folge in E. Da E vollständig ist, konvergiert $x_{1,1}, x_{2,2}, \ldots$.

□

Banach-Raum $\mathcal{C}(X)$:

(X, d) sei ein kompakter metrischer Raum.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &:= \left\{ f : X \to \mathbb{R}^1 \text{ oder } \mathbb{C}^1 \mid f \text{ ist stetig} \right\} \\ \|f\|_{\mathcal{C}(X)} &:= \sup_{x \in X} |f(x)| \overset{\text{Weierstraß}}{=} \max_{x \in X} |f(x)| \text{ Norm in } \mathcal{C}(X) \end{aligned}$$

Dann ist $\left(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{C}(X)}\right)$ ein Banach-Raum.

Definition 1.9. Eine Familie $f_\alpha : X \to \mathbb{R}^1$ von Funktionen $(\alpha \in A)$ heißt gleichmäßig beschränkt, falls eine Zahl $\mathcal{M}$ mit glm. beschränkt

$$\boxed{|f_\alpha(x)| \leq \mathcal{M}}$$

für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in A$ existiert.

Definition 1.10. Eine Familie von Funktionen $f_\alpha : X \to \mathbb{R}^1$ heißt gleichgradig stetig, falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X, d(x,y) < \delta \,\forall \alpha \in A : |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon}.$$

gleichgr. stetig

Bemerkung. X sei ein beliebiger metrischer Raum.

(1) $f : X \to \mathbb{R}^1$ stetige Funktion:
$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 : \forall y \in X, d(x,y) < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
(2) $f : X \to \mathbb{R}^1$ gleichmäßig stetig:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x) > 0 : \forall y_1, y_2 \in X, d(y_1, y_2) < \delta : |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$$

Heine

Satz 1.11. *(Heine): Jede (einfach) stetige Funktion definiert auf einem kompakten metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Arzela-Ascoli

Satz 1.12. *(Arzela-Ascoli): (X, d) sei ein kompakter metrischer Raum. $\mathcal{C}(X)$ sei der Banachraum der stetigen Funktionen. $Z = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}(X)$.*

Z ist präkompakt $\Leftrightarrow$ die Funktionenfamilie $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis.

($\Rightarrow$): $Z \subset \mathcal{C}(X)$ sei präkompakt. $\rightsquigarrow \bar{Z}$ ist kompakt $\rightsquigarrow Z \subset \bar{Z}$ ist beschränkt in E.
$\rightsquigarrow \exists \mathcal{M} : Z \subset \mathcal{K}(0, \mathcal{M})$
$\rightsquigarrow \exists \mathcal{M} \forall f_\alpha : \|f_\alpha\|_{C(X)} \leq \mathcal{M}$
$\rightsquigarrow \exists \mathcal{M} : \forall \alpha \in A \forall x \in X : |f_\alpha(x)| \leq \mathcal{M}$
$\rightsquigarrow \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist gleichmäßig beschränkt.
$Z \subset \mathcal{C}(X)$ sei präkompakt. Fixiere ein $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\frac{1}{3}\varepsilon$-Netz für Z, d.h. es ex. Funktionen $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{C}(X)$ mit
$$Z \subset \mathcal{K}\left(u_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \ldots \cup \mathcal{K}\left(u_m, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$
$u_1, \ldots, u_m$ sind stetig, X ist kompakt und es sind nur endlich viele. Also existiert ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Gilt $d(y_1, y_2) < \delta$, so folgt $|u_i(y_1) - u_i(y_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $i = 1, \ldots, m$.
Sei $f_\alpha \in Z$. Dann existiert u_{i_0} mit $\|f_\alpha - u_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Gilt nun $d(y_1, y_2) < \delta$, so schätzen wir ab:
$$|f_\alpha(y_1) - f_\alpha(y_2)| \leq \underbrace{|f_\alpha(y_1) - u_{i_0}(y_1)|}_{\leq \|f_\alpha - u_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|u_{i_0}(y_1) - u_{i_0}(y_2)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ da gleichmäßig stetig}} + \underbrace{|u_{i_0}(y_2) - f_\alpha(y_2)|}_{\leq \|f_\alpha - u_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon$$

Gezeigt:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \,\forall y_1, y_2, d(y_1, y_2) < \delta \forall \alpha \in A : |f_\alpha(y_1) - f_\alpha(y_2)| < \varepsilon.$$
$\rightsquigarrow \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist gleichgradig stetig.

($\Leftarrow$): $Z = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.
Zu zeigen: Ist $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots$ eine Folge, so existiert eine in $\mathcal{C}(X)$ konvergente Teilfolge.
Sei $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots$ gegeben. Setze einen Punkt $x_1 \in X$ ein. Die Zahlenfolge $f_{\alpha_1}(x_1), f_{\alpha_2}(x_2), \ldots$ ist eine beschränkte Folge.
Frage: Welche Punkte x_i wählen wir?
Antwort: X ist kompakt. Dann besitzt X eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
x_1 sei der erste Punkt dieser dichten Teilmenge. $\rightsquigarrow$ Es existiert eine Teilfolge $f_{\alpha_{n_1}}, f_{\alpha_{n_2}}, \ldots$, so daß $f_{\alpha_{n_j}}(x_1)$ konvergiert.

x_2: $f_{\alpha_{n_1}}(x_2), f_{\alpha_{n_2}}(x_2), \ldots$ ist eine beschränkte Folge von Zahlen. Wähle aus $f_{\alpha_{n_1}}, f_{\alpha_{n_2}}, \ldots$ eine weitere Teilfolge so aus, daß diese in x_2 konvergiert.

Setze dieses Verfahren fort: Betrachte die Folge $f_{\alpha_{n_1}}, f_{\alpha_{n_{m_2}}}, f_{\alpha_{n_{m_{q_3}}}}, \ldots$ (Diagonalverfahren) und nenne sie $f^*_{\alpha_k}, k = 1, 2, \ldots$

Zu zeigen: Diese Teilfolge konvergiert in $\mathcal{C}(X)$.

$\varepsilon > 0$ sei fixiert. Die Familie $\{f_\alpha\}$ ist gleichgradig stetig

$$\rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \forall x, y, d(x,y) < \delta \forall \alpha \in A : |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.1}$$

Bezeichne: $K_i = \mathcal{K}(x_i, \delta) \subset X$. Weil $\{x_1, x_2, \ldots\}$ dicht in X ist, gilt

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

X ist kompakt $\rightsquigarrow$ Es existieren endlich-viele Kugeln mit

$$X = \mathcal{K}(x_1, \delta) \cup \ldots \cup \mathcal{K}(x_m, \delta)$$

Die ausgewählte Funktionenfolge $f^*_{\alpha_k}$ konvergiert in jedem der Punkte x_i $(1 \leq i \leq m)$. Mit der Cauchy-Bedingung gilt dann

$$\exists N \forall k_1, k_2 \geq N : \left| f^*_{\alpha_{k_1}}(x_i) - f^*_{\alpha_{k_2}}(x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \; (1 \leq i \leq m). \tag{1.2}$$

Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Wähle x_i $(1 \leq i \leq m)$ mit $d(x, x_i) < \delta$. Wende (1.1) und (1.2) bei folgender Abschätzung an:

$$\left| f^*_{\alpha_k}(x) - f^*_{\alpha_l}(x) \right| \leq \underbrace{\left| f^*_{\alpha_k}(x) - f^*_{\alpha_k}(x_i) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach } (*)} + \underbrace{\left| f^*_{\alpha_k}(x_i) - f^*_{\alpha_l}(x_i) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\left| f^*_{\alpha_l}(x_i) - f^*_{\alpha_l}(x) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach } (*)} \leq \varepsilon$$

Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, l \geq N \forall x \in X : \left| f^*_{\alpha_k}(x) - f^*_{\alpha_l}(x) \right| \leq \varepsilon$$

Dies ist die Cauchy-Bedingung für die Folge $f^*_{\alpha_1}, f^*_{\alpha_2}, \ldots$ der gleichmäßigen Konvergenz!

$\rightsquigarrow$ Die Folge $f^*_{\alpha_k} \in \mathcal{C}(X)$ ist eine Cauchy-Folge.

□

Spezialfall eines Hilbert-Raumes: $(H, \langle ., . \rangle)$ sei ein Hilbert-Raum.

H sei separabel mit dem vollständigen ON-System $e_1, e_2, \ldots$.

Beispiel. $L^2(S_1)$, $e_j := \left(e^{2\pi i t}\right)^j$

Dann gilt

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, e_i \rangle e_i. \qquad \text{(Fourier-Reihe von } z\text{)}, \; z \in H$$

Ist $Z = \{z_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset H$. $\rightsquigarrow$ $\langle z_\alpha, e_i \rangle$ Fourierkoeffizienten $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in A$.

Frage: Kann die Präkompaktheit von Z durch eine Eigenschaft der Fourier-Koeffizienten $\langle z_\alpha, e_i \rangle$ ausgedrückt werden? 24.10.2002

Satz 1.13. *Eine Teilmenge $Z \subset H$ ist präkompakt $\Leftrightarrow$*

(1) *$Z \subset H$ ist beschränkt*
(2) *Die Fourierreihe konvergiert gleichmäßig auf Z, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall z_\alpha \in Z : \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle z_\alpha, e_i \rangle|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle z_\alpha, e_i \rangle \cdot e_i \right\|^2 \leq \varepsilon^2$$

Beweis.

(⇒): Sei Z präkompakt. Dann ist Z beschränkt ⇝ (1).

Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Es existiert ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $\{x_1, \ldots, x_m\}$ für Z mit

$$Z \subset \mathcal{K}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \ldots \cup \mathcal{K}\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right), \, x_i \in H, 1 \leq i \leq m$$

Restglied der Fourierreihe von $x \in H$:

$$R_n(x) := \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$$

Weil die Fourierreihe gegen x konvergiert, gilt $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Also $R_n(x_1), \ldots, R_n(x_m) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit existiert zu der fixierten Zahl $\varepsilon > 0$ eine Stelle N mit

$$\forall n \geq N \, \forall 1 \leq i \leq m : \|R_n(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sei $z \in Z$ gegeben. Dann existiert ein Element x_{i_0} mit $\|z - x_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\|R_n(z)\| &= \|R_n(z - x_{i_0}) + R_n(x_{i_0})\| \\
&\leq \|R_n(z - x_{i_0})\| + \underbrace{\|R_n(x_{i_0})\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle z - x_{i_0}, e_i \rangle|^2} \\
&\overset{\text{Bessel-Ungl.}}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \|z - x_{i_0}\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \geq N \forall z \in Z : \|R_n(z)\| \leq \varepsilon$$

(⇐): Sei $Z \subset H$ beschränkt und konvergiere die Fourier-Reihe gleichmäßig auf Z.

Für $x \in H$ sei

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k.$$

Dann gilt $R_n(x) = x - S_n(x)$.

Nach (2):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \, \forall n \geq N \forall z \in Z : \|z - S_n(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Alle Elemente $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \langle z, e_\alpha \rangle \, e_\alpha$ liegen in dem <u>endlich</u>-dimensionalen Teilraum, nämlich $\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$ (n fest) .

Weiterhin gilt: $\|S_n(z)\| \leq \|z\|$. Die Menge Z ist beschränkt, d.h. es ex. eine Konstante M mit $\|z\| \leq M \, \forall z \in Z$.

⇝ $S_n(z)$ ist eine beschränkte Teilmenge im endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$.

⇝ $\{S_n(z) | \, z \in Z\}$ ist präkompakt in $\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$.

Damit hat $\{S_n(z) | \, z \in Z\}$ ein $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz, d.h. es existieren $x_1, \ldots, x_m \in \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$ mit

$$\{S_n(z) | \, z \in Z\} \subset \mathcal{K}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup \mathcal{K}\left(x_m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Betrachten $z \in Z$ beliebig. Dann existiert ein Element x_{i_0} $(1 \leq i_0 \leq m)$ mit

$$\|S_n(z) - x_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt (wählen n mit $n \geq N$)

$$\begin{aligned} \|z - x_{i_0}\| &\leq \|z - S_n(z)\| + \|S_n(z) - x_{i_0}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existieren $x_1, \ldots, x_m \in H$ mit $\operatorname{dist}(z, \{x_1, \ldots, x_m\}) < \varepsilon$.
$\rightsquigarrow Z \subset \mathcal{K}(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup \mathcal{K}(x_m, \varepsilon) \rightsquigarrow \{x_1, \ldots, x_m\}$ ist ε-Netz für Z.
Hausdorff (1.8) $\rightsquigarrow Z$ ist präkompakt.

$\square$

Beispiel. Hilbert-Würfel

H sei ein unendlich-dimensionaler Hilbert-Raum, separabel und $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein vollständiges ON-System

Hilbert-Würfel Q^∞

$$\boxed{Q^\infty := \left\{ x \in H \,\middle|\, |\langle x, e_n \rangle| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots \right\}}$$

Q^∞ liegt in keinem endlich-dimensionalen Teilraum!

Satz 1.14. *$Q^\infty \subset H$ ist konvex und kompakt.*

Q^∞ konvex, kompakt

Beweis. $x, y \in Q^\infty \rightarrow |\langle x, e_n \rangle| \leq \frac{1}{n}$ und $|\langle y, e_n \rangle| \leq \frac{1}{n}$.

Ein Punkt auf $[x, y]$ ist $\lambda x + (1 - \lambda) y$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle \lambda x + (1 - \lambda) y, e_n \rangle| &\leq |\lambda| \cdot |\langle x, e_n \rangle| + |1 - \lambda| \cdot |\langle y, e_n \rangle| \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{n} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in Q^\infty$.

Q^∞ ist präkompakt, weil für alle $x \in Q^\infty$ gilt:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} < \infty,$$

unabhängig von $x \in Q^\infty$.

Trivial: $Q^\infty \subset H$ ist abgeschlossen.

$\square$

X sei ein metrischer Raum. X hat die Fixpunkteigenschaft, falls jede stetige Abbildung $f : X \to X$ wenigstens einen Fixpunkt $(f(x_0) = x_0)$ hat.

Fixpunkteigenschaft

Beispiel. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ hat nicht die Fixpunkteigenschaft! (betrachte z.B. Drehungen)

$X = [0, 1]$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Fixpunktsatz von Brouwer (1911): Jeder Würfel $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Fixpunktsatz Brouwer

Satz 1.15. *Der Hilbert-Würfel Q^∞ hat die Fixpunkteigenschaft, d.h. jede stetige Abbildung $f : Q^\infty \to Q^\infty$ besitzt (mindestens) einen Fixpunkt, $f(x_0) = x_0$.*

Beweis. $f : Q^\infty \to Q^\infty$ sei stetig und betrachte

$$h(x) := \|f(x) - x\|,$$

$h : Q^\infty \to [0,\infty)$ - stetige Funktion. (Fixpunkte von $f \leftrightarrow$ Nullstellen von h).

Q^∞ ist ein kompakter metrischer Raum, h ist eine stetige Funktion $\rightsquigarrow$ (Satz von Weierstraß)

$$\exists x_0 \in Q^\infty : \, h(x_0) = \inf\{h(x) \,|x \in Q^\infty\} = \inf\{\|f(x) - x\| \,|x \in Q^\infty\}.$$

Setze

$$S_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \, e_i.$$

Dann gilt $S_n : Q^\infty \to Q^\infty$ und S_n ist stetig. Damit entsteht die Abbildung $S_n \circ f : Q^\infty \to Q^\infty$.

$$Q_n := S_n(Q^\infty) = \left\{ y \in H \;\middle|\; \begin{array}{ll} |\langle y, e_i\rangle| \le \frac{1}{i}, & 1 \le i \le n \\ \langle y, e_j\rangle = 0, & n+1 \le j < \infty \end{array} \right\}$$

Die Menge Q_n ist ein endlich-dimensionaler Würfel in einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum.

Betrachte $S_n \circ f\,|_{Q_n} : Q_n \to Q_n$ (nach Konstruktion).

Fixpunktsatz von Brouwer $\rightsquigarrow$ Es existiert $x_n \in Q_n$ mit $(S_n \circ f)(x_n) = x_n$.

Q^∞ ist kompakt. Damit existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$:

$$x_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} x^* \in Q^\infty.$$

Dann gilt:

$$f(x_{n_i}) \to f(x^*),$$

weil f stetig ist. Aus $(S_{n_i} \circ f)(x_{n_i}) = x_{n_i}$ ergibt sich mit $i \to \infty$:

$$f(x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(x^*), e_k\rangle \, e_k = x^*$$

$\rightsquigarrow x^*$ ist Fixpunkt.

$\square$

Universalitätseigenschaft von Q^∞: Jeder kompakte metrische Raum X ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge von Q^∞.

1.3. **Vervollständigungen.**

Zur Erinnerung: Der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$.

Irrationale Zahl α als Grenzwert einer Folge reeller Zahlen $r_n \rightsquigarrow r_n$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$.

Vervollständigung

Idee: Eine reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen.

Problem: Gegeben sei ein normierter Raum $(E, \|.\|)$. Kann er kanonisch vervollständigt werden?

Beispiel: $E = \mathcal{C}[0,1]$: Mit Norm $\|f\| = \sup|f(x)|$ ergibt sich Banach-Raum. Mit $\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt$ aber kein Banach-Raum.

Antwort: Ja.

Konstruktion der Vervollständigung: $(E, \|.\|)$ gegeben.

Eine Cauchy-Folge in E ist eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \ge N : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

$$\boxed{\mathcal{C} := \text{Menge aller Cauchy-Folgen in } E}$$

$\mathcal{C}$ ist Vektorraum. Äquivalenzrelation in $\mathcal{C}$:

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \sim (y_1, y_2, y_3, \ldots) \Leftrightarrow \text{die Folge } x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots \to 0 \text{ in } E}$$

$\rightsquigarrow \lim \|x_i\| = \lim \|y_i\|$. Bilde

$$\boxed{B := \mathcal{C}/\sim}$$

$[x_1, x_2, \ldots]$-Äquivalenzklasse. B ist Vektorraum.

Definiere eine Norm in B durch:

$$\boxed{\|[x_1, x_2, \ldots,]\| := \lim_{i\to\infty} \|x_i\|}$$

Satz 1.16.

(1) $(B, \|.\|)$ *ist ein Banach-Raum.*
(2) *Durch* $j : E \to B$, $j(x) = [x, x, x, \ldots]$ *entsteht eine Einbettung, welche die Norm erhält.*
(3) *Die Menge* $j(E) \subset B$ *ist dicht.*

Der Raum $(B, \|.\|)$ heißt die Vervollständigung von E. 29.10.2002

Satz 1.17. *(Eindeutigkeit der Vervollständigung)* $(E, \|.\|)$ *sei ein normierter Raum.* Eindeutigkeit

$(B_1, \|.\|_1, j_1)$ *sei eine Vervollständigung (B_1 Banach-Raum),* $j_1 : E \to B_1$ *injektiv,* $j_1(E) \subset B_1$ *dicht.*

$(B_2, \|.\|_2, j_2)$ *sei eine weitere Vervollständigung (B_2 Banach-Raum),* $j_2 : E \to B_2$ *injektiv,* $j_2(E) \subset B_2$ *dicht.*

Dann existiert eine bijektive, lineare Abbildung $\Phi : B_1 \to B_2$ *mit*

(1) $j_2 = \Phi \circ j_1$
(2) $\|\Phi(b_1)\|_2 = \|b_1\|_1$

Beweis. Durch $j_2 = \Phi \circ j_1$ ist Φ auf der dichten Teilmenge $j_1(E) \subset B_1$ festgelegt.

Betrachte $b_1 \in B_1$. Dann existiert eine Folge $e_1, e_2, e_3, \ldots$ mit

$$\|b_1 - j_1(e_i)\|_1 \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

$\rightsquigarrow j_1(e_1), j_1(e_2), \ldots$ ist Cauchy-Folge in B_1

$\rightsquigarrow e_1, e_2, \ldots$ ist Cauchy-Folge in E

j_2 erhält Norm $\rightsquigarrow j_2(e_1), j_2(e_2), \ldots$ ist Cauchy-Folge in B_2

B_2 ist Banach-Raum $\rightsquigarrow j_2(e_1), j_2(e_2), \ldots$ konvergiert in B_2.

Definiere:

$$\Phi(b_1) := \lim_{i\to\infty} j_2(e_i)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\Phi(b_1)\|_2 &= \lim_{i\to\infty} \|j_2(e_i)\|_2 \\ &= \lim_{i\to\infty} \|e_i\|_E \\ &= \lim_{i\to\infty} \|j_1(e_i)\|_1 \\ &= \|b_1\|_1,\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \Phi$ erhält die Norm $\rightsquigarrow \Phi$ ist injektiv ($\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow 0 = \|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|\Phi(x-y)\| = \|x-y\| \Rightarrow x = y$).

Φ ist surjektiv (Vertausche die Rollen von B_1 und B_2).

$\square$

Folgerung. $(B, \|.\|)$ sei ein Banach-Raum. $E \subset B$ sei ein dichter Teilraum (Vektorraum). $(E, \|.\|)$ wird dann ein normierter Raum.

Dann ist $(B, \|.\|)$ die Vervollständigung von $(E, \|.\|)$.

Beispiel. (Maßtheorie)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - offene Teilmenge, μ Lebesgue-Maß.

$1 \leq p < \infty \rightsquigarrow$ Banach-Raum der L^p-Funktionen:

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ ist } \mu\text{-meßbar}, \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \right\} / \sim \\ f \sim f_1 &\Leftrightarrow f = f_1 \text{ fast überall} \\ \|f\|_{L^p} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_0$

$$\boxed{\mathcal{C}_0(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ ist stetig, } \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt} \}}$$

- $\mathcal{C}_0(\Omega)$ ist ein Vektorraum.
- $\mathcal{C}_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$
- $\mathcal{C}_0(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$.

Dann ist $L^p(\Omega)$ die Vervollständigung von $\mathcal{C}_0(\Omega)$ in der Norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. Stetige Operatoren

2.1. **Definition.**

$(B_1, \|.\|_1)$, $(B_2, \|.\|)$ seien normierte Banach-Räume. $L : B_1 \to B_2$ eine lineare Abbildung.

stetig $\Leftrightarrow$ beschränkt

Satz 2.1. *L ist stetig $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Zahl $A > 0$ mit*

$$\boxed{\|L(b_1)\|_2 \leq A \cdot \|b_1\|_1}$$

beschränkter Operator

für alle Vektoren $b_1 \in B_1$.

Bemerkung. Operatoren mit $\|L(b_1)\|_2 \leq A \cdot \|b_1\|_1$ heißen <u>beschränkte Operatoren</u>.

Folgerung. L ist stetig $\Leftrightarrow$ L ist beschränkt.

Beweis.

($\Leftarrow$): Sei L beschränkt, d.h.

$$\exists A > 0 \forall b_1 \in B_1 : \|L(b_1)\|_2 \leq A \cdot \|b_1\|_1$$

Sei $b_i \xrightarrow{i \to \infty} b$ in $B_1 \rightsquigarrow \|b_i - b\|_1 \xrightarrow{i \to \infty} 0 \rightsquigarrow \|L(b_i - b)\|_2 \xrightarrow{i \to \infty} 0 \rightsquigarrow L(b_i) \xrightarrow{i \to \infty} L(b)$.
Damit ist L stetig.

($\Rightarrow$): Sei $L : B_1 \to B_2$ stetig $\rightsquigarrow$ L ist stetig an der Stelle $b_1 = 0$:

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \, \forall b_1 \in B_1, \|b_1\|_1 < \delta : \quad \|L(b_1)\|_2 < \varepsilon \\ &\varepsilon = 1 \rightsquigarrow \exists \delta > 0 \, \forall b_1 \in B_1, \|b_1\|_1 < \delta : \quad \|L(b_1)\|_2 < 1 \end{aligned}$$

Betrachte $0 \neq b_1^* \in B_1$ und schreibe:

$$\|L(b_1^*)\|_2 = \left\| \frac{2\|b_1^*\|_1}{\delta} \cdot L \underbrace{\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{b_1^*}{\|b_1^*\|_1} \right)}_{\|\cdot\| = \frac{\delta}{2}} \right\|_2 < \frac{2\|b_1^*\|_1}{\delta} \cdot 1$$

Mit $A := \frac{2}{\delta}$ sehen wir, daß L beschränkt ist.

□

Definition 2.2. (<u>Operatornorm</u>) $L : B_1 \to B_2$ linear

Operatornorm $\|L\|$

$$\boxed{\|L\| := \inf \left\{ A \,|\, \|L(b_1)\|_2 \le A \cdot \|b_1\|_1 \quad \forall b_1 \in B_1 \right\}}$$

$$\boxed{\|L\| = \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \frac{\|L(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1}}$$

Folgerung. L ist stetig $\Leftrightarrow \|L\| < \infty$.

Satz 2.3. $\mathcal{B}(B_1, B_2) =$ *Vektorraum aller stetigen, linearen Abbildungen von* B_1 *nach* B_2. $\|.\|$ *sei die Operatornorm in* $\mathcal{B}(B_1, B_2)$

$\mathcal{B}(B_1, B_2)$

(1) $\|.\|$ *ist eine Norm in* $\mathcal{B}(B_1, B_2)$
(2) $(\mathcal{B}(B_1, B_2), \|.\|)$ *ist ein Banach-Raum, falls* $(B_2, \|.\|_2)$ *ein Banachraum ist.*

<u>Spezialfall:</u> $(B, \|.\|)$ komplexer Banach-Raum. $B_2 = \mathbb{C}$. Dualraum zu B:

top. Dualraum B^*

$$\boxed{B^* = \mathcal{B}(B, \mathbb{C}) = \text{Raum der stetigen linearen Funktionale } L : B \to \mathbb{C}}$$

<u>Anmerkung</u>: B^* ist <u>nicht</u> der algebraische Dualraum.

Beweis.

(1) Normeigenschaften für $\|L\|$:
$\lambda \in \mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot L\| &= \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \frac{\|\lambda \cdot L(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \frac{\|L(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \\
&= |\lambda| \cdot \|L\| \\
\|L_1 + L_2\| &= \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \frac{\|L_1(b_1) + L_2(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \\
&\le \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \left\{ \frac{\|L_1(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} + \frac{\|L_2(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \right\} \\
&= \|L_1\| + \|L_2\|
\end{aligned}$$

(2) B_2 sei Banach-Raum. Sei $L_1, L_2, \ldots : B_1 \to B_2$ eine Cauchy-Folge von Operatoren (stetig):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \ge N : \|L_n - L_m\| = \sup_{0 \ne b_1 \in B_1} \frac{\|L_n(b_1) - L_m(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} < \varepsilon$$

$$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \ge N, b_1 \in B_1 : \|L_n(b_1) - L_m(b_1)\|_2 \le \varepsilon \cdot \|b_1\|_1$$

Halte $b_1 \in B_1$ fest. Dann ist $L_1(b_1), L_2(b_1), \ldots$ eine Cauchy-Folge in B_2!
Da B_2 vollständig ist, konvergiert $L_n(b_1)$ in B_2.
Definiere $L : B_1 \to B_2$ durch die Formel

$$L(b_1) := \lim_{n \to \infty} L_n(b_1)$$

$L_n(b_1) \to L(b_1) \rightsquigarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \ge N, b_1 \in B_1 : \|L_n(b_1) - L(b_1)\|_2 \le \varepsilon \cdot \|b_1\|_1$$

$$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \ge N : \|L_n - L\| < \varepsilon.$$

Damit gilt:
(a) $\|L\| < \infty$, d.h. L ist stetig.
(b) $L_n \to L$ in $\mathcal{B}(B_1, B_2)$.

$\square$

Satz 2.4. *(Verhalten bei Superposition): Sei*

$$B_1 \xrightarrow{L_1} B_2 \xrightarrow{L_2} B_3,$$

Superposition

dann gilt

$$\boxed{\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_1\| \cdot \|L_2\|}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|L_2 \circ L_1\| &= \sup_{0 \neq b_1 \in B_1} \frac{\|L_2 \circ L_1(b_1)\|_3}{\|b_1\|_1} \\
&= \sup_{0 \neq b_1 \in B_1} \frac{\|L_2 \circ L_1(b_1)\|_3}{\|L_1(b_1)\|_2} \cdot \frac{\|L_1(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \\
&\leq \|L_2\| \cdot \sup_{0 \neq b_1 \in B_1} \frac{\|L_1(b_1)\|_2}{\|b_1\|_1} \\
&= \|L_2\| \cdot \|L_1\|
\end{aligned}$$

□

stetige Fortsetzung

Satz 2.5. *B_1, B_2 Banach-Räume. $E_1 \subset B_1$ dichter linearer Teilraum. $L : E_1 \to B_2$ linear und stetig.*

Dann besitzt L eine lineare und stetige Fortsetzung $L^* : B_1 \to B_2$.

Beweis. Fixiere $b_1 \in B_1$ und wähle eine Folge $e_1, e_2, \ldots$ in E_1 mit $e_i \to b_1$. Dann gilt

$$\|L(e_n) - L(e_m)\|_2 \leq \|L\| \cdot \|e_n - e_m\|_1$$

Da e_i eine Cauchy-Folge ist, ist dann auch $L(e_i)$ eine Cauchy-Folge in B_2.

Definiere $L^* : B_1 \to B_2$ durch

$$L^*(b_1) := \lim_{n \to \infty} L(e_n)$$

□

2.2. **Die Fouriertransformation.**

$L^1(\mathbb{R}^n) =$ Raum aller L^1-Funktionen in $\mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ L^1-meßbar, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

Fourier-transformation $\hat{f}$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

$$\boxed{\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} f(x)\, dx}$$

Dieses Integral macht Sinn, weil:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|e^{-i\langle x, \xi\rangle}\right|}_{=1} \cdot |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

Definition 2.6. $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist die Fourier-Transformation von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Es gilt: $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$$

Folgerung. Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ jeder L^1-Funktion ist auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ beschränkt.

Definition 2.7. Der <u>Schwartz-Raum</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Vektorraum aller glatten (d.h. C^∞-) Funktionen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft: 31.10.2002 Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\forall m\geq 0\,\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\text{ ist }\left(1+|x|^2\right)^m D^\alpha f(x)\text{ beschränkt auf }\mathbb{R}^n.$$

$$D^\alpha f:=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f$$

$\mathcal{C}_0^\infty$

Beispiel. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)=$ Raum aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger $\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x)=e^{-x^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$\mathcal{C}_0^\infty\subset\mathcal{S}\subset L^p$

Satz 2.8. *$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p\geq 1$*

Beweis. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
x_1 &:= r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\cos\varphi_{n-1}\\
x_2 &:= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\cos\varphi_{n-1}\\
x_3 &:= r\sin\varphi_2\cos\varphi_3\cdots\cos\varphi_{n-1}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &:= r\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\
x_n &:= r\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

Mit: $0\leq r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}<\infty$, $0\leq\varphi_1\leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi_i\leq\frac{\pi}{2}$ für $2\leq i\leq n-1$.

Volumenelement im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
d\mathbb{R}^n &= dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\\
&= r^{n-1}\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\cdots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}dr\wedge d\varphi_1\wedge\ldots\wedge d\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^A} &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^{n-1}\cdot\cos\varphi_2\cdots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}}{(1+r^2)^A}dr\wedge d\varphi_1\wedge\ldots\wedge d\varphi_{n-1}\\
&= C(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\int_0^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^A}dr\\
&= C(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\left\{\int_0^1\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^A}dr+\int_1^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^A}dr\right\}
\end{aligned}$$

$$1\leq 1+r^2\rightsquigarrow\frac{1}{1+r^2}\leq 1\quad\rightsquigarrow\quad\int_0^1\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^A}dr\leq\int_0^1 r^{n-1}dr=\frac{1}{n}$$

$$r^2\leq 1+r^2\rightsquigarrow\frac{1}{1+r^2}\leq\frac{1}{r^2}\quad\rightsquigarrow\quad\int_1^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^A}dr\leq\int_1^\infty\frac{r^{n-1}}{r^{2A}}dr=\frac{1}{n-2A}\left[r^{n-2A}\right]_1^\infty$$

Ist der Exponent $n-2A<0$, so wird

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^A}dx\leq C(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2A}\left[r^{n-2A}\right]_1^\infty\right\}<\infty.$$

<u>Also</u>: Im $\mathbb{R}^n$ gilt für jede Zahl $A>\frac{n}{2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^A}dx<\infty$$

$f \in \mathcal{S} \rightsquigarrow$ für jede Zahl $A = 1, 2, 3$ existiert ein C_A, so daß

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C_A \cdot \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^A} \\ \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx &\leq C_A^p \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{A \cdot p}} dx \quad \forall A = 1, 2, \ldots \\ \rightsquigarrow \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &< \infty \end{aligned}$$

□

Folgerung.

(1) Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Teilraum in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$.

(2) $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in der Norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) =$ Raum der beschränkten Funktionen

Satz 2.9. *Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

(1) $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$

(2) *Die Abbildung $\mathcal{S} \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

inv. Fourier-transformation

Mit anderen Worten, die Formel für die inverse Fourier-Transformation $\vee : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist

$$\boxed{\check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} g(\xi) \, d\xi = \hat{g}(-x)}$$

$D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

(3) *Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gilt:*

$$\boxed{D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{(-ix)^\alpha f(x)}(\xi), \qquad y^\alpha := y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}}$$

Plancherel-Theorem

(4) *Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}}$$

(Plancherel-Theorem)

Kommentar zu 4.:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\wedge, L^2-\text{stetig}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \text{dicht} \cap & & \cap \\ L^2(\mathbb{R}^n) & & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Folgerung. Die Fourier-Transformation besitzt eine unitäre (d.h. Skalarprodukt erhaltende) Fortsetzung:

$$\wedge : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

Vorsicht:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx$$

gilt nur für $f \in L^1$, aber $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$.

Diese Formel gilt nur für Funktionen aus $L^1 \cap L^2$!

Beispiel. $\frac{1}{1+|x|} \sim \frac{1}{|x|} \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ist $f \in L^2 \setminus L^1$, so approximiere man f durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \mathcal{S}$ (in der L^2-Norm) und bilde $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots \in \mathcal{S}$. Dann gilt $\hat{f} := \lim \hat{\varphi}_n$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(3): $\hat{f}(\xi)$ ist eine glatte Funktion (Lebesgue-Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{e^{-i\langle x,te_1\rangle} - 1}{t}\right] \underbrace{e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)}_{\text{ist } L^1} dx \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_1)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx \\
&= \widehat{(-ix_1)\, f}(x)(\xi) \qquad - \text{Formel (3) für } \alpha = (1,0,\ldots)
\end{aligned}$$

(1): z.z.: $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Aus Eigenschaft (3) folgt:

$$\begin{aligned}
D^\alpha \hat{f}(\xi) &= \widehat{(-ix)^\alpha f}(x)(\xi) \\
\rightsquigarrow \left|D^\alpha \hat{f}(\xi)\right| &\leq \|(-ix)^\alpha f(x)\|_{L^1} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ alle Ableitungen von $\hat{f}$ sind beschränkt

$\left|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right| = \left|\widehat{D^\alpha f}(\xi)\right|$ beschränkt $\rightsquigarrow$ $\hat{f}(\xi)$ fällt schneller als das Inverse jedes Polynoms.

(2): Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte $\varphi(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$. Dieses Produkt ist insbesondere beschränkt. Berechne das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} \left\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx\right\} d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{i\langle x-y\rangle\xi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f(y)\, dy d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\xi\right] dy \\
&\overset{y=x+t}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, e^{i\langle -t,\xi\rangle} d\xi\right]}_{\hat{\varphi}(t)} dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t)\, \hat{\varphi}(t)\, dt \qquad \forall f, \varphi \in S, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Fixiere $\varepsilon > 0$ und bilde

$$\varphi(\xi) := g(\varepsilon \cdot \xi).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int \varphi(\eta)\, e^{-i\langle t,\eta\rangle}d\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} g\,\underbrace{(\varepsilon\cdot\eta)}_{y}\, e^{-i\langle t,\eta\rangle}d\eta \\
&\overset{\substack{y=\varepsilon\cdot\eta\\ dy=\varepsilon^n d\eta}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\cdot e^{-i\left\langle \frac{t}{\varepsilon},\eta\right\rangle}\frac{1}{\varepsilon^n}dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{g}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Setze diese Formel in (2.1) ein:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\cdot\xi)\,\hat{f}(\xi)\,e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\hat{g}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\varepsilon\cdot s)\,\hat{g}(s)\,ds$$

$\varepsilon\to 0$ und Lebesgue-Satz:

$$g(0)\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\,e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\hat{g}(s)\,ds = f(x)\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(s)\,ds$$

Wähle die Funktion

$$g(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$$

<u>Dann gilt</u>: (direkte Ausrechnung der Integrale)

$$\hat{g}(\xi) = g(\xi)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\,e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi &= f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(s)\,ds = f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}d\xi}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\
\rightsquigarrow f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\,e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi
\end{aligned}$$

5.11.2002 (4)**:** (2.1) mit $x=0$ ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\hat{\varphi}(t)\,dt \quad \forall f,\varphi\in\mathcal{S}$$

Ist $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so betrachten wir:

$$\varphi(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t,\xi\rangle}\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{e^{i\langle t,\xi\rangle}\hat{g}(\xi)}d\xi \\
&= \overline{g(t)} \qquad \text{(Umkehrformel)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $f,g\in\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\cdot\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\cdot\overline{g(t)}dt \\
\rightsquigarrow \left\langle\hat{f},\hat{g}\right\rangle_{L^2} &= \langle f,g\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

$\square$

2.2.1. *Anwendung der Fourier-Transformation.*

Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (DGL)

$$a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \ldots + a_N f^{(N)}(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}^1$$

Wir betrachten das Polynom

$$\begin{aligned} P(t) &:= a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \\ \rightsquigarrow P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) &= g(t) \end{aligned}$$

Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Gesucht ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$.

Wenden die Fouriertransformation auf die gewöhnliche DGL $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) = g(t)$ an:

$$\hat{g}(\xi) = P(i\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \qquad \text{(Polynommultiplikation)}$$

Annahme: $P(i\xi) \neq 0 \, \forall \xi \in \mathbb{R}^1$ (Bsp.: $f - f'' = g$, $P(t) = 1 - t^2$, $P(i\xi) = 1 + \xi^2$, $\xi \in \mathbb{R}^1$).

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \hat{f}(\xi) &= \frac{\hat{g}(\xi)}{P(i\xi)} \\ \rightsquigarrow f(x) &= \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\hat{g}(\xi)}{P(i\xi)} d\xi \end{aligned}$$

<u>Also</u>: Ist $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ und $f \in \mathcal{S}$ eine Lösung der gewöhnlichen DGL $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) = g(t)$, so gilt $(P(i\xi) \neq 0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\hat{g}(\xi)}{P(i\xi)} d\xi$$

Insbesondere ist f eindeutig in $\mathcal{S}$.

2.3. **Integraloperatoren.**

2.3.1. *Integraloperatoren mit stetigem Kern in $\mathcal{C}(X)$.*

X	kompakter metrischer Raum.
$\mathcal{C}(X)$	Banachraum der stetigen Funktionen auf X mit Supremumsnorm.
μ	endliches Borel-Maß auf X.

$K : X \times X \to \mathbb{C}$ Kern, K sei stetig.

Wir definieren den Operator

$$L : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$$

$$\boxed{(Lf)(x) := \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y)}$$

Integral-
operator

(1) Das Integral $(Lf)(x)$ existiert für alle $x \in X$, weil f und K stetig sind.
(2) Die Funktion $X \ni x \mapsto (Lf)(x) \in \mathbb{C}$ ist stetig, weil:

$$\begin{aligned} \lim_{x_* \to x} (Lf)(x_*) &= \lim_{x_* \to x} \int_X K(x_*, y) f(y) \, d\mu(y) \\ &\overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_X \lim_{x_* \to x} K(x_*, y) f(y) \, d\mu(y) \\ &\overset{K \text{ stetig}}{=} \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y) \\ &= (Lf)(x). \end{aligned}$$

(3) Der Operator $L:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ ist stetig:
Sei $f\in\mathcal{C}(X)$. Dann gilt für alle $x\in X$:

$$\begin{aligned}|Lf(x)| &= \left|\int_X K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)\right|\\ &\le \int_X \underbrace{|K(x,y)|}_{\le M}|f(y)|\,d\mu(y) \qquad M:=\sup_{(x,y)\in X\times X}|K(x,y)|\\ &\le M\cdot\|f\|_{\mathcal{C}(X)}\cdot\mu(X)\end{aligned}$$

Bilde Maximum über alle $x\in X$:

$$\|Lf\|_{\mathcal{C}(X)} \le M\cdot\mu(X)\cdot\|f\|_{\mathcal{C}(X)}$$

Damit ist $L:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ ein beschränkter Operator und es gilt:

$$\|L\|\le M\cdot\mu(X).$$

2.3.2. *Integraloperatoren mit stetigem Kern von $L^2(X)\to\mathcal{C}(X)$.*

X	kompakter metrischer Raum
μ	endliches Borel-Maß auf X
$K:X\times X\to\mathbb{C}$ stetig.	

$f\in L^2(X)$ sei gegeben.

Bei festem $x\in X$ ist $y\mapsto K(x,y)\,f(y)$ eine L^1-Funktion, weil $f\in L^2(X)\overset{\mu(X)<\infty}{\subset}L^1(X)$ und $K(x,\cdot)\in L^1(X)$, da K stetig ist.

Konsequenz: $\forall f\in L^2(X)\,\forall x\in X$ existiert $\int_X K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)$.

Somit entsteht eine Funktion

$$\boxed{X\ni x\mapsto\int_X K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)\in\mathbb{C}\qquad\left(f\in L^2\right)}$$

Für alle $f\in L^2(X)$ ist diese Funktion stetig:

Da X kompakt ist, ist auch $X\times X$ kompakt. Da $K:X\times X\to\mathbb{C}$ stetig ist, ist dann K sogar gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall(x,y),(x',y')\in X\times X, d((x,y),(x',y'))<\delta:\ |K(x,y)-K(x',y')|<\varepsilon.$$

Sei $d(x,x')\le\delta$.

$$\begin{aligned}|Lf(x)-Lf(x')| &= \left|\int_X [K(x,y)-K(x',y)]\cdot f(y)\,d\mu(y)\right|\\ &\le \varepsilon\cdot\int_X 1\cdot|f(y)|\,d\mu(y)\\ &\overset{\text{CSU}}{\le} \varepsilon\cdot\left(\int_X 1\right)^{\frac12}\cdot\left(\int|f(y)|^2\,d\mu(y)\right)^{\frac12}\\ &\le \varepsilon\cdot\sqrt{\mu(X)}\cdot\|f\|_{L^2(X)}\end{aligned}$$

Konsequenz:

$$\forall f\in L^2,\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,x'\in X:\ d(x,x')<\delta\ :\ |Lf(x)-Lf(x')|\le\varepsilon\cdot\sqrt{\mu(X)}\cdot\|f\|_{L^2}.$$

Damit ist $Lf:X\to\mathbb{C}$ (bei fester Funktion $f\in L^2$) eine stetige Funktion.

Der Operator $L: L^2(X) \to \mathcal{C}(X)$ ist beschränkt:

$$\begin{aligned} |Lf(x)| &= \left|\int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y)\right| \\ &\leq M \cdot \int_X |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} M \cdot \sqrt{\int_X 1 d\mu(y)} \cdot \sqrt{\int_X |f(y)|^2\, d\mu(y)} \\ &= M \cdot \sqrt{\mu(X)} \cdot \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

Bilde Supremum über $x \in X$:

$$\|Lf\|_{\mathcal{C}(X)} \leq M \cdot \sqrt{\mu(X)} \cdot \|f\|_{L^2}$$

$\rightsquigarrow \|L\| \leq M \cdot \sqrt{\mu(X)}$

2.3.3. *Integraloperatoren mit quadratisch integrierbarem Kern in $L^2(X)$.*

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum: X beliebige Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, μ ein beliebiges Maß

$K: X \times X \to \mathbb{C}$ sei quadratisch integrierbar, d.h.

$$\int_{X \times X} |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty$$

Wir definieren den Operator $L: L^2(X) \to L^2(X)$

$$\boxed{(Lf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad f \in L^2(X)}$$

Fixiere ein $x \in X$ und betrachte die Funktion $y \mapsto K(x,y) f(y)$.

$$\int_X |K(x,y)| |f(y)|\, d\mu(y) \overset{\text{CSU}}{\leq} \left(\int_X |K(x,y)|^2\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_X |f(y)|^2\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty,\ \text{weil } f \in L^2}$$

$\int_X |K(x,y)|^2\, d\mu(y)$ ist endlich für fast alle x, weil $\int_X \left(\int_X |K(x,y)|^2\, d\mu(y)\right) d\mu(x) < \infty$.

Damit existiert für fast alle $x \in X$ das Integral

$$Lf(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y),$$

d.h. es wird eine Funktion $X \ni x \mapsto Lf(x) \in \mathbb{C}$ in $L^2(X)$ definiert ! (Es reicht aus, die Funktion außerhalb einer Nullmenge zu definieren, da $L^2 = \mathcal{L}^2/\sim$)

Frage: Liegt diese Funktion in L^2 ?

$$\begin{aligned} \|Lf\|_{L^2}^2 = \int_X |Lf(x)|^2\, d\mu(x) &= \int_X \left|\int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y)\right|^2 d\mu(x) \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\int_{X \times X} |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)}_{<\infty,\ \text{weil } K \in L^2(X \times X)} \cdot \|f\|_{L^2(X)}^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow Lf \in L^2(X)$

$$\|Lf\|_{L^2} \leq \sqrt{\int_{X \times X} |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)} \cdot \|f\|_{L^2}$$

$\rightsquigarrow L : L^2 \to L^2$ ist beschränkt und es gilt

$$\|L\| \leq \sqrt{\int_{X\times X} |K(x,y)|^2 \, d\mu(x)\, d\mu(y)}$$

Weitere wichtige Kerne sind z.B.

$$K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}$$

mit H stetig in (x,y)

- schwach-singuläre Kerne: $\alpha < n$ (in $\mathbb{R}^n$)
- Grenzfall: $\alpha = n$
- stark-singuläre Kerne: $\alpha > n$

3. Klassische Sätze der Funktionalanalysis

3.1. Der Satz von Banach-Hahn und die Einbettung $B \hookrightarrow B^{**}$.

Banach-Hahn

Satz 3.1. *(Banach-Hahn):*

B	*normierter Raum,*
$M \subset B$	*linearer Unterraum (nicht unbedingt abgeschlossen)*
$f : M \to \mathbb{C}$	*linear, stetig auf M definiert.*

Dann existiert ein $F : B \to \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{F|_M = f \quad \textit{und} \quad \|F\|_B = \|f\|_M}$$

7.11.2002

Beweis. 1. Schritt: B sei ein reeller normierter Raum, $f : M \to \mathbb{R}^1$, $M \subset B$ und f gegeben.

Sei $x_0 \notin M$. Betrachte

$$\hat{M} := \operatorname{Lin}(M, x_0) = \{x + tx_0 \,|x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Definiere:

$$\tilde{f}(x + tx_0) = f(x) - t\cdot\omega$$

mit $\omega \in \mathbb{R}^1$. Wähle ω mit

$$\sup_{x\in M}\{f(x) - \|f\|\cdot\|x + x_0\|\} \leq \omega \leq \inf_{x\in M}\{f(x) + \|f\|\cdot\|x+x_0\|\}$$

Zur Begründung: $x', x'' \in M$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow f(x') - f(x'') = f(x' - x'') &\leq \|f\|\cdot\|x' - x''\| \\
&\leq \|f\|\cdot\{\|x' + x_0\| + \|x_0 + x''\|\} \\
\rightsquigarrow f(x') - \|f\|\cdot\|x' + x_0\| &\leq f(x'') + \|f\|\cdot\|x'' + x_0\| \qquad \forall x', x'' \in M \\
\rightsquigarrow \sup_{x'\in M}\{f(x') - \|f\|\cdot\|x' + x_0\|\} &\leq \inf_{x''\in M}\{f(x'') + \|f\|\cdot\|x'' + x_0\|\}
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{f} : \hat{M} \to \mathbb{R}^1$ definiert und $\tilde{f}|_M = f$.

Weiterhin folgt für $y = x + tx_0 \in \hat{M}$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f}(y)\right| &= |f(x) - t\omega| \\
&= |t|\left|f\left(\frac{x}{t}\right) - \omega\right| \\
&\overset{\text{Wahl von }\omega}{\leq} |t|\,\|f\|\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\| \\
&= \|f\|\,\|x + tx_0\| \\
&= \|f\|\cdot\|y\|
\end{aligned}$$

Dann ist $\left\|\tilde{f}\right\|_{\hat{M}} = \|f\|_M$

Sei

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(\hat{f}, \hat{M}\right) \left| \begin{array}{c} M \subset \hat{M} \subset B \text{ Teilraum in } B \\ \hat{f} : \hat{M} \to \mathbb{R}^1 \text{ linear, stetig}: \ \hat{f}\,|_M = f, \left\|\hat{f}\right\|_{\hat{M}} = \|f\|_M \end{array} \right. \right\}$$

$$\left(\hat{f}_1, \hat{M}_1\right) \leq \left(\hat{f}_2, \hat{M}_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M}_1 \subset \hat{M}_2 \text{ und } \hat{f}_1 = \hat{f}_2 \Big|_{\hat{M}_1}$$

Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ Kette (linear geordnete Teilmenge in $\mathcal{E}$),

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(\hat{f}_\alpha, \hat{M}_\alpha\right) \right\}_{\alpha \in A},$$

so bilde

$$\hat{M} = \bigcup_{\alpha \in A} \hat{M}_\alpha$$

und $\hat{f} : \hat{M} \to \mathbb{R}^1$ durch $\hat{f}\Big|_{\hat{M}_\alpha} = \hat{f}_\alpha$. Weil

$$\begin{aligned} \left\|\hat{f}_\alpha(y)\right\| &\leq \|f\| \cdot \|y\| \qquad \forall y \in \hat{M}_\alpha \text{ gilt, folgt} \\ \left\|\hat{f}(z)\right\| &\leq \|f\| \cdot \|z\| \qquad \forall z \in \hat{M}. \end{aligned}$$

Dann ist $\left(\hat{f}, \hat{M}\right) \in \mathcal{E}$ größer als alle Elemente in $\mathcal{F}$. Nach dem Zorn'schen Lemma hat $\mathcal{E}$ dann ein maximales Element $\left(\hat{f}_{\max}, \hat{M}_{\max}\right)$.

Dann gilt $\hat{M}_{\max} = B$, (andernfalls wählen wir $x_0 \notin \hat{M}_{\max}$ und konstruieren wie oben eine größere Ausdehnung). Folglich ist

$$\hat{f}_{\max} : B = \hat{M}_{\max} \to \mathbb{R}^1$$

auf B definiert und $\left\|\hat{f}_{\max}\right\| = \|f\|$, weil $\left(\hat{f}_{\max}, \hat{M}_{\max}\right) \in \mathcal{E}$!

2. Schritt: B komplexer normierter Raum. $M \subset B$ - komplexer Teilraum. $f : M \to \mathbb{C}$ komplex linear, stetig.

Betrachte

$$g := \mathrm{Re}\,(f) : M \to \mathbb{R}^1$$

und fasse M und B als reellen VR auf. Nach Schritt 1 ex. $G : B \to \mathbb{R}^1$ mit

(1) G ist reell-linear.
(2) $G\,|_M = g$
(3) $\|G\|_B = \|g\|_M$.

Definiere $F : B \to \mathbb{C}$ durch die Formel:

$$F(x) := G(x) - iG(ix)$$

Dann gilt:

- F ist reell-linear (trivial).
- F ist komplex-linear, weil:

$$\begin{aligned} F(i \cdot x) &= G(ix) - iG(i \cdot i \cdot x) \\ &= G(ix) - iG(-x) \\ &= G(ix) + iG(x) \\ &= i\{G(x) - iG(ix)\} \\ &= iF(x) \end{aligned}$$

- $F|_M = f$: Sei $x \in M$. Dann gilt
$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) - iG(ix) \\ &= g(x) - ig(ix) \\ &= \mathrm{Re}[f(x)] - i\mathrm{Re}[f(ix)] \\ &= \mathrm{Re}[f(x)] - i\mathrm{Re}[if(x)] \\ &= \mathrm{Re}[f(x)] - i(-1)\,\mathrm{Im}[f(x)] \\ &= f(x) \end{aligned}$$
- zu zeigen: $\|F\|_B = \|f\|_M$.
Fixiere $x \in B$. Zu jedem Winkel θ beobachten wir
$$F\left(e^{i\theta} \cdot x\right) = e^{i\theta} \cdot F(x)$$
Zu jedem x existiert $\theta(x)$ derart, daß $F\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right) \in \mathbb{R}^1$.
Dann folgt
$$\mathbb{R}^1 \ni F\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right) = \underbrace{G\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right)}_{\in\mathbb{R}^1} - i\,\underbrace{G\left(i \cdot e^{i\theta(x)} \cdot x\right)}_{\in\mathbb{R}^1},$$
also $G\left(i \cdot e^{i\theta(x)} \cdot x\right) = 0$! Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} \left|F\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right)\right| &= \left|G\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right)\right| \le \|G\| \cdot \left\|e^{i\theta(x)} \cdot x\right\| = \|G\| \cdot \|x\| \\ \left|F\left(e^{i\theta(x)} \cdot x\right)\right| &= \left|e^{i\theta(x)} \cdot F(x)\right| = |F(x)| \end{aligned}$$
Damit folgt:
$$\forall x \in B : |F(x)| \le \|G\| \cdot \|x\|.$$
$$\Rightarrow \|F\| \le \|G\| = \|g\| \le \|f\|$$

□

Satz 3.2. *B normierter Raum, $M \subset B$ linearer Teilraum.*

Ein Punkt $x_0 \in B$ liegt im Abschluß von M $\Leftrightarrow$ es ex. kein lineares, stetiges Funktional $f : B \to \mathbb{R}^1$ mit $f|_M \equiv 0$ und $f(x_0) \neq 0$.

Beweis.

($\Rightarrow$): trivial (allg. Eigenschaften stetiger Funktionen in metrischen Räumen)

($\Leftarrow$): Sei $x_0 \notin \bar{M}$, also $x_0 \in B \setminus \bar{M}$ offen. Dann $\exists \delta > 0 : \mathcal{K}(x_0, \delta) \cap \bar{M} = \emptyset$.
$$\rightsquigarrow \exists \delta > 0\, \forall x \in M : \|x - x_0\| \ge \delta$$
Betrachte $M' = \mathrm{Lin}(M, x_0)$ und definiere $f' : M' \to \mathbb{C}$ durch
$$f'(x + tx_0) := t.$$
$f' : M' \to \mathbb{C}$ ist stetig: Sei $x \in M$.
$$\begin{aligned} \|t \cdot x_0 + x\| = |t| \cdot \left\| x_0 + \underbrace{\frac{x}{t}}_{\in M} \right\| &\ge |t| \cdot \delta \qquad \text{nach Wahl von } \delta \\ &= |f'(x + tx_0)| \cdot \delta \end{aligned}$$
Damit gilt für alle $m' = x + tx_0 \in M'$:
$$|f'(m')| \le \|m'\| \cdot \frac{1}{\delta}$$
$\rightsquigarrow \|f'\|_{M'} \le \frac{1}{\delta}$, also ist f' auf M' stetig.

Nach dem Satz von Banach-Hahn (3.1) existiert dann ein stetiges Funktional $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f|_{M'} = f'$. Für $y \in M$ ist $f(y) = f'(y) = 0$, und es ist $f(x_0) = f'(x_0) = 1$. Widerspruch.

Also ist $x_0 \in \bar{M}$.

□

Spezialfall: $M = \{0\}$. $0 \neq x_0 \in B$, also $x_0 \notin \bar{M}$. Dann existiert ein lineares stetiges Funktional $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Satz 3.3. *Sei B ein normierter Raum. $0 \neq x_0 \in B$. Dann existiert ein $f : B \to \mathbb{C}$, linear und stetig, mit*

(1) $\|f\| = 1$
(2) $f(x_0) = \|x_0\|$

Beweis. Wir betrachten $M' = \mathrm{Lin}(x_0) \subset B$ und $f' : M' \to \mathbb{C}$ mit

$$f'(t \cdot x_0) := t \cdot \|x_0\|$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|f'\|_{M'} &= 1 \\ f'(x_0) &= \|x_0\|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Banach-Hahn (3.1) existiert dann ein $f : B \to \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} \|f\|_B &= \|f'\|_M = 1 \\ f(x_0) &= f'(x_0) = \|x_0\|. \end{aligned}$$

□

Vorbemerkung zu Algebren:

V sei Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

$$V^*_{\text{alg}} := \{L : V \to \mathbb{K} | L \text{ linear}\}$$

Bilde

$$\left(V^*_{\text{alg}}\right)^* = V^{**}_{\text{alg}} = \left\{\mu : V^*_{\text{alg}} \to \mathbb{K} | \mu \text{ ist linear}\right\}.$$

$V \hookrightarrow V^{**}_{\text{alg}}$

Es existiert eine "natürliche" Abbildung $V \hookrightarrow V^{**}_{\text{alg}}$ definiert durch

$$\boxed{\begin{aligned} V \ni v &\mapsto \mu_v \in V^{**}_{\text{alg}} \\ \mu_v(L) &:= L(v) \end{aligned}}$$

$(B, \|.\|)$ normierter Raum
$(B^*, \|.\|_*)$ Dualraum der stetigen linearen Funktionale - gleichfalls Banach-Raum.
$(B^{**}, \|.\|_{**})$ doppelter Dualraum

Dann existiert

$(B, \|.\|) \hookrightarrow (B^{**}, \|.\|_{**})$

$$\boxed{(B, \|.\|) \overset{\psi}{\hookrightarrow} (B^{**}, \|.\|_{**})}$$

Satz 3.4. *$\psi : B \to B^{**}$ ist eine injektive Isometrie, d.h.*

$$\boxed{x \in B \Rightarrow \|\psi(x)\|_{**} = \|x\|}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|\psi(x)\|_{**} &= \sup_{x^*\in B^*}\frac{|\psi(x)(x^*)|}{\|x^*\|_*}\\ &= \sup_{x^*\in B^*}\frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|_*}\\ &\leq \sup_{x^*\in B^*}\frac{\|x^*\|_*\cdot\|x\|}{\|x^*\|_*}\\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\|\psi(x)\|_{**} \leq \|x\| \quad \forall x\in B.$$

Andererseits, sei $x\in B$ fixiert. Wähle $x_0^*\in B^*$ mit $\|x_0^*\|=1$ und $x_0^*(x)=\|x\|$ (existiert nach 3.3). Dann folgt

$$|\psi(x)| = \sup_{x^*\in B^*}\frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|_*} \geq \frac{|x_0^*(x)|}{\|x_0^*\|_*} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Dies ergibt $\|\psi(x)\|_{**}=\|x\|\ \forall x\in B$.

□

12.11.2002 **Beispiel.** für $B\neq B^{**}$

$B=\mathcal{C}[0,1]$, $\|f\|:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$

- B ist separabel (d.h. B hat eine dichte, abzählbare Teilmenge):

  $f\in\mathcal{C}[0,1]$, Weierstraß-Approximation $\rightsquigarrow P_n(x)\rightrightarrows f(x)$ mit Polynomen $P_n(x)=\sum_{i=0}^{k_n}a_ix^i$, approximieren die a_i durch rationale Zahlen

  $\rightsquigarrow$ Jede stetige Funktion $f\in\mathcal{C}[0,1]$ kann durch Polynome mit rationalen Koeffizienten approximiert werden.

  $\rightsquigarrow$ Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist dicht und abzählbar.

- B^{**} ist <u>nicht</u> separabel:

  Ist $x\in[0,1]$, so betrachte man das Funktional $\delta_x: B=\mathcal{C}[0,1]\to\mathbb{C}$,

  $$\delta_x(f):=f(x)$$

  Für $x\neq y\in[0,1]$ gilt

  $$\begin{aligned}\|\delta_x-\delta_y\| &= \sup_f\frac{|\delta_x(f)-\delta_y(f)|}{\|f\|_{\mathcal{C}[0,1]}}\\ &= \sup_f\frac{|f(x)-f(y)|}{\|f\|_{\mathcal{C}[0,1]}}\\ &\geq \frac{|f_0(x)-f_0(y)|}{\|f\|_{\mathcal{C}[0,1]}}\\ &= \frac{|0-1|}{1}=1,\end{aligned}$$

  mit $f_0\in\mathcal{C}[0,1]$, so daß $f_0(x)=0$, $f_0(y)=1$, $f_0([0,1])\subseteq[0,1]$.

  Damit ist $\{\delta_x\}_{x\in[0,1]}$ eine unabzählbare Menge in B^{**} mit $\|\delta_x-\delta_y\|=1$ für $x\neq y$.

$\rightsquigarrow B\neq B^{**}$, weil folgendes Lemma, angewendet auf $X=B^*$, gilt:

Lemma 3.5. *Ist X ein normierter Raum und ist X^* separabel, so ist X separabel.*

Beweis. X^* sei separabel. Dann ex. $f_i \in X^*$, $i = 1, 2, \ldots$, derart, daß $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset X^*$ dicht.

Zu jedem $f_i \in X^*$ wählen wir $x_i \in X$ mit

$$|f_i(x_i)| \geq \frac{1}{2}\|f_i\|, \quad \|x_i\| = 1$$

(dies ist möglich, weil $\|f_i\| = \sup_{|x|=1} |f_i(x)|$)

$\rightsquigarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ ist abzählbar und linear dicht, denn angenommen $\overline{\mathrm{Lin}(x_1, x_2, \ldots)} \subsetneq X$.

$\rightsquigarrow$ $\exists x_0 \in X \setminus \overline{\mathrm{Lin}(x_1, x_2, \ldots)}$

$\rightsquigarrow$ $\exists f \in X^*$: $f\,\big|_{\mathrm{Lin}(x_1, x_2, \ldots)} \equiv 0$ und $f(x_0) \neq 0$ (Satz 3.2)

Dann gilt

$$\frac{1}{2}\|f_i\| \leq |f_i(x_i)| = |(f_i - f)(x_i)| \leq \|f_i - f\| \cdot \underbrace{\|x_i\|}_{=1} = \|f_i - f\|, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$\{f_i\}$ ist dicht in X^*, d.h. es ex. eine Teilfolge $\{f_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $f_{i_j} \xrightarrow{j\to\infty} f$.

Wegen $\frac{1}{2}\|f_{i_j}\| \leq \|f_{i_j} - f\| \xrightarrow{j\to\infty} 0$ folgt dann $f = 0$. Widerspruch!

□

Zur Information (Satz von Riesz, Maßtheorie):

(X, d) kompakter metrischer Raum, nicht endlich
$B = \mathcal{C}(X)$ Banach-Raum aller stetigen Funktionen

$B^* = [\mathcal{C}(X)]^*$ Raum aller signierten endlichen Borel-Maße $\lambda : B \to \mathbb{C}$

$$\lambda(f) = \int_X f(x)\, d\lambda(x)$$

3.2. **Der Satz von Banach-Steinhaus.**

Hugo Steinhaus 1888-1972:

Satz 3.6. *X sei ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum. $L_\alpha : X \to Y$ linear und stetig $(\alpha \in A)$ Dann gilt entweder:* Banach-Steinhaus

(1) *Es existiert eine Zahl M mit*

$$\boxed{\|L_\alpha\| \leq M}$$

für alle $\alpha \in A$, oder aber:

(2) *Es existiert eine Menge vom Typ G_δ, welche dicht in X ist und für alle Elemente x dieser Menge gilt:*

$$\boxed{\sup_{\alpha\in A} \|L_\alpha x\| = +\infty}$$

Definition 3.7. Sei X metrischer Raum. Eine G_δ-Menge ist der abzählbare Durchschnitt offener Menge.

Bemerkung. Im Fall (1) folgt aus $\|L_\alpha\| \leq M$ sofort:

$$\begin{aligned} \|L_\alpha x\| &\leq \|L_\alpha\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \\ \rightsquigarrow \sup_\alpha \|L_\alpha x\| &\leq M \cdot \|x\| < \infty \quad \forall x \end{aligned}$$

Beweis. Definiere die Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \sup_{\alpha \in A} \|L_\alpha x\| \\ V_n &:= \{x \in X \,|\varphi(x) > n\} = \{x \in X \,|\exists \alpha_0 \in A : \|L_{\alpha_0} x\| > n\} \end{aligned}$$

$V_n \subseteq X$ ist offen (weil alle linearen stetigen Abbildungen L_α stetig sind).

(1) Sei eine der Menge V_n nicht dicht. Diese Menge sei $V_N \subset X$.
$\rightsquigarrow X \setminus V_N$ enthält eine Kugel $\mathcal{K}(x_0, r)$.
$\rightsquigarrow \exists x_0 \in X, r > 0 : V_N \cap \mathcal{K}(x_0, r) = \emptyset$.
$\rightsquigarrow \exists x_0 \in X, r > 0 : \forall y, |x_0 - y| < r : \varphi(y) \leq N$.
$\rightsquigarrow \exists x_0 \in X, r > 0 : \forall y, |x_0 - y| < r \forall \alpha \in A : \|L_\alpha(y)\| \leq N$.
Betrachte $z \in X$ mit $\|z\| = 1$. $\rightsquigarrow$ Der Punkt $y = x_0 + \frac{r}{2} z$ liegt in $\mathcal{K}(x_0, r)$.
$\rightsquigarrow \left\|L_\alpha(x_0) + \frac{r}{2} L_\alpha(z)\right\| \leq N$ für alle $\alpha \in A$.
Weiterhin gilt: $\|L_\alpha(x_0)\| \leq N$ für alle $\alpha \in A$.
Damit folgt:

$$\frac{r}{2} \|L_\alpha(z)\| \leq \left\|L_\alpha(x_0) + \frac{r}{2} L_\alpha(z)\right\| + \|L_\alpha(x_0)\| \leq 2N$$

$\rightsquigarrow \|L_\alpha(z)\| \leq \frac{4N}{r}$ für alle $\alpha \in A$ und <u>alle</u> $z \in X$ mit $\|z\| = 1$.
$\rightsquigarrow \|L_\alpha\| \leq \frac{4N}{r}$ für alle $\alpha \in A$
$\rightsquigarrow$ 1. Fall im Banach-Steinhaus-Satz.

(2) Alle Mengen $V_1, V_2, V_3, \ldots$ sind dicht und offen. Sei

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

(a) E ist vom Typ G_δ.
(b) Satz von Baire (siehe metrische Topologie): E ist dicht.
(c) Ist $x \in E$, so gilt

$$\begin{aligned} & x \in V_n \quad \forall n \\ \rightsquigarrow\; & \varphi(x) > n \quad \forall n \\ \rightsquigarrow\; & \varphi(x) = \infty \\ \rightsquigarrow\; & \sup_{\alpha \in A} \|L_\alpha x\| = \infty \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ 2. Fall im Banach-Steinhaus-Satz.

□

3.2.1. *Anwendung des Banach-Steinhaus-Satzes auf Fourierreihen.*

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,||z| = 1\}$, $L^2(S^1) = L^2_{\text{per}}(\mathbb{R}^1)$

Vollständiges ON-System in $L^2(S^1)$ ist:

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Für $f \in L^2(S^1)$ ist

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2} \cdot \varphi_n \quad \text{in } L^2(S^1)$$

mit den Fourierkoeffizienten $\langle f, \varphi_n \rangle_{L^2}$

Problem der Theorie der Fourier-Reihen: Für welche Punkte $z = e^{it}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2(S^1)} \varphi_n(t) \quad ?$$

Antwort: im allgemeinen negativ ! 14.11.2002

Betrachte den Raum aller stetigen Funktionen $\mathcal{C}\left(S^1\right) \subset L^2\left(S^1\right)$.

$$S_n(f, x) := \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2(S^1)} \varphi_k(x)$$

Definiere $L_{n,x} : \mathcal{C}\left(S^1\right) \to \mathbb{C}$ durch

$$L_{n,x}(f) := L_n(f) := S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt$$

Dabei ist $z = e^{ix} \in S^1$ fixiert. Berechne

$$\begin{aligned} \|L_n(f)\| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \|f\|_{\mathcal{C}(S^1)} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right| dt \\ \rightsquigarrow \|L_n\| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right| dt < \infty \end{aligned}$$

Konsequenz: $L_n : \mathcal{C}\left(S^1\right) \to \mathbb{C}$ ist ein beschränktes Funktional für alle $z = e^{ix}$.

Ziel: $\|L_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$, d.h. es tritt der zweite Fall im Banach-Steinhaus-Satz ein! Dirichlet-Kern D_n

$$\boxed{D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{int} + e^{i(n-1)t} + \ldots + e^{-i(n-1)t} + e^{-int} \qquad \text{(Dirichlet-Kern)}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(e^{it} - 1\right) D_n(t) &= e^{i(n+1)t} - e^{-int} \\ D_n(t) &= \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Definiere die Funktion $g_n(t)$ mit

$$g_n(t) = \begin{cases} 1 & D_n(x-t) \geq 0 \\ -1 & D_n(x-t) < 0 \end{cases} \qquad g_n(t) \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}$$

Wähle eine Folge stetiger Funktionen $f_j \in \mathcal{C}\left(S^1\right)$ mit $f_j(t) \to g_n(t)$ für fast alle t und $|f_j(t)| \leq 1$.

Lebesgue-Satz:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} L_n &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)|\,dt \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)\, D_n(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g_n(t)}_{\operatorname{sign}(D_n(x-t))}\quad D_n(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)|\,dt
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Konstruktion: $\|f_j\|_{\mathcal{C}(S^1)} \leq 1$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|L_n\| &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)|\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \qquad \text{(weil } D_n \text{ periodisch ist)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right| dt \\
&\overset{\left|\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right|<\left|\frac{1}{2}t\right|}{\geq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\right| 2dt \\
&= \frac{2\cdot 2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| \frac{dt}{t} \\
&\overset{s:=\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{=} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} |\sin(s)|\,\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)ds}{\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin(s)|}{s}ds \\
\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \|L_n\| &\geq \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin(s)|}{s}ds \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin(s)|}{s}ds \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$L_n : \mathcal{C}\left(S^1\right) \to \mathbb{C}$ ist linear und stetig, $\|L_n\| \to \infty$ $(n\to\infty)$.

$\rightsquigarrow$ 1. Fall des Banach-Steinhaus-Satzes (3.6) tritt nicht ein!

$\rightsquigarrow$ Es existiert eine Menge E_X vom Typ G_δ, welche dicht in X ist und für alle Elemente x dieser Menge gilt:

$$\sup_n \|L_n(x)\| = \infty$$

3.3. **Schwache Konvergenz in Banach-Räumen.**

Sei $(X, \|.\|)$ Banach-Raum und X^* der Dualraum.

$x_n \in X$ konvergiert gegen $x_0 \in X \Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (starke Konvergenz)

$\rightsquigarrow x_n \to x_0$, so gilt für alle $x^* \in X^*$: $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$.

schwache Konvergenz

Definition 3.8. Eine Folge $x_n \in X$ konvergiert schwach gegen $x_0 \in X$ $\left(x_n \xrightarrow{s} x_0\right)$ falls für alle Elemente $x^* \in X^*$ gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)}$$

Satz 3.9. *(Elementare Eigenschaften der schwachen Konvergenz)*

(1) *Aus* $x_n \to x_0$ *folgt* $x_n \xrightarrow{s} x_0$.
(2) *Aus* $x_n \xrightarrow{s} x_0$ *und* $x_n \xrightarrow{s} \bar{x}_0$ *folgt* $x_0 = \bar{x}_0$ *(Eindeutigkeit des Grenzwertes).*

Beweis. von (2): Gilt $x_n \xrightarrow{s} x_0$ und $x_n \xrightarrow{s} \bar{x}_0$, so folgt

$$\begin{aligned} \forall x^* \in X^* \quad &: \quad x^*(\bar{x}_0) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0) \\ \rightsquigarrow \forall x^* \in X^* \quad &: \quad x^*(x_0 - \bar{x}_0) = 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz 3.1 von Banach-Hahn bzw. Satz 3.3 folgt $x_0 = \bar{x}_0$. □

Beispiel. H sei ein seperabler Hilbertraum, $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein vollständiges ON-System.
Dann gilt $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ $(i \neq j)$ $\rightsquigarrow$ keine Teilfolge von $e_1, e_2, \ldots$ konvergiert.
Aber: $e_i \xrightarrow{s} 0$ in H.
Begründung: $x^* \in H^* \rightsquigarrow \exists y \in H : x^*(x) = \langle x, y\rangle \ \forall x \in H$ (Satz von Riesz). Weiterhin gilt

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, e_i\rangle \cdot e_i$$

(ON-Zerlegung von y in H). Diese Reihe konvergiert.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \lim_{i\to\infty} \langle y, e_i\rangle &= 0 \\ \rightsquigarrow \forall x^* \in H^* : \lim_{i\to\infty} x^*(e_i) &= 0 \\ \rightsquigarrow e_i &\xrightarrow{s} 0. \end{aligned}$$

$x_n \to x_0$ in $X \rightsquigarrow \|x_n\| \to \|x_0\|$ (trivial).

Satz 3.10. *(Verhalten der Norm bei schwacher Konvergenz) Aus* $x_n \xrightarrow{s} x_0$ *folgt:*

$$\boxed{\|x_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty}$$

$\|x_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ $\sup_n \|x_n\| < \infty$

Bemerkung. siehe Beispiel!

Beweis. Fixiere $x^* \in X^*$ und betrachte $x_n \xrightarrow{s} x_0$.
Definiere $L_n : X^* \to \mathbb{C}$ durch die Formel

$$L_n(x^*) := x^*(x_n)$$

Dann gilt:

$$|L_n(x^*)| = |x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \cdot \|x_n\| \qquad \forall x^* \in X^*$$

Damit folgt

$$\|L_n\| \leq \|x_n\| \qquad (x_n \in X, L_n \in X^{**}).$$

Weiterhin, ist $x_n \in X$ fixiert, so existiert nach Satz 3.3 $x_n^* \in X^*$ mit

$$x_n^*(x_n) = \|x_n\| \text{ und } \|x_n^*\| = 1$$

Somit erhalten wir

$$\|L_n\| \geq \|L_n(x_n^*)\| = |x_n^*(x_n)| = \|x_n\|.$$

Dies ergibt $\|L_n\| = \|x_n\|$.
Nach Voraussetzung $\left(x_n \xrightarrow{s} x_0\right)$ konvergiert für alle $x^* \in X^*$ die Folge

$$L_n(x^*) = x^*(x_n) \to x^*(x_0)$$

$L_1, L_2, L_3, \ldots : X^* \to \mathbb{C}$ konvergiert punktweise in jedem Element $x^* \in X^*$.

Satz 3.6 von Banach-Steinhaus:

$$\begin{aligned}\sup_{n\to\infty}\|L_n\| &< \infty\\ \overset{\|L_n\|=\|x_n\|}{\rightsquigarrow}\ \sup_n\|x_n\| &< \infty\end{aligned}$$

<u>Konsequenz</u>: Jede schwach-konvergente Folge ist beschränkt.

Wir wissen, daß $X \hookrightarrow X^{**}$ eine isometrische Injektion ist:

$$\|x_0\|_X = \|x_0\|_{X^{**}} = \sup_{x^*\in X^*}\frac{|x^*(x_0)|}{\|x^*\|_{X^*}}$$

Weiterhin gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} |x^*(x_0)| &\overset{x_n\overset{s}{\to}x_0}{=} \lim_{n\to\infty}|x^*(x_n)| \le \liminf_{n\to\infty}\|x^*\|\,\|x_n\|\\ \rightsquigarrow \frac{|x^*(x_0)|}{\|x^*\|} &\le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\\ \rightsquigarrow \|x_0\| = \sup_{x*\in X^*}\frac{|x^*(x_0)|}{\|x^*\|} &\le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\end{aligned}$$

□

$\mathcal{C}^*(X)$ 3.3.1. *Schwache Konvergenz in $\mathcal{C}(X)$.*

(X,d)	kompakter metrischer Raum
$\mathcal{C}(X)$	Banach-Raum der stetigen Funktionen mit Supremums-Norm.
$\mathcal{C}^*(X)$	Raum aller endlichen signierten Borel-Maße λ auf X.

Sei λ ein Maß. $\rightsquigarrow$ $\lambda : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{C}$ über die Formel

$$\boxed{\lambda(f) = \int_X f(x)\,d\lambda(x)}$$

$$|\lambda(f)| \le \|f\|_{\mathcal{C}(X)}\cdot\int_X |d\lambda|$$

Nach Definition: $f_n \overset{s}{\to} f$ in $\mathcal{C}(X) \Leftrightarrow \forall\lambda$: $\int f_n(x)\,d\lambda(x) \to \int f(x)\,d\lambda(x)$.

Satz 3.11. *$f_n \overset{s}{\to} f$ in $\mathcal{C}(X) \Leftrightarrow$*

(1) *$f_n(x) \to f(x)$ für alle Punkte $x \in X$ (punktweise Konvergenz).*
(2) *$\sup_n \max_{x\in X}|f_n(x)| < \infty$.*

Beispiel.

$$f_n(t) = \begin{cases} tn-1 & \frac{1}{n}\le t\le\frac{2}{n}\\ 3-tn & \frac{2}{n}< t\le\frac{3}{n}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

- $\|f_n\| = 1$
- $\sup_n \max_{x\in X}|f_n(x)| = 1 < \infty$
- $f_n(x) \to 0$ punktweise

$f_n \overset{s}{\to} 0$ in $\mathcal{C}(X)$, $f_n \not\to 0$ in $\mathcal{C}(X)$

Beweis. 19.11.2002

(⇒): $f_n \xrightarrow{s} f$ in $\mathcal{C}(X) \rightsquigarrow f_n$ ist beschränkt in $\mathcal{C}(X)$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \exists M \forall n : \|f_n\|_{\mathcal{C}(X)} &\leq M \\ \rightsquigarrow \exists M \forall n \forall x \in X : |f_n(x)| &\leq M \\ &\rightsquigarrow (2) \end{aligned}$$

Ist $x_0 \in X$, so betrachten wir das Borelmaß δ_{x_0} definiert durch

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

Wegen $f_n \xrightarrow{s} f$ in $\mathcal{C}(X)$ folgt dann

$$f_n(x_0) = \int_X f_n(x)\, d\delta_{x_0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_X f(x)\, d\delta_{x_0}(x) = f(x_0) \rightsquigarrow (1)$$

(⇐): $f_n \to f$ punktweise, $|f_n(x)| \leq M$

$$\rightsquigarrow \forall \lambda : \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_X f(x)\, d\lambda(x),$$

da $|f_n| \leq M$ und wegen X kompakt $\int_X M d\lambda(x) < \infty$ (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz).

□

3.4. Satz von Banach über die offene Abbildung.

Allgemein: X, Y seien metrische (topologische) Räume, $f : X \to Y$ stetig.

Definition 3.12. $f : X \to Y$ heißt offene Abbildung, falls aus $U \subset X$ offen auch $f(U) \subset Y$ offen folgt. offene Abbildung

Bemerkung. $f : X \to Y$ sei stetig, bijektiv, offen $\rightsquigarrow f$ ist Homöomorphismus

Satz 3.13. *X, Y seien Banach-Räume. $L : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann ist L offen.* linear, stetig, surjektiv $\rightsquigarrow$ offen

Konsequenz: $L : X \to Y$ linear, stetig $\rightsquigarrow \exists \|L\|\ \forall x \in X : \|Lx\| \leq \|L\|\,\|x\|$.

Sei L weiterhin bijektiv $\rightsquigarrow L^{-1} : Y \to X$ stetig $\rightsquigarrow \left\|L^{-1}\right\| < \infty$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \left\|L^{-1}y\right\| &\leq \left\|L^{-1}\right\| \|y\| \quad \forall y \in Y \\ y = L(x) \rightsquigarrow \|x\| &\leq \left\|L^{-1}\right\| \|Lx\| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Beweis. Reduktion: Es genügt zu zeigen, daß ein Radius $\delta > 0$ existiert mit

$$L(\mathcal{K}_X(0,1)) \supset \mathcal{K}_Y(0,\delta) \tag{3.1}$$

Beweis. Gelte (3.1). Sei $U \subset X$ offen und $x_0 \in U$. Bezeichne $y_0 := L(x_0) \in Y$.

Es existiert ein Radius $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{K}_X(x_0, \varepsilon) \subset U$, weil $U \subset X$ offen ist.

$$\begin{aligned} L(\mathcal{K}_X(x_0,\varepsilon)) &= L(\{x_0 + \varepsilon \cdot x \,|\, \|x\| < 1\}) \\ &= \{L(x_0) + \varepsilon L(x) \,|\, \|x\| < 1\} \\ &= y_0 + \varepsilon L(\mathcal{K}_X(0,1)) \\ \rightsquigarrow \mathcal{K}_Y(y_0, \varepsilon\delta) = y_0 + \varepsilon \mathcal{K}_Y(0,\delta) &\overset{(3.1)}{\subset} y_0 + \varepsilon L(\mathcal{K}_X(0,1)) = L(\mathcal{K}_X(x_0,\varepsilon)) \subset L(U) \\ \rightsquigarrow \forall y_0 \in L(U)\ \exists \eta > 0 : \mathcal{K}_Y(y_0,\eta) &\subset L(U) \\ &\rightsquigarrow L(U) \subset Y \text{ offen} \end{aligned}$$

□

Nach Voraussetzung gilt

$$Y = L(X) = L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_X(0,k)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k))}$$

Setze

$$V_k := Y \setminus \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k))}$$

Dann gilt:

(1) V_k ist offen in Y.

(2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \emptyset$, weil $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k))}$

Nach dem Satz von Baire ist dann wenigstens eine der Mengen V_k nicht dicht.

Sei V_{k_0} nicht dicht $\rightsquigarrow$ Es existiert eine offene Menge W mit $W \cap V_{k_0} = \emptyset$.

$$\rightsquigarrow \exists \emptyset \neq W \subset Y \text{ offen } : \quad W \cap \left(Y \setminus \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k_0))}\right)$$

$$\rightsquigarrow \exists \emptyset \neq W \subset Y \text{ offen } : \quad W \subset \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k_0))} \tag{3.2}$$

Wähle $y_0 \in W \subset Y$ und einen Radius $\eta > 0$ mit

$$\mathcal{K}_Y(y_0,\eta) \subset W \subset \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k_0))}.$$

Ist $y \in Y$ mit $\|y\| < \eta$, so ist $y_0 + y \in \mathcal{K}_Y(y_0,\eta) \subset \overline{L(\mathcal{K}_X(0,k_0))}$.

Dann existiert eine Folge $x_1'', x_2'', x_3'', \ldots \in X$ mit $\|x_i''\| \leq k_0$ und $L(x_i'') \to y_0 + y$.

Insbesondere $(y = 0)$ existiert eine Folge $x_1', x_2', \ldots \in X$ mit $\|x_i'\| \leq k_0$ und $L(x_i') \to y_0$.

Betrachte die Folge $x_i := x_i'' - x_i'$ in X. Dann gilt $\|x_i\| \leq 2k_0$ für alle $i = 1,2,3,\ldots$ und $L(x_i) = L(x_i'') - L(x_i') \to (y_0 + y) - y_0 = y$.

Also:

$$\mathcal{K}_Y(0,\eta) \subset \overline{L(\mathcal{K}_X(0,2k_0))} \tag{3.3}$$

Sei $y \in Y$ beliebig. Fixiere $\varepsilon > 0$: Dann liegt

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|} &\in \mathcal{K}_Y(0,\eta) \\ \rightsquigarrow \exists x^* \in \mathcal{K}_X(0,2k_0) : \left\| \frac{\eta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|} - L(x^*) \right\| &< \frac{\varepsilon \cdot \eta}{2} \frac{1}{\|y\|} \\ \rightsquigarrow \left\| y - L\left(\frac{2\|y\|}{\eta} \cdot x^*\right) \right\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Betrachte

$$x := \frac{2\|y\|}{\eta} \cdot x^*.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|L(x) - y\| &< \varepsilon \\ \|x\| = \frac{2\|y\|\|x^*\|}{\eta} &\leq \frac{4k_0\|y\|}{\eta}. \end{aligned}$$

Also: Zu jedem Punkt $y \in Y$ und zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existiert $x \in X$ mit

$$\|L(x) - y\| < \varepsilon \text{ und } \|x\| \leq \frac{4k_0\|y\|}{\eta} \tag{3.4}$$

Setze

$$\delta := \frac{\eta}{4k_0}.$$

Wir betrachten $y \in \mathcal{K}_Y(0,\delta)$ und fixieren $\varepsilon > 0$.
Dann existiert ein Punkt $x_1 \in X$ mit $\|y - L(x_1)\| < \frac{1}{2}\delta\varepsilon$ und $\|x_1\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\| < 1$.
Damit ist x_1 konstruiert. Seien die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bereits derart konstruiert, daß:

$$\|y - L(x_1) - \ldots - L(x_n)\| < 2^{-n} \cdot \delta \cdot \varepsilon$$

Nach (3.4) existiert ein Punkt x_{n+1} mit

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &\leq 2^{-n} \cdot \varepsilon \\ \|y - L(x_1) - \ldots - L(x_{n+1})\| &\leq 2^{-(n+1)} \cdot \delta \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ensteht eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit $\|x_{n+1}\| \leq 2^{-n} \cdot \varepsilon$. Sei

$$S_n := x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Aus $\|x_{n+1}\| \leq 2^{-n} \cdot \varepsilon$ folgt, daß die Folge S_n eine Cauchy-Folge in X ist. Da X Banach-Raum ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ in X. Sei

$$x := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in X.$$

Wir berechnen

$$\|x\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(n-1)} \cdot \varepsilon = 1 + \varepsilon$$
$$\rightsquigarrow\ x \in \mathcal{K}_X(0, 1+\varepsilon)$$

Weil L stetig ist, gilt

$$0 = \lim_{n\to\infty} 2^{-(n+1)} \cdot \delta\varepsilon \geq \lim_{n\to\infty} \|y - L(S_n)\| \overset{L \text{ stetig}}{=} \left\|y - L\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)\right\| = \|y - L(x)\|$$
$$\rightsquigarrow\ y = L(x)$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_Y(0,\delta) &\subset L(\mathcal{K}_X(0,1+\varepsilon)) \\ L \text{ linear} \rightsquigarrow \mathcal{K}_Y\left(0, \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right) &\subset L(\mathcal{K}_X(0,1)) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Voraussetzung der Reduktion.

□

Folgerung. $L: X \to Y$ bijektiv, linear, stetig $\rightsquigarrow L^{-1}: Y \to X$ stetig.

Beispiel. Sei $X = [0, 2\pi)$, $Y = S^1$, $f: X \to Y$ mit $f(t) = e^{it}$. f ist stetig, bijektiv, aber f^{-1} ist nicht stetig.

3.4.1. *Die Gruppe* GL(X).

$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \{L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid L \text{ bijektiv}\}$ ist eine topologische Gruppe. $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ist offen.
Sei X Banach-Raum. GL(X)

$$\boxed{\mathrm{GL}(X) = \left\{L: X \to X \text{ linear, stetig, bijektiv, } L^{-1} \text{ stetig}\right\}}$$

Nach der letzten Folgerung ist dann

$$\mathrm{GL}(X) = \{L: X \to X \text{ linear, stetig, bijektiv}\}.$$

21.11.2002
GL (X)
metr. Raum
und top.
Gruppe

Satz 3.14.

(1) GL (X) *ist eine Gruppe.*
(2) GL $(X) \subset \mathcal{L}(X,X)$ *ist Banach-Raum mit Operatornorm* $\rightsquigarrow$ GL (X) *ist metrischer Raum.*

(3) GL (X) *ist eine topologische Gruppe, d.h. die Gruppenoperationen*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(X) \times \mathrm{GL}(X) \ni (L_1, L_2) &\mapsto L_1 \circ L_2 \in \mathrm{GL}(X) \\ \mathrm{GL}(X) \ni L &\mapsto L^{-1} \in \mathrm{GL}(X) \end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis.

(1) trivial
(2) Gegeben sei $L \in \mathrm{GL}(X)$.
Es ist zu zeigen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $L^* \in \mathcal{L}(X,X)$ und gilt $\|L - L^*\| < \varepsilon$, so folgt $L^* \in \mathrm{GL}(X)$.
Wir wählen

$$\varepsilon := \frac{1}{\|L^{-1}\|} > 0$$

(Banach-Satz 3.13) und betrachte $L^* : X \to X$ stetig mit

$$\|L - L^*\| < \varepsilon = \frac{1}{\|L^{-1}\|}.$$

$$\rightsquigarrow \left\|L^{-1} \circ (L^* - L)\right\| \leq \left\|L^{-1}\right\| \cdot \|L^* - L\| < \left\|L^{-1}\right\| \cdot \varepsilon = 1$$

Setzen

$$A := -L^{-1}(L^* - L).$$

Dann gilt $\|A\| < 1$.
Wir betrachten $\mathrm{Id}_X - A : X \to X$ stetig und zeigen: $\mathrm{Id}_X - A$ ist bijektiv.
(a) Injektivität: $x \in X$ liege in $\ker(\mathrm{Id}_X - A) \rightsquigarrow (\mathrm{Id}_X - A)(x) = 0 \rightsquigarrow x = A(x) \rightsquigarrow$

$$\|x\| = \|Ax\| \leq \underbrace{\|A\|}_{<1} \cdot \|x\|$$

$\rightsquigarrow x = 0$.

Neumann-
Reihe

(b) Surjektivität: Sei $x^* \in X$ gegeben. Konstruiere den Punkt

$$\boxed{x = x^* + \sum_{n=1}^{\infty} A(x^*)} \qquad \text{(Neumann-Reihe)}$$

Diese Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n(x^*)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n \|x^*\| = \|x^*\| \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n < \infty$$

Berechne:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_X - A)(x) &= x - A(x) \\ &= x^* + A(x^*) + A^2(x^*) + \ldots - A(x^* + A(x^*) + \ldots) \\ &= x^* + A(x^*) + A^2(x^*) + \ldots - A(x^*) - A^2(x^*) - \ldots \\ &= x^* \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Id}_X - A$ ist surjektiv.

Bemerkung. Aus $(\mathrm{Id}_X - A)(x) = x^*$ folgt

$$\begin{aligned} x &= (\mathrm{Id}_X - A)^{-1}(x^*) \\ \rightsquigarrow (\mathrm{Id}_X - A)^{-1}(x^*) &= x^* + \sum_{n=1}^{\infty} A^n(x^*) \qquad \Big(\text{Formel für } (\mathrm{Id}_X - A)^{-1}\Big) \\ \rightsquigarrow \left\|(\mathrm{Id}_X - A)^{-1}\right\| &\le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} \end{aligned}$$

Analog: Für $\|A\| < 1$ folgt

$$\left\|(\mathrm{Id}_X - A)^{-1} - \mathrm{Id}_X\right\| \le \frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

Also:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathrm{Id}_X - A}_{\text{bijektiv}} &= \mathrm{Id}_X - \left(-L^{-1} \circ (L^* - L)\right) \\ &= \mathrm{Id}_X + L^{-1}L^* - \mathrm{Id}_X = \underbrace{L^{-1}}_{\text{bijektiv}} L^* \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow L^*$ ist bijektiv $\rightsquigarrow L^* \in \mathrm{GL}(X)$.

(3) Seien $L_n, L_n^* \in \mathrm{GL}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $L_n \to L$ und $L_n^* \to L^*$. Berechne:

$$\begin{aligned} \|L_n \circ L_n^* - L \circ L^*\| &\le \Bigg\|\underbrace{L \circ L^* - L_n \circ L^*}_{(L-L_n)\circ L^*}\Bigg\| + \Bigg\|\underbrace{L_n \circ L^* - L_n \circ L_n^*}_{L_n \circ (L^* - L_n^*)}\Bigg\| \\ &\le \underbrace{\|L - L_n\|}_{\to 0} \cdot \|L^*\| + \underbrace{\|L_n\|}_{\text{konvergiert}} \cdot \underbrace{\|L^* - L_n^*\|}_{\to 0} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen: $L_n^{-1} \to L^{-1}$.
Führe neue Operation durch die Formel

$$L_n = L - B_n = L \circ \left(\mathrm{Id} - L^{-1} \circ B_n\right)$$

ein. Wegen $L_n \to L$ folgt $\|B_n\| \to 0$. Mit

$$A_n = L^{-1} B_n$$

gilt dann $\|A_n\| \le \left\|L^{-1}\right\| \|B_n\|$, d.h. $\|A_n\| < 1$ für hinreichend große n. Dann gilt (siehe Bemerkung)

$$\left\|(\mathrm{Id}_X - A_n)^{-1} - \mathrm{Id}_X\right\| \le \frac{\|A_n\|}{1-\|A_n\|} \to 0$$

Dann folgt $(\mathrm{Id}_X - A_n)^{-1} \to \mathrm{Id}_X$.
<u>Aber</u>: (Multiplikation stetig)

$$L_n^{-1} = [L \circ (\mathrm{Id}_X - A_n)]^{-1} = \Bigg(\underbrace{\mathrm{Id}_X - A_n}_{\to \mathrm{Id}_X}\Bigg)^{-1} \circ L^{-1} \to \mathrm{Id}_X \circ L^{-1}$$

□

Bemerkung. H sei separabler Hilbertraum. $\mathrm{GL}(H)$ haben grundsätzlich verschiedene Eigenschaften bezogen auf die Topologie. $\mathrm{GL}(H)$ ist kontrahierbarer topologischer Raum.

$\mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ ist definitiv nicht kontrahierbar: $\mathrm{GL}(1;\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cong S^1 \not\cong$ Punkt.

3.4.2. *Satz über den abgeschlossenen Graphen.*

Satz über den abgeschlossenen Graphen

Graph $\mathrm{Gr}(L)$

Satz 3.15. *(Satz über den abgeschlossenen Graphen)*
Seien X, Y Banach-Räume, $L : X \to Y$ linear (nichts weiter).

$$\boxed{\mathrm{Gr}(L) = \{(x, L(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y} \qquad \text{Graph von } L$$

Dann ist L stetig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Gr}(L) \subset X \times Y$ abgeschlossen ist.

Beweis.

($\Rightarrow$): Sei L stetig, und sei $(x_n, L(x_n)) \subset \mathrm{Gr}(L)$ eine Folge in $\mathrm{Gr}(L)$, welche in $X \times Y$ gegen (x_0, y_0) konvergiert. Zu zeigen: $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}(L)$.

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} L(x_n) \overset{L \text{ stetig}}{=} L\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = L(x_0),$$

d.h. $(x_0, y_0) = (x_0, L(x_0)) \in \mathrm{Gr}(L)$.

($\Leftarrow$): $L : X \to Y$, linear und $\mathrm{Gr}(L) \subset X \times Y$ abgeschlossen.
Das Produkt $X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}$ ist erneut ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|(x + y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y .$$

Konsequenz: $\mathrm{Gr}(L) \subset X \times Y$ ist linearer Teilraum eines Banach-Raumes, weil L linear ist. Ist $\mathrm{Gr}(L) \subset X \times Y$ abgeschlossen, so wird $\mathrm{Gr}(L)$ ein Banach-Raum und die Abbildung

$$\Psi : X \ni x \mapsto (x, Lx) \in \mathrm{Gr}(L)$$

ist bijektiv.
Betrachte die Projektion auf die erste Achse,

$$\Phi : \mathrm{Gr}(L) \to X, \quad \Phi(x, y) = x.$$

Φ ist stetig, weil

$$\|\Phi(x, y)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_Y = \|(x, y)\|$$

$\Phi : \mathrm{Gr}(L) \to X$ ist bijektiv und es gilt

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}(L)}.$$

Banach-Satz 3.13: $\Phi^{-1} = \Psi : X \to \mathrm{Gr}(L)$ ist stetig. $\rightsquigarrow$ L ist stetig.

□

4. Der adjungierte Operator

4.1. Der Fall des Hilbert-Raumes.

adjungierter Operator L^*

Definition 4.1. H_1 und H_2 seien Hilbert-Räume. $L : H_1 \to H_2$ linear und stetig.

Dann existiert ein adjungierter Operator $L^* : H_2 \to H_1$, welcher wie folgt definiert ist:

$y \in H_2$ sei gegeben. Betrachte $f_y : H_1 \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_y(x) = \langle Lx, y\rangle$. f_y ist linear, stetig.

Satz von Riesz: $\exists! L^*(y) \in H_1 : \langle Lx, y\rangle = f_y(x) = \langle x, L^* y\rangle$

Die L^* definierene Gleichung ist

$$\boxed{\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^* y\rangle \qquad \forall x \in H_1, y \in H_2}$$

L^* linear
$\|L^*\| = \|L\|$
$L^{**} = L$

Satz 4.2. *Ist $L : H_1 \to H_2$ linear und stetig, so ist $L^* : H_2 \to H_1$ gleichfalls linear und stetig und es gilt:*

$$\boxed{\|L^*\| = \|L\|} \quad \textit{und} \quad \boxed{(L^*)^* = L}$$

Beweis. L^* ist linear (kein Problem).

$$\left\langle y, (L^*)^* (x) \right\rangle = \langle L^* (y), x \rangle = \overline{\langle x, L^* (y) \rangle} = \overline{\langle Lx, y \rangle} = \langle y, Lx \rangle \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

$\rightsquigarrow \forall x \in H_1$: $L(x) = (L^*)^* (x) \rightsquigarrow (L^*)^* = L$.

$$\begin{aligned} \|L^*(y)\|_{H_1}^2 &= \langle L^*(y), L^*(y) \rangle_{H_1} \\ &= \langle LL^*(x), y \rangle_{H_2} \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|LL^*(y)\|_{H_2} \cdot \|y\|_{H_2} \\ &\leq \underbrace{\|L\|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|L^*(y)\|_{H_1}}_{<\infty} \cdot \|y\|_{H_2} \\ \rightsquigarrow \|L^*(y)\|_{H_1} &\leq \|L\| \cdot \|y\|_{H_2} \qquad \forall y \in H_2 \\ \rightsquigarrow \|L^*\| &\leq \|L\| \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow L^*$ stetig.

Analog: $\|L\| = \left\|(L^*)^*\right\| \leq \|L^*\|$.

$\rightsquigarrow \|L^*\| = \|L\|$

$\square$

Definition 4.3. $L : H \to H$ linear, stetig. L heißt <u>selbstadjungiert</u> (und stetig), falls $L = L^*$. selbstadjungiert

Satz 4.4. *$L : H \to H$ sei selbstadjungiert. Dann gilt* $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x \rangle|$

$$\boxed{\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x \rangle|}$$

Bemerkung.

$$\|L\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Lx, Lx \rangle$$

Beweis. Sei 26.11.2002

$$\mu := \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x \rangle|$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\langle Lx, x \rangle| &\leq \|Lx\| \cdot \|x\| \leq \|L\| \cdot \|x\|^2 \\ \rightsquigarrow \mu = \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x \rangle| &\leq \|L\| \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} 4\mathrm{Re}\,(Lx, y) &= 2\left(\langle Lx, y \rangle + \overline{\langle Lx, y \rangle}\right) \\ &= 2\left(\langle Lx, y \rangle + \langle y, Lx \rangle\right) \\ &\overset{L=L^*}{=} 2\left(\langle Lx, y \rangle + \langle Ly, x \rangle\right) \\ &= \langle L(x+y), x+y \rangle - \langle L(x-y), x-y \rangle \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
|\langle Lz, z\rangle| &= \|z\|^2 \left| \left\langle L \underbrace{\left(\frac{z}{\|z\|}\right)}_{\|\cdot\|=1}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \right| \leq \mu \cdot \|z\|^2 \\
\rightsquigarrow 4 \left|\operatorname{Re}\langle Lx, y\rangle\right| &\leq |\langle L(x+y), x+y\rangle| + |\langle L(x-y), x-y\rangle| \\
&\leq \mu \cdot \|x+y\|^2 + \mu \cdot \|x-y\|^2 \\
\rightsquigarrow \left|\operatorname{Re}\langle Lx, y\rangle\right| &\leq \frac{\mu}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\
&\overset{\substack{\text{Hilbert-}\\ \text{Raum}}}{=} \frac{\mu}{4} \cdot 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\
&= \frac{\mu}{2} \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Betrachte $0 \neq x \in H$ sowie $y = \frac{Lx}{\|Lx\|}$ (falls $Lx \neq 0$).

$$\langle Lx, y\rangle = \left\langle Lx, \frac{Lx}{\|Lx\|}\right\rangle = \frac{\|Lx\|^2}{\|Lx\|} = \|Lx\|$$

$\|y\| = 1$. Setze dies in (4.1) ein:

$$\mathbb{R} \ni \|Lx\| = \langle Lx, y\rangle = \left|\operatorname{Re}\langle Lx, y\rangle\right| \leq \frac{\mu}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \frac{\mu}{2}\left(\|x\|^2 + 1\right).$$

Somit gilt für <u>alle</u> $x \in H$:

$$\|Lx\| \leq \frac{\mu}{2}\left(\|x\|^2 + 1\right)$$

(Bem.: Ist $Lx = 0$, so ist diese Ungleichung trivial.) Daraus folgt:

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| \leq \frac{\mu}{2} \sup_{\|x\|=1} \left(\|x\|^2 + 1\right) = \frac{\mu}{2} \cdot 2 = \mu$$

$\rightsquigarrow \|L\| \leq \mu$. □

4.2. **Der Fall des Banach-Raumes.**

X, Y - Banach-Räume ($X \not\subseteq X^{**}$), $L : X \to Y$ linear und stetig

adjungierter Operator L^*

Wir definieren $L^* : Y^* \to X^*$ durch die Formel

$$\boxed{L^*(f^*)(x) := f^*(Lx) \qquad f^* \in Y, x \in X}$$

Bemerkung. Weil L stetig ist, folgt aus $f^* \in Y^*$ auch $L^*(f^*) \in X^*$. $\rightsquigarrow$ Definition ist korrekt.

Bemerkung. $L^* : Y^* \to X^*$ ist linear.

L^* stetig $\|L^*\| \leq \|L\|$

Satz 4.5. *Ist $L : X \to Y$ linear, stetig, so ist $L^* : Y^* \to X^*$ linear, stetig und es gilt*

$$\boxed{\|L^*\| \leq \|L\| < \infty}$$

Beweis. Wir wählen $f^* \in Y^*$ und betrachten

$$\begin{aligned}
\Big\| \underbrace{L^*(f^*)}_{X\to\mathbb{C}} \Big\|_{X^*} &= \sup_{0\neq x\in X} \frac{|L^*(f^*)(x)|}{\|x\|} \\
&= \sup_{0\neq x\in X} \frac{|f^*(Lx)|}{\|x\|} \\
&\leq \sup_{0\neq x\in X} \frac{\|f^*\|\cdot\|L\|\cdot\|x\|}{\|x\|} \\
&= \|f^*\|\cdot\|L\| \\
\rightsquigarrow 0\neq f^*\in Y^* : \frac{\|L^*(f^*)\|}{\|f^*\|} &\leq \|L\| \\
\rightsquigarrow \|L^*\| &\leq \|L\| < \infty
\end{aligned}$$

□

Sei $L : X \to Y$ linear, stetig $\rightsquigarrow L^* : Y^* \to X^* \rightsquigarrow (L^*)^* : X^{**} \to Y^{**}$, $X^{**} \subset X$ und $Y^{**} \subset Y$.

Satz 4.6. *Sei $L : X \to Y$ linear. Dann gilt:*

$$\boxed{(L^*)^*|_X = L}$$

Beweis. Betrachte $x \in X \hookrightarrow X^{**} \rightsquigarrow x \in X^{**} \rightsquigarrow x : X^* \to \mathbb{C}$ und es gilt

$$x(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^{**}.$$

Dann gilt:

$$(L^*)^*(x)(z) = x(L^*z) = (L^*z)(x) = z(Lx) \qquad z \in Y^*$$

Nun folgt $Lx \in Y \hookrightarrow Y^{**}$ und somit gilt

$$\begin{aligned}
(Lx)\underbrace{(z)}_{\in Y^*} &= z(Lx) \\
\rightsquigarrow \underbrace{(L^*)^*(x)}_{\in Y^{**}}(z) &= \underbrace{(Lx)}_{\in Y^{**}}(z) \qquad \forall z \in Y^* \\
\rightsquigarrow (L^*)^*(x) &= Lx \text{ als Funktional auf } Y^*
\end{aligned}$$

□

Folgerung. $L^{**}|_X = L$

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{L} & Y \\
\cap & & \cap \\
X^{**} & \xrightarrow{L^{**}} & Y^{**}
\end{array}$$

Satz 4.7. *In jedem Banach-Raum gilt* $\|L^{**}\| = \|L\|$

$$\boxed{\|L^{**}\| = \|L\|}$$

Beweis. Weil L^{**} eine Erweiterung von L ist, gilt $\|L\| \leq \|L^{**}\|$.

Nach Satz 4.5 gilt: $\|L^{**}\| \leq \|L^*\| \leq \|L\|$.

□

5. Kompakte Operatoren

kompakter Operator

Definition 5.1. $L : X \to Y$ sei linear und stetig. L ist kompakter Operator, falls das Bild $L(A) \subset Y$ jeder in X beschränkten Menge $A \subset X$ präkompakt in Y ist.

Äquivalent: Ist $x_1, x_2, \ldots \in X$ eine beschränkte Folge in X, $\|x_n\| \leq M$, dann ex. eine Teilfolge $L(x_{i_1}), L(x_{i_2}), \ldots$, die in Y konvergiert.

endl. dim. $\rightsquigarrow$ kompakt

Satz 5.2. *Ist* $L : X \to Y$ *linear und stetig,* $\dim(L(X)) < \infty$, *so ist* L *kompakt.*

Beweis. Sei $A \subset X$ kompakt. $\rightsquigarrow \exists M\ \forall \alpha \in A : \|\alpha\|_X \leq M$.

Dann ist die Bildmenge $L(A) \subset L(X) \subset Y$ gleichfalls beschränkt:

$$\|L\alpha\|_Y \leq \|L\| \cdot \|\alpha\|_X \leq \|L\| \cdot M,$$

d.h. $L(A) \subset \mathcal{K}_Y(0, \|L\| \cdot M)$.

$L(A) \subset L(X) \subset Y$, $L(A)$ beschränkt, $L(X) \overset{\text{top.}}{\cong} \mathbb{R}^n \rightsquigarrow L(A)$ ist präkompakt in $L(X) \subset Y$.

□

endlich dim. Operator

Definition 5.3. L heißt endlich-dimensionaler Operator, falls $\dim(L(X)) < \infty$.

$K(X,Y)$

Sei $K(X,Y)$ die Menge der kompakten Operatoren.

$$\boxed{\text{Endl. dim. Op.} \subset K(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y) = \{L : X \to Y \text{ linear und stetig}\}}$$

$K(X,Y)$ abgeschlossen

Satz 5.4. $K(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *ist ein abgeschlossener linearer Teilraum, d.h.*

(1) $L_1, L_2 \in K(X,Y) \rightsquigarrow \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \in K(X,Y)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
(2) *Ist* $L_n \in K(X,Y)$, $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und* $\|L_n - L\| \to 0$, *so ist* $L \in K(X,Y)$.

Beweis.

(1) Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine beschränkte Folge in X.
Dann existiert eine Teilfolge $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ derart, daß $L_1(a_{i_1}), L_1(a_{i_2}), \ldots \to *$ und $L_2(a_{i_1}), L_2(a_{i_2}), \ldots \to **$
$\rightsquigarrow (\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2)\left(a_{i_j}\right) \to \lambda_1 * + \lambda_2 ** \rightsquigarrow \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \in K(X,Y)$.
(2) Sei $L_n \in K(X,Y)$, $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\|L_n - L\| \to 0$.
Fixiere $A \subset X$ beschränkt. $\rightsquigarrow \exists r > 0\, \forall \alpha \in A : \|\alpha\| \leq r$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Dann existiert ein n_0, so daß
$$\|L_{n_0} - L\| < \frac{\varepsilon}{2r}.$$
Der Operator L_{n_0} ist kompakt. $\rightsquigarrow L_{n_0}(A) \subset Y$ ist präkompakt $\rightsquigarrow L_{n_0}(A) \subset Y$ besitzt (nach Hausdorff-Satz 1.8) ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz:
$$\exists y_1, \ldots, y_m \in Y : \quad L_{n_0}(A) \subset \mathcal{K}\left(y_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup \mathcal{K}\left(y_m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
Ist $a \in A$ ein beliebiger Punkt, so existiert ein y_j $(1 \leq j \leq m)$ mit
$$\|y_j - L_{n_0}(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Dann folgt
$$\begin{aligned} \|L(a) - y_j\| &\leq \|L(a) - L_{n_0}(a)\| + \|L_{n_0}(a) - y_j\| \\ &\leq \|L - L_{n_0}\| \cdot \|a\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow L(A) \subset \mathcal{K}(y_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup \mathcal{K}(y_m, \varepsilon)$.
$\rightsquigarrow L(A)$ besitzt für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz $\rightsquigarrow L(A) \subset Y$ ist präkompakt.

□

Satz 5.5. *Sei $L : X \to Y$ linear und kompakt.*

(1) *Ist $L_1 : Y \to Z$ linear, stetig, so wird $L_1 \circ L : X \to Z$ kompakt.*
(2) *Ist $L_1 : Z \to X$ linear, stetig, so wird $L \circ L_1 : Z \to Y$ kompakt.*

Speziallfall: $X = Y$. $\mathcal{L}(X, X)$ ist Banach-Algebra. Dann ist $K(X, X) \subset \mathcal{L}(X, X)$ ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal.

Beweis.

(1) $A \subset X$ beschränkt $\rightsquigarrow L(A) \subset Y$ präkompakt, da L kompakt $\rightsquigarrow L_1 L(A) \subset Z$ ist präkompakt in Z, da L_1 stetig ist.
(2) $A \subset Z$ beschränkt $\rightsquigarrow L_1(A) \subset X$ beschränkt, weil L_1 linear und stetig $\rightsquigarrow L L_1(A) \subset Y$ ist präkompakt, da L kompakt ist.

□ 28.11.2002

Ziel: $L : X \to Y$ kompakt $\rightsquigarrow L^* : Y^* \to X^*$ kompakt.

Lemma 5.6. *X Banach-Raum, $K \subset X$ kompakte Teilmenge in X. $x_n^* \in X^*$ Folge von Funktionalen mit $\|x_n^*\| \le 1$. Dann ex. eine Teilfolge $x_{n_i}^*$, welche auf K gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Betrachte den Banach-Raum $\mathcal{C}(K)$ mit der Supremums-Norm. $x_n^* \in X^*$ liegen natürlicherweise in $\mathcal{C}(K)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \|x_n^*\|_{\mathcal{C}(K)} &= \sup_{k \in K} \{|x_n^*(k)|\} \\ &\le \sup_{k \in K} \|x_n^*\| \cdot \|k\| \\ &\le \sup_{k \in K} \|k\| \\ &= M < \infty \qquad \text{weil } K \subset X \text{ kompakt} \end{aligned}$$

Damit ist die Folge der auf K definierten stetigen Funktionen x_n^* gleichmäßig beschränkt.

Weiterhin: $k_1, k_2 \in K$

$$|x_n^*(k_1) - x_n^*(k_2)| = |x_n^*(k_1 - k_2)| \le \|x_n^*\| \cdot \|k_1 - k_2\| \le \|k_1 - k_2\| \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

$\rightsquigarrow$ Die auf K definierte Funktionenfolge x_n^* ist gleichgradig stetig.

Arzela-Ascoli-Satz 1.12: Es existiert eine Teilfolge $x_{n_i}^*$, welche gleichmäßig auf K konvergiert.

□

Satz 5.7. *$L : X \to Y$ kompakt $\rightsquigarrow L^* : Y^* \to X^*$ kompakt.* L kompakt $\rightsquigarrow L^*$ kompakt

Beweis. Sei $y_n^* \in Y^*$ ein beschränkte Folge. Für $\mathcal{K}_X(0,1) \subset X$ ist $L\left(\overline{\mathcal{K}_X(0,1)}\right) \subset Y$ kompakt, weil L kompakt ist. Nach Lemma 5.6 existiert dann eine Teilfolge $y_{n_i}^*$, welche gleichmäßig auf $L\left(\overline{\mathcal{K}_X(0,1)}\right)$ konvergiert. Ist $y = L(x) \in L\left(\overline{\mathcal{K}_X(0,1)}\right)$, so gilt

$$y_{n_i}^*(y) = y_{n_i}^*(Lx) = \left(L^* y_{n_i}^*\right)(x)$$

also konvergiert $L^* y_{n_i}^*$ gleichmäßig auf $\overline{\mathcal{K}_X(0,1)} \subset X$. Sei

$$x_0^* = \lim_{i \to \infty} L y_{n_i}^* \in X^*$$

(x_0^* stetige Funktion auf $\overline{\mathcal{K}_X(0,1)}$, $x_0^*(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot x_0^*(v) \rightsquigarrow x_0^* : X \to \mathbb{C}$).

Weil $L^* y^*_{n_i}$ gleichmäßig auf $\mathcal{K}(0,1)$ gegen x^*_0 konvergiert, gilt

$$\left\| x^*_0 - L^* y^*_{n_i} \right\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} \left| x^*_0(x) - L^* y^*_{n_i}(x) \right| \to 0.$$

$\rightsquigarrow L^* y^*_{n_i}$ ist konvergent in X^*, d.h. $L^* : Y^* \to X^*$ ist kompakt.

□

$$\text{Endl.} - \text{dim.}(X,X) \subset \overline{\text{Endl.} - \text{dim.}(X,X)} \overset{??}{\subset} K(X,X) \subset \mathcal{L}(X,X)$$

Satz 5.8. *H separabler Hilbert-Raum. Dann gilt*

$$\boxed{\overline{\text{Endl.-dim.}(H)} = K(H,H)}$$

d.h. jeder kompakte Operator $L : H \to H$ läßt eine Folge endlich-dimensionaler Operatoren $P_n : H \to H$ mit $\|L - P_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zu.

Beweis. $e_1, e_2, e_3, \dots$ abzählbare, vollständige ON-Basis.

$P_n : H \to H$ sei die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, d.h.

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

P_n ist endlich-dimensionaler Operator.

<u>Warnung</u>: $P_n \not\to \mathrm{Id}_H$ falls $\dim H = \infty$, da $\|\mathrm{Id}_H - P_n\| \geq \|e_{n+1} - P_n(e_{n+1})\| \geq 1$.

Wir zeigen: $P_n \circ L \to L$, falls L kompakt ist.

Betrachten $A = \{x \in H \,|\, \|x\| = 1\} \subset H$ beschränkt.

L kompakt $\rightsquigarrow L(A) = \{Lx \in H \,|\, \|x\| = 1\}$ präkompakt.

Weiterhin gilt für $y = L(x) \in L(A)$ $P_n(y) \rightrightarrows y$ auf $L(A)$, da für $y \in H$ die Konvergenz

$$y = \sum_{i=1}^\infty \langle y, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to\infty} P_n(y)$$

gleichmäßig auf einer kompakten Menge ist.

$\rightsquigarrow P_n \circ L \rightrightarrows L$ auf $A = \{x \in H \,|\, \|x\| = 1\}$

$$\rightsquigarrow \|P_n \circ L - L\| = \sup_{x \in A} |P_n \circ L(x) - L(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

5.1. **Integraloperatoren.**

5.1.1. *Integraloperatoren mit stetigem Kern in $\mathcal{C}(X)$.*

(X,d) kompakter metrischer Raum
$K : X \times X \to \mathbb{C}$ stetig
μ endliches Borel-Maß auf X
$\mathcal{C}(X)$ Banach-Raum aller stetigen Funktionen auf X
$L : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ definiert durch

$$\boxed{(Lf)(x) = \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y)}$$

Wir wissen: $L : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ ist linear und stetig.

Behauptung 5.9. *L ist kompakt.*

Beweis. $A \subset \mathcal{C}(X)$ sei eine beschränkte Menge, d.h. es ex. $M > 0$:

$$|f(x)| \le M \qquad \forall x \in X \quad \forall f \in A.$$

K ist stetig, X kompakt $\rightsquigarrow$

(1) K ist beschränkt, d.h. es ex. $M_1 > 0$ mit

$$|K(x,y)| \le M_1 \qquad \forall (x,y) \in X \times X$$

(2) K ist gleichmäßig stetig,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_x(x', x'') < \delta \rightsquigarrow |K(x',y) - K(x'',y)| < \varepsilon \, \forall y \in X.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |Lf(x)| &= \left| \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y) \right| \\ &\le \int_X \underbrace{|K(x,y)|}_{\le M_1} \cdot \underbrace{|f(y)|}_{\le M} d\mu(y) \\ &\le M_1 \cdot M \cdot \mu(X) < \infty. \qquad \forall x \in X \quad \forall f \in A. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Die Funktionenmenge $L(A) = \{L(f) \,|\, f \in A\}$ ist gleichmäßig beschränkt.

<u>Weiterhin</u>: Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir wählen δ wie in (2) und $x', x'' \in X$ mit $d_X(x', x'') < \delta$. Dann gilt für $f \in A$

$$\begin{aligned} |Lf(x') - Lf(x'')| &= \left| \int_X [K(x',y) - K(x'',y)] \, f(y) \, d\mu(y) \right| \\ &\le \int_X \underbrace{|K(x',y) - K(x'',y)|}_{<\varepsilon \text{ für alle } y \in X} \cdot \underbrace{|f(y)|}_{\le M} d\mu(y) \\ &\le \varepsilon \cdot M \cdot \mu(X) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X, d(x', x'') < \delta \, \forall f \in A : \quad |Lf(x') - Lf(x'')| \le \varepsilon \cdot M \cdot \mu(X)$

$\rightsquigarrow$ Die Menge $L(A) = \{L(f) \,|\, f \in A\}$ ist gleichgradig stetig.

Damit ist $L(A) \subset \mathcal{C}(X)$ eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfamilie.

Nach dem Satz 1.12 von Arzela-Ascoli ist $L(A)$ dann präkompakt.

□

5.1.2. *Integraloperatoren mit quadratisch integrierbaren Kern.*

Satz 5.10. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ separabel, $K \in L^2(X \times X)$ gegeben und $L : L^2(X \times X) \to L^2(X \times X)$ mit*

$$(Lf)(x) = \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y)$$

stetig. Dann ist L kompakt.

Beweis. Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollständiges ON-System in $L^2(X)$ (siehe Voraussetzung).

(1) Laße sich $K(x,y)$ ausdrücken durch

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \cdot g_i(y)$$

mit $f_i, g_i \in L^2$. (degenerierte Integralkerne)

Dann gilt für $f \in L^2$

$$\begin{aligned} L(f)(x) &= \int_X \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) g_i(y) \cdot f(y)\, d\mu(y) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[c_i \int_X g_i(y) f(y)\, dy \right] \cdot f_i(x) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow L\left(L^2(X, \mathcal{A}, \mu)\right) \subset \operatorname{Lin}(f_1, \ldots, f_m)$, d.h. L ist endlich-dimensionaler Operator und damit kompakt.

(2) Sei $K \in L^2(X \times X)$ beliebig.
Bemerken, daß $\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(y)$ eine vollständige ON-Basis in $L^2(X \times X)$ ist. Damit kann K durch eine Folge $K_1, K_2, \ldots$ degenerierter Kerne in $L^2(X \times X)$ approximiert werden, d.h.

$$\int_{X \times X} |K_n(x,y) - K(x,y)|^2\, dxdy \to 0.$$

Nun aber gilt: L_n ist kompakt, weil L_n endlich-dimensional ist.

$$\|L_n - L\| \leq \sqrt{\int_{X \times X} |K_n(x,y) - K(x,y)|^2\, dxdy} \to 0$$

$\rightsquigarrow L = \lim_{n\to\infty} L_n$ in Operatornorm $\rightsquigarrow L$ ist kompakt (Satz 5.4).

□

5.2. **Fredholm-Operatoren.**

Ziel: Riesz: $L : X \to X$ kompakt. $\rightsquigarrow \operatorname{Id}_X - L$: $X \to X$ ist Fredholm.

Fredholm-Operator

Definition 5.11. Ein Operator $A : X \to Y$ (linear, stetig) heißt Fredholm-Operator, falls

(1) $\dim \ker(A) = \dim \{x \in X \,|A(x) = 0\} < \infty$.
(2) $A(X) \subset Y$ ist abgeschlossen.
(3) $\dim(Y/A(X)) < \infty$. $(Y/A(X) = \operatorname{co}\ker(A))$

3.12.2002

Vorbereitung: $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ normierte Räume

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= \{(x,y) \,|x \in X, y \in Y\} \quad \text{Unterraum} \\ (x,y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ \lambda \cdot (x,y) &= (\lambda x, \lambda y) \\ \|(x,y)\| &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Lemma 5.12. *Sei X Banach-Raum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum mit $\dim M < \infty$ oder $\dim(X/M) < \infty$. Dann existiert ein abgeschlossener Raum $N \subset X$ mit*

$$\boxed{X \overset{top.}{\cong} M \oplus N}$$

(i.A. sind die Normen verschieden).

Beweis.

(1) Sei $\dim M < \infty$. Wähle eine Basis $x_1, \ldots, x_m$ in M.
Nach dem Satz von Hahn-Banach bzw. Satz 3.3 existieren lineare, stetige Funktionen $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ mit

$$x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$$

Wir definieren $P : X \to M$ durch die Formel

$$P(x) = \sum_{i=1}^m x_i^*(x) \cdot x_i \qquad x \in X$$

P ist linear und stetig. Ist $x \in M$, so ist

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x) \cdot x_i = P(x), \\ \text{d.h. } P|_M &= \mathrm{Id}_M. \end{aligned}$$

Lege

$$N := \ker(P).$$

Weil P stetig ist, ist $N \subset X$ abgeschlossen. Jeder Vektor $x \in X$ läßt sich darstellen als $x = \underbrace{P(x)}_{\in M} + \underbrace{(x - P(x))}_{\in N}$, weil $P(x - P(x)) = P(x) - P\underbrace{P(x)}_{\in M} = P(x) - P(x) = 0$

Die Abbildung

$$M \oplus N \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \in X$$

ist surjektiv, injektiv, stetig.

$$\rightsquigarrow M \oplus N \overset{\text{bij., stetig}}{\cong} X.$$

Nach Banach-Satz folgt $X \overset{\text{top.}}{\cong} M \oplus N$.

(2) Sei nun $\dim(X/M) < \infty$. Wähle einen endlich-dimensionalen Teilraum $N \subset X$ mit
 (a) $M \cap N = \{0\}$
 (b) $\mathrm{Lin}(M, N) = X$

 N ist abgeschlossen, weil endlich-dimensional. Wie im 1. Fall folgt $X \overset{\text{top.}}{\cong} M \oplus N$.

$\square$

Bemerkung. Ohne die Voraussetzung "M abgeschlossen" gilt der Satz nicht: $X = L^2[0,1]$, $M = C^\infty[0,1]$, $M \neq \bar{M} = X$.

Satz 5.13. *(Satz von Riesz): Sei X Banach-Raum, $L : X \to X$ ein kompakter Operator. Sei*

$$T := \mathrm{Id}_X - L : \quad X \to X.$$

Dann ist T ein Fredholm-Operator, d.h.

Riesz-Satz: L kompakt $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Id} - L$ Fredholm

(1) $\dim\ker(T) < \infty$.
(2) $T(X) \subset X$ *ist abgeschlossener Teilraum.*
(3) $\dim\operatorname{co}\ker(T) = \dim(X/T(X)) < \infty$.

Beweis. $M := \ker T \subset X$ ist abgeschlossener Teilraum, weil T stetig ist.

(1) Sei B die Einheitskugel in M, $B \subset M \subset X$. Dann gilt für $b \in B$

$$L(b) = L(b) + 0 = L(b) + T(b) = L(b) + (b - L(b)) = b,$$

 d.h. $L|_B = \mathrm{Id}_B \rightsquigarrow L(B) = B$.
 $B \subset M \subset X$ ist beschränkt, L ist kompakter Operator $\rightsquigarrow B \subset M$ ist präkompakt, d.h. die Einheitskugel B im normierten Raum M ist präkompakt.
 Nach Satz 1.5 ist dann $\dim M < \infty \rightsquigarrow \dim\ker(T) < \infty$.

(2) $M = \ker(T) \subset X$ ist abgeschlossen. Wähle den abgeschlossenen Teilraum $N \subset X$ wie im Lemma 5.12,

$$X \overset{\text{top.}}{\cong} M \oplus N.$$

 Schränke T auf N ein,

$$T|_N : N \overset{\text{bij.}}{\to} T(X) \subset X.$$

 <u>Wir zeigen jetzt</u>: Es existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $x \in N$:

$$\|Tx\| \geq \varepsilon \|x\|,$$

d.h. $T^{-1} : T(X) \to N$ ist stetig.

Angenommen, dies gilt nicht. Für $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ existieren dann Vektoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in N mit

$$\|Tx_i\| < \frac{1}{i}\|x_i\|, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Betrachte

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}.$$

Dann gilt: $\tilde{x}_i \in N$, $\|\tilde{x}_i\| = 1$,

$$\|T\tilde{x}_i\| < \frac{1}{i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\rightsquigarrow \lim_{i\to\infty} T(\tilde{x}_i) = 0.$$

Aber: $T(\tilde{x}_i) = \tilde{x}_i - L(\tilde{x}_i)$. Weil $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots\}$ eine beschränkte Menge ist und weil L ein kompakter Operator ist, existiert eine Teilfolge $\tilde{x}_{i_j}$ mit $L(\tilde{x}_{i_j}) \to x$ für einen Vektor $x \in X$. Damit folgt

$$0 = \lim_{j\to\infty} T(\tilde{x}_{i_j}) = \lim_{j\to\infty}(\tilde{x}_{i_j} - L(\tilde{x}_{i_j})) = \lim_{j\to\infty} \tilde{x}_{i_j} - x.$$

Dann folgt, daß die Teilfolge $\tilde{x}_{i_j}$ selbst gegen x konvergiert. Aber:

- $\|x_{i_j}\| = 1 \rightsquigarrow \|x\| = 1$, d.h. $x \neq 0$.
- $T(x) = T(\lim_{j\to\infty} \tilde{x}_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} T(\tilde{x}_{i_j}) = 0$, d.h. $x \in \ker(T) = M$.
- $\tilde{x}_{i_j} \in N$ und N ist abgeschlossen $\rightsquigarrow x \in N$.

Widerspruch.

Konsequenz: $T(X) \subset X$ ist abgeschlossen:

Sei $y_1, y_2, \ldots$ in $T(X)$ eine Folge und gelte $y_i \to y$ in X.

$\rightsquigarrow \exists x_1, x_2, \ldots \in N$ mit $y_i = T(x_i)$. Dann folgt:

$$\|y_i - y_j\| = \|T(x_i - x_j)\| \geq \varepsilon \|x_i - x_j\|$$

Die Folge $\{y_i\}$ ist Cauchy-Folge. $\rightsquigarrow$ Die Folge $\{x_i\}$ ist eine Cauchy-Folge.

X ist Banach-Raum $\rightsquigarrow$ Es ex. $x \in N$ mit $\lim x_i = x \in N$. Berechne:

$$T(x) = T\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} T(x_i) = \lim_{i\to\infty} y_i = y \quad \rightsquigarrow y \in T(X).$$

(3) Betrachte den dualen Operator $L^* : X^* \to X^*$. Dann ist L^* gleichfalls kompakt. Nun gilt nach dem folgenden Satz

$$(X/T(X))^* \simeq \ker(T^*)$$

L kompakt $\rightsquigarrow L^*$ kompakt $\rightsquigarrow \dim(\ker(T^*)) < \infty \rightsquigarrow \dim(X/T(X))^* < \infty \rightsquigarrow \dim(X/T(X)) < \infty$ nach Hahn-Banach Satz.

□

Satz 5.14. *Sei $T : X \to X$ stetig. $T(X) \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$\boxed{(X/T(X))^* \cong \ker(T^*)}$$

Beweis. $T^* : X^* \to X^*$. Sei $x^* \in \ker(T^*)$, d.h. $x^* \in X^*$ und es gilt $T^*(x^*) = 0$.

$$\rightsquigarrow \forall x \in X : 0 = T^*(x^*)(x) = x^*(Tx)$$

$\rightsquigarrow x^*$ verschwindet auf $T(X)$.

$\rightsquigarrow x^*$ ist ein Funktional auf $X/T(X)$:

$$\ker(T^*) \ni x^* \mapsto x^* \in (X/T(X))^*$$

Umgekehrt: Sei $l \in (X/T(X))^*$, d.h. $l : X/T(X) \to \mathbb{C}$ ein stetiges Funktional.

Betrachte
$$X \overset{\mathrm{pr}}{\to} X/T(X).$$
Diese Projektion ist stetig, da $\ker(\mathrm{pr}) = T(X)$ abgeschlossen ist. Dann ist
$$x^* = l \circ \mathrm{pr} \in X^*$$
mit $x^* \big|_{T(X)} = 0$, d.h. $x^* \in \ker(T^*)$.
$$\rightsquigarrow\ (X/T(X))^* \ni l \mapsto x^* \in \ker(T^*).$$
Dies ist die Inversabbildung.

□

6. Spektraltheorie für beschränkte Operatoren

Beispiel. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $L : V \to V$ linear.
Betrachte $L - \lambda \mathrm{Id}_V = L_\lambda : V \to V$

(1) Ist $\ker(L_\lambda) \neq \{0\}$, so ist $L_\lambda : V \to V$ nicht surjektiv.
(2) Ist $\ker(L_\lambda) = \{0\}$, so ist $L_\lambda : V \to V$ bijektiv, da $\dim V < \infty$.

Sei X im folgenden ein reeller oder komplexer Banach-Raum.
$L : X \to X$ linear und stetig. L_λ
$$\boxed{L_\lambda := \lambda \mathrm{Id}_X - L : X \to X}$$

Definition 6.1. Resolventenmenge von L: Resolventenmenge $\rho(L)$
$$\boxed{\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, L_\lambda : X \to X \text{ ist bijektiv}\}}$$
Punktspektrum von L: Punktspektrum $\sigma_p(L)$
$$\boxed{\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \ker(L_\lambda) \neq \{0\}\}}$$
Restspektrum von L: Restspektrum $\sigma_r(L)$
$$\boxed{\sigma_r(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \ker(L_\lambda) = \{0\} \text{ und } \overline{L_\lambda(X)} \neq X\right\}}$$
kontinuierliches Spektrum von L: kontinuierliches Spektrum $\sigma_c(L)$
$$\boxed{\sigma_c(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \ker(L_\lambda) = \{0\},\, L_\lambda(X) \neq X,\, \overline{L_\lambda(X)} = X\right\}}$$
Spektrum von L: Spektrum $\sigma(L)$
$$\boxed{\sigma(L) = \sigma_p(L) \,\dot\cup\, \sigma_r(L) \,\dot\cup\, \sigma_c(L)}$$

$$\boxed{\mathbb{C} = \rho(L) \,\dot\cup\, \sigma_p(L) \,\dot\cup\, \sigma_r(L) \,\dot\cup\, \sigma_c(L)}$$

Satz 6.2. *Für jeden stetigen Operator $L : X \to X$ ist $\rho(L) \subset \mathbb{C}$ offen und $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen.*

Beweis.
$$\begin{aligned} L_{\lambda_1} - L_{\lambda_2} &= (\lambda_1 \mathrm{Id}_X - L) - (\lambda_2 \mathrm{Id}_X - L) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{Id}_X \\ \|L_{\lambda_1} - L_{\lambda_2}\| &= |\lambda_1 - \lambda_2| \end{aligned}$$
Ist nun $\lambda_1 \in \rho(L)$, so liegt $L_{\lambda_1} : X \to X$ in $\mathrm{GL}(X) \subset \mathcal{L}(X,X)$. $\mathrm{GL}(X)$ ist nach Satz 3.14 offen in $\mathcal{L}(X,X)$. $\rightsquigarrow L_{\lambda_2} \in \mathrm{GL}(X)$ für hinreichend nahes $\lambda_2 \rightsquigarrow \lambda_2 \in \rho(L)$ für λ_2 nahe bei λ_1. □

5.12.2002

Definition 6.3. Spektralradius von L:

$$\boxed{r(L) = \sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda|}$$

Spektral-radius $r(L)$
$r(L) \leq \|L\|$

Satz 6.4. *Es gilt*

$$\boxed{r(L) \leq \|L\| < \infty}$$

Beweis. Sei $|\lambda| > \|L\|$. Dann gilt

$$\lambda \mathrm{Id}_X - L = \lambda\left(\mathrm{Id}_X - \frac{L}{\lambda}\right), \qquad \left\|\frac{L}{\lambda}\right\| < 1$$

Neumann-Reihe $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Id}_X - \frac{L}{\lambda}$ ist invertierbar $\overset{\lambda\neq 0}{\rightsquigarrow}$ $\lambda\mathrm{Id}_X - L$ invertierbar. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in \rho(L)$. □

Vorbereitungen:

Ist $A : X \to X$ linear und stetig, $\|A\| < 1$, so folgt mittels Neumann-Reihe

$$(\mathrm{Id}_X - A)^{-1} - \mathrm{Id}_X - A = \sum_{n=2}^{\infty} A^n = A^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$\rightsquigarrow \left\|(\mathrm{Id}_X - A)^{-1} - \mathrm{Id}_X - A\right\| \leq \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|} \tag{6.1}$$

Lemma 6.5. *$L_1 : X \to X$ sei linear, stetig, invertierbar. Setze $\left\|L_1^{-1}\right\| = \frac{1}{\alpha}$. Sei $L : X \to X$ linear, stetig, $\|L\| = \beta < \alpha$.*

Dann ist $L + L_1$ invertierbar und es gilt

$$\left\|(L+L_1)^{-1} - L_1^{-1} + L_1^{-1}LL_1^{-1}\right\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Beweis.

$$\left\|L_1^{-1}\circ L\right\| \leq \left\|L_1^{-1}\right\| \cdot \|L\| = \frac{\beta}{\alpha} < 1$$

Dann ist $\mathrm{Id}_X + L_1^{-1}\circ L$ invertierbar.

$$L_1 + L = \underbrace{L_1}_{\text{inv.bar}}\underbrace{\left(\mathrm{Id}_X + L_1^{-1}\circ L\right)}_{\text{inv.bar}}$$

$\rightsquigarrow$ $L_1 + L$ ist invertierbar.

$$\begin{aligned}
(L_1+L)^{-1} &= \left(\mathrm{Id}_X + L_1^{-1}\circ L\right)^{-1} L_1^{-1}\\
(L_1+L)^{-1} - L_1^{-1} + L_1^{-1}LL_1^{-1} &= \left(\mathrm{Id}_X + L_1^{-1}\circ L\right)^{-1} L_1^{-1} - L_1^{-1} + L_1^{-1}LL_1^{-1}\\
&= \left[\left(\mathrm{Id}_X + L_1^{-1}\circ L\right)^{-1} - \mathrm{Id}_X + L_1^{-1}L\right]\circ L_1^{-1}
\end{aligned}$$

Wende die Ungleichung (6.1) auf den Operator $A = -L_1^{-1}\circ L$ an! Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left\|(L_1+L)^{-1} - L_1^{-1} + L_1^{-1}LL_1^{-1}\right\| &\leq \left\|\left[(\mathrm{Id}_X - A)^{-1} - \mathrm{Id}_X - A\right]\circ L_1^{-1}\right\|\\
&\leq \frac{\left\|L_1^{-1}\circ L\right\|^2}{1-\left\|L_1^{-1}\circ L\right\|}\cdot\left\|L_1^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{x^2}{1-x}$ ist für $x \in (0,1)$ wachsend: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{(1-x)2x-x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x^2)} = \frac{x(2-x)}{(1-x^2)} > 0$.
Mit $\left\|L_1^{-1} \circ L\right\| \leq \left\|L_1^{-1}\right\| \cdot \|L\|$ folgt dann

$$\begin{aligned}\left\|(L_1+L)^{-1} - L_1^{-1} + L_1^{-1}LL_1^{-1}\right\| &\leq \frac{\left\|L_1^{-1}\right\|^2 \cdot \|L\|^2}{1-\left\|L_1^{-1}\right\| \cdot \|L\|} \cdot \left\|L_1^{-1}\right\| \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\beta^2}{1-\frac{1}{\alpha}\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

□

Satz 6.6. *Sei X ein komplexer Banach-Raum. $L : X \to X$ linear und stetig. Dann ist $\sigma(L)$ nicht leer.* $\sigma(L) \neq \emptyset$

Beweis. Fixiere $\lambda_0 \in \rho(L) \rightsquigarrow (\lambda_0 \mathrm{Id}_X - L)^{-1} \in \mathrm{GL}(X) \subset \mathcal{L}(X,X)$.

$\mathcal{L}(X,X)$ ist ein komplexer Banach-Raum. Damit existiert ein lineares, stetiges Funktional $\mu : \mathcal{L}(X,X) \to \mathbb{C}$ mit

$$\mu(\lambda_0 \mathrm{Id}_X - L)^{-1} \neq 0$$

(Hahn-Banach-Satz bzw. Satz 3.3).

Betrachte die Funktion $h : \rho(L) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$h(\lambda) := \mu(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}.$$

Ziel: h ist holomorph auf $\rho(L) \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$.

Seien $\lambda, \lambda^* \in \rho(L)$. Betrachte

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1 &:= \lambda \mathrm{Id}_X - L \\ \tilde{L} &:= (\lambda^* - \lambda)\mathrm{Id}_X \\ \tilde{L}_1 + \tilde{L} &= \lambda \mathrm{Id}_X - L + (\lambda^*-\lambda)\mathrm{Id}_X = \lambda^* \mathrm{Id}_X - L \\ \tilde{L}_1^{-1}\tilde{L}\tilde{L}_1^{-1} &= (\lambda^*-\lambda)(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-2} \\ \left\|\tilde{L}\right\| &= |\lambda^*-\lambda| = \beta \\ \left\|\tilde{L}_1\right\| &= \left\|(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}\right\| = \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

Nach Lemma 6.5 ist dann

$$\left\|(\lambda^* \mathrm{Id}_X - L)^{-1} - (\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1} + \frac{(\lambda^*-\lambda)}{(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^2}\right\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{|\lambda^*-\lambda|^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Dividieren durch $|\lambda^*-\lambda|$:

$$\left\|\frac{(\lambda^* \mathrm{Id}_X - L)^{-1} - (\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}}{\lambda^*-\lambda} - (\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-2}\right\| \leq \frac{|\lambda^*-\lambda|}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Für $\lambda^* \to \lambda$ ist α ist konstant und $\beta \to 0 \rightsquigarrow$

$$\lim_{\lambda^* \to \lambda}\left\|\frac{(\lambda^* \mathrm{Id}_X - L)^{-1} - (\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}}{\lambda^*-\lambda} - (\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-2}\right\| = 0$$

Weil μ stetig ist, folgt

$$\lim_{\lambda^* \to \lambda}\frac{\overbrace{\mu(\lambda^* \mathrm{Id}_X - L)^{-1}}^{h(\lambda^*)} - \overbrace{\mu(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}}^{h(\lambda)}}{\lambda^*-\lambda} = \mu(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-2}$$

Also ist h komplex differenzierbar.

Angenommen, $\sigma(L) = \emptyset$. $\rightsquigarrow \rho(L) = \mathbb{C} \rightsquigarrow h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
h(\lambda_0) &\neq 0 \\
\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \mu\left((\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \mu\left(\lambda^{-1}\left(\mathrm{Id}_X - \frac{L}{\lambda}\right)^{-1}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{\mu\left(\underbrace{\left(\mathrm{Id}_X - \frac{L}{\lambda}\right)^{-1}}_{\to \mathrm{Id}_X}\right)}_{\text{konstante Zahl}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Satz von Liouville[1] $\rightsquigarrow h(\lambda)$ ist konstant $\overset{\text{Verhalten im } \infty}{\rightsquigarrow} h(\lambda) \equiv 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch zu $h(\lambda_0) \neq 0$.

$\square$

$r(L) = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}$

Satz 6.7. *X sei ein <u>komplexer</u> Banach-Raum. $L : X \to X$ linear und stetig. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}$ und*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} = r(L)}.$$

Beweis.

$$\lambda^n \notin \sigma(L^n) \quad \rightsquigarrow \quad \lambda \notin \sigma(L),$$

denn:

$$(\lambda^n \mathrm{Id}_X - L^n) = (\lambda \mathrm{Id}_X - L) \circ \left(L^{n-1} + \lambda L^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-2} \mathrm{Id}_X\right).$$

Ist $\lambda^n \notin \sigma(L^n) \rightsquigarrow \lambda^n \mathrm{Id}_X - L^n$ ist invertierbar. $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Id}_X = (\lambda \mathrm{Id}_X - L)\left(L^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-2}\mathrm{Id}_X\right) \circ (\lambda^n \mathrm{Id}_X - L^n)^{-1}$$

$\rightsquigarrow (\lambda \mathrm{Id}_X - L)$ hat einen Inversoperator $\left(L^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-2}\mathrm{Id}_X\right) \circ (\lambda^n \mathrm{Id}_X - L^n)^{-1} \rightsquigarrow \lambda \notin \sigma(L)$.

Konsequenz:

$$\lambda \in \sigma(L) \quad \rightsquigarrow \quad \lambda^n \in \sigma(L^n) \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Damit folgt $|\lambda^n| \leq \|L^n\|$, weil $\sigma(L^n) \subset \mathcal{K}(0, \|L\|^n)$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow |\lambda| &\leq \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \\
\rightsquigarrow |\lambda| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall \lambda \in \sigma(L) \\
\rightsquigarrow r(L) = \sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Sei $|\lambda| > \|L\|$. Invertiere $\lambda \mathrm{Id}_X - L$ (Neumann-Reihe: $\left\|\frac{L}{\lambda}\right\| < 1!$)

$$\mathrm{Id}_X = (\lambda \mathrm{Id}_X - L) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} L^n, \text{ denn :} \tag{6.2}$$

$$(\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{Id}_X - \frac{L}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{\lambda^n}$$

[1]Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte beschränkte holomorphe Funktion ist konstant.

Sei $\mu : \mathcal{L}(X,X) \to \mathbb{C}$ linear, stetig. Wir definieren $h_\mu : \rho(L) \to \mathbb{C}$,

$$h_\mu(\lambda) = \mu\left((\lambda \mathrm{Id}_X - L)^{-1}\right).$$

Aus (6.2) und der Stetigkeit von μ folgt im Fall $|\lambda| > \|L\|$ sofort:

$$h_\mu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \mu(L^n)$$

h_μ ist holomorph auf $\rho(L) = \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$.

$\rightsquigarrow$ Die Reihe konvergiert auf $|\lambda| > \|L\|$ und ist holomorph auf $|\lambda| > r(L)$. ($r(L) \leq \|L\|$)

$\rightsquigarrow$ Die Reihe konvergiert auch für $|\lambda| > r(L)$.

Damit muß für alle $|\lambda| > r(L)$ gelten:

$$\sup_n \left| \frac{1}{\lambda^{n+1}} \mu(L^n) \right| < \infty \tag{6.3}$$

Fixiere $|\lambda| > r(L)$ und fixiere $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definieren Funktionale $\Phi_{\lambda,n} : \mathcal{L}(X,X) \to \mathbb{C}$,

$$\Phi_{\lambda,n}(\mu) = \mu\left(\lambda^{-n} L^n\right).$$

Berechnung der Norm:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{\lambda,n}\| &= \sup_{\mu \in \mathcal{L}(X,X)^*} \frac{|\Phi_{\lambda,n}(\mu)|}{\|\mu\|} \\
&= \sup_{\mu \in \mathcal{L}(X,X)^*} \frac{|\mu(\lambda^{-n} L^n)|}{\|\mu\|} \\
&\overset{X \hookrightarrow X^{**}}{=} \left|\lambda^{-n}\right| \sup_{\mu \in \mathcal{L}(X,X)^*} \frac{(L^n)^{**}(\mu)}{\|\mu\|} \\
&= \left|\lambda^{-n}\right| \|L^n\|
\end{aligned}$$

Ist λ fest, $|\lambda| > r(L)$, so gilt nach (6.3) für alle μ:

$$\sup_n |\Phi_{\lambda,n}(\mu)| = |\lambda| \sup_n \left| \frac{1}{\lambda^{n+1}} \mu(L^n) \right| < \infty$$

Banach-Steinhaus-Satz 3.6:

$$\begin{aligned}
\sup_n \|\Phi_{\lambda,n}\| &= C(\lambda) < \infty \\
\rightsquigarrow \sup_n \frac{1}{|\lambda^n|} \|L^n\| &= C(\lambda) < \infty \qquad \forall |\lambda| > r(L) \\
\rightsquigarrow \|L^n\|^{\frac{1}{n}} &\leq \sqrt[n]{C(\lambda)} \cdot |\lambda| \\
\rightsquigarrow \limsup_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} &\leq |\lambda| \qquad \forall |\lambda| > r(L) \\
\overset{\text{Inf. über } \lambda}{\rightsquigarrow} \limsup_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} &\leq r(L).
\end{aligned}$$

$\square$

6.1. Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren.

Satz 6.8. *(Spektrum selbstadjungierter Operatoren)*
H sei ein Hilbert-Raum, $L : H \to H$, $L = L^*$. Dann ist

(1) $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^1$.
(2) $\sigma_r(L) = \emptyset$
(3) $r(L) = \|L\|$
(4) $\|L\|$ *oder* $-\|L\|$ *liegt in* $\sigma(L)$.
(5) $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(L)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightsquigarrow E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$ *(E_λ - Eigenraum zu λ).*

10.12.2002 Spektrum selbstadj. Operatoren

Beweis. H sei komplex.

(1) Sei $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ mit $\beta \neq 0$. Berechnen für $x \in H$

$$\begin{aligned}
\|(L-\lambda)x\|^2 &= \langle (L-\lambda)x, (L-\lambda)x\rangle \\
&= \left\langle x, (L-\lambda)^*(L-\lambda)x\right\rangle \\
&\overset{L=L^*}{=} \left\langle x, \left(L-\bar\lambda\right)(L-\lambda)x\right\rangle \\
&= \langle x, (L-\alpha+i\beta)(L-\alpha-i\beta)x\rangle \\
&= \left\langle x, (L-\alpha)^2 x\right\rangle + \langle x, (i\beta)(-i\beta)x\rangle \\
&= \|(L-\alpha)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \\
&\geq \beta^2\|x\|^2 > 0 \qquad \forall x \in H, \beta \neq 0
\end{aligned}$$

Damit ist $L_\lambda := L - \lambda\mathrm{Id} : H \to H$ injektiv.
Weiterhin ist $\mathrm{Im}(L-\lambda\mathrm{Id}) = (L-\lambda\mathrm{Id})(H) \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum (Übungsaufgabe oder siehe einen der letzten Beweise (Fredholm, Satz 5.13, ...)).

$$\rightsquigarrow H = (L-\lambda\mathrm{Id})(H) \oplus E$$

Orthonormal-Zerlegung in H, weil $(L-\lambda\mathrm{Id})(H) \overset{\text{abg.}}{\subset} H$ mit

$$E = ((L-\lambda\mathrm{Id})(H))^\perp = \{y \in H \,|\forall x \in H : \langle y, (L-\lambda\mathrm{Id})x\rangle = 0\}.$$

Ist $z \in H$ beliebig $\rightsquigarrow z = y_0 + x_0$ mit $y_0 \in (L-\lambda\mathrm{Id})(H)$, $x_0 \perp (L-\lambda\mathrm{Id})(H)$. Für x_0 gilt:

$$0 = \langle x_0, (L-\lambda\mathrm{Id})x\rangle = \left\langle \left(L^*-\bar\lambda\right)x_0, x\right\rangle = \left\langle \left(L-\bar\lambda\right)x_0, x\right\rangle \quad \forall x \in H$$

Damit folgt $\left(L-\bar\lambda\right)x_0 = 0$. Wäre $x_0 \neq 0$, so hätten wir $Lx_0 = \bar\lambda x_0$

$$\begin{aligned}
\langle Lx_0, x_0\rangle = \overline{\langle x_0, Lx_0\rangle} = \overline{\langle Lx_0, x_0\rangle} &\rightsquigarrow \langle Lx_0, x_0\rangle \in \mathbb{R} \\
&\rightsquigarrow \bar\lambda\langle x_0, x_0\rangle = \bar\lambda\|x_0\|^2 \in \mathbb{R} \\
x_0 \neq 0 &\rightsquigarrow \beta = 0 \text{ Widerspruch}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x_0 = 0 \rightsquigarrow H = \mathrm{Im}(L-\lambda\mathrm{Id}) \rightsquigarrow L_\lambda : L - \lambda\mathrm{Id} : H \to H$ ist bijektiv $\rightsquigarrow \lambda \in \rho(L)$.

(2) Sei $\lambda \in \sigma_r(L)$. Dann ist
 (a) $\ker(L_\lambda) = \ker(L-\lambda\mathrm{Id}) = \{0\}$
 (b) $\overline{\mathrm{Im}(L-\lambda\mathrm{Id})} \neq H$

Wähle $x_0 \in H$ mit $\|x_0\| = 1$ und $x_0 \perp \overline{\mathrm{Im}(L-\lambda\mathrm{Id})}$. Dann gilt $\forall x \in H$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (L-\lambda\mathrm{Id})x, x_0\rangle \\
&= \left\langle x, (L-\lambda\mathrm{Id})^* x_0\right\rangle \\
&\overset{\substack{L=L^* \\ \lambda=\bar\lambda \text{ nach } (1)}}{=} \langle x, (L-\lambda\mathrm{Id})x_0\rangle
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow (L-\lambda\mathrm{Id})(x_0) = 0$ und $x_0 \neq 0 \rightsquigarrow \ker(L-\lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Widerspruch.

(3) Allgemein gilt $r(L) \leq \|L\|$. Wäre (4) gezeigt, so gilt: $r(L) \geq \|L\| \rightsquigarrow r(L) = \|L\|$.

(4) Satz 4.4: $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x\rangle|$, weil $L = L^*$.

$$\begin{aligned} M &:= \sup_{\|x\|=1} \langle Lx, x\rangle \\ m &:= \inf_{\|x\|=1} \langle Lx, x\rangle \end{aligned}$$

<u>Zunächst zeigen wir</u>:

$$\|L\| = \max\left(|M|, |m|\right).$$

Das Skalarprodukt $\langle Lx, x\rangle$ ist reell, weil $L = L^*$.

$$\begin{aligned} & & \rightsquigarrow \quad & -|\langle Lx, x\rangle| \le \langle Lx, x\rangle \le |\langle Lx, x\rangle| \\ \rightsquigarrow \quad \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \langle Lx, x\rangle}_{M} \le \underbrace{\sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x\rangle|}_{\|L\|} & & \rightsquigarrow \quad & M \le \|L\| \\ \underbrace{\inf_{\|x\|=1} -|\langle Lx, x\rangle|}_{-\|L\|} \le \underbrace{\inf_{\|x\|=1} \langle Lx, x\rangle}_{m} & & \rightsquigarrow \quad & -\|L\| \le m \\ & & \rightsquigarrow \quad & -\|L\| \le m \le M \le \|L\| \\ & & \rightsquigarrow \quad & \max\left(|M|, |m|\right) \le \|L\| \end{aligned}$$

Andererseits gilt $m \le \langle Lx, x\rangle \le M$ nach Definition von m, M.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad & m \le \pm\|L\| \le M \\ \rightsquigarrow \quad & \|L\| \le \max\left(|M|, |m|\right) \end{aligned}$$

$M \in \sigma(L)$: Wähle eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in H mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Lx_n, x_n\rangle \to M$.

$$\begin{aligned} \|L_M x_n\|^2 &= \langle (L - M\mathrm{Id})\, x_n, (L - M\mathrm{Id})\, x_n\rangle \\ &= \underbrace{\|Lx_n\|^2}_{\le \|L\|^2 \|x_n\|^2} + M^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} - 2M \langle Lx_n, x_n\rangle \\ &\le \underbrace{\|L\|^2}_{\le M^2} + M^2 - 2M \langle Lx_n, x_n\rangle \\ &\le 2M \cdot \left(M - \langle Lx_n, x_n\rangle\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \|L_M x_n\| &= 0 \end{aligned}$$

Wäre L_M^{-1} stetig, so wäre

$$0 = L_M^{-1}(0) = L_M^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} L_M x_n\right) = \lim_{n\to\infty} L_M^{-1}\left(L_M x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ein Widerspruch zu $\|x_n\| = 1$. Damit kann M <u>kein</u> regulärer Wert von L sein. $\rightsquigarrow M \in \sigma(L)$.
Ist $|M| \ge |m|$, so ist $\|L\| = M$ und wir sind fertig.
Ist $|M| < |m|$ so folgt wegen $M \ge m$, daß $m < 0$ ist. Dann ist $\|L\| = -m$.
Wählen eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in H mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Lx_n, x_n\rangle \to m$.

$$\begin{aligned} \|L_m x_n\|^2 &= \langle (L - m\mathrm{Id})\, x_n, (L - m\mathrm{Id})\, x_n\rangle \\ &= \|Lx_n\|^2 + m^2 \|x_n\|^2 - 2m \langle Lx_n, x_n\rangle \\ &\le m^2 + m^2 - 2m \langle Lx_n, x_n\rangle \\ &= 2m \cdot \left(m - \langle Lx_n, x_n\rangle\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \|L_m x_n\| &= 0 \end{aligned}$$

Dann folgt wie oben, daß m kein regulärer Wert von L sein. $\rightsquigarrow -\|L\| = m \in \sigma(L)$.

(5) lineare Algebra.

□

Warnung: Das Spektrum eines Operators hängt nicht nur vom Operator, sondern auch vom Banachraum ab, in welchem dieser Operator betrachtet wird !

Beispiel. Multiplikationsoperator in L^2: $H = L^2(0,1)$.

$$(Lf)(x) := x \cdot f(x) \qquad \rightsquigarrow \qquad Lf \in L^2(0,1)$$

$$\langle Lf, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 Lf(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \int_0^1 xf(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \int_0^1 f(x) \cdot \overline{xg(x)} dx = \langle f, Lg\rangle_{L^2}$$

$\rightsquigarrow$ L ist selbstadjungiert in L^2. $\rightsquigarrow$ $\sigma_r(L) = \emptyset$, $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^1$.

<u>Wir zeigen</u>: $\sigma_p(L) = \emptyset$.

Angenommen, $\lambda \in \sigma_p(L) \rightsquigarrow \lambda \in \mathbb{R}^1$, weil $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^1$, und

$$\begin{aligned} \exists f \in L^2 &\ : \ Lf = \lambda f \\ \rightsquigarrow \exists f \in L^2 &\ : \ x \cdot f(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in (0,1). \\ \rightsquigarrow \forall x \in (0,1) &\ : \ (x-\lambda) \cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $f = 0$ fast überall $\rightsquigarrow$ $f = 0$ in L^2.

Also $\sigma_r(L) = \emptyset$, $\sigma_p(L) = \emptyset \rightsquigarrow \sigma(L) = \sigma_c(L) \neq \emptyset$.

<u>Ziel</u>: $\sigma(L) = \sigma_c(L) = [0,1]$.

Ist $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus [0,1]$, so ist $L - \lambda \mathrm{Id}$ in L^2 invertierbar, weil:

$$\begin{aligned} (L - \lambda\mathrm{Id})(f) = g \quad &\rightsquigarrow \quad (x-\lambda) f(x) = g(x) \\ &\rightsquigarrow \quad f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \end{aligned}$$

$\frac{1}{x-\lambda}$ ist stetig in $[0,1]$ falls $\lambda \notin [0,1] \rightsquigarrow f \in L^2 \rightsquigarrow (-\infty,0) \cup (1,\infty) \subseteq \rho(L)$. $\rightsquigarrow \sigma_c(L) \subseteq [0,1]$.

Sei $\lambda \in (0,1)$. Der Operator $L - \lambda\mathrm{Id} : L^2 \to L^2$ hat keinen Kern. Wäre $\lambda \in \rho(L)$, so wäre die Gleichung $(L-\lambda\mathrm{Id}) f = g$, d.h. $(x-\lambda) f(x) = g(x)$ für alle $g \in L^2$ mit $f \in L^2$ lösbar. $\rightsquigarrow$ $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L^2$ für alle $g \in L^2$.

Betrachte $g(x) = \sqrt{|\lambda - x|}$. $g \in L^2(0,1)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{|\lambda - x|}}{x-\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-\lambda|}} & x > \lambda \\ -\frac{1}{\sqrt{|x-\lambda|}} & x < \lambda \end{cases}$$

liegt nicht in L^2, denn:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{(\sqrt{x})^2} dx = \infty$$

$\rightsquigarrow (0,1) \subset \sigma(L) \rightsquigarrow [0,1] = \sigma(L) = \sigma_c(L)$, da $\sigma(L)$ abgeschlossen ist.

Übergang in einen Banachraum:

Beispiel. $B = \mathcal{C}[0,1]$ mit Supremumsnorm. $Lf(x) = x \cdot f(x)$. Dann gilt:

- $\sigma_p(L) = \emptyset$.
- $\sigma_r(L) = [0,1]$.
- $\sigma_c(L) = \emptyset$.

$\sigma_p(L) = \emptyset$: $(L - \lambda\mathrm{Id})(f) = 0 \rightsquigarrow (x-\lambda)\cdot f(x) = 0 \rightsquigarrow f = 0$ fast überall $\rightsquigarrow f \equiv 0$, da f stetig ist.

$\sigma_r(L) \supseteq [0,1]$, weil

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(L - \lambda\mathrm{Id})\big|_{\mathcal{C}[0,1]} &= \{(x-\lambda)\cdot f(x) \,|\, f \in \mathcal{C}[0,1]\} \\ &\subseteq \{h \in \mathcal{C}[0,1] \,|\, h(\lambda) = 0\} \overset{\text{abg.}}{\subsetneq} \mathcal{C}[0,1] \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \overline{\mathrm{Im}(L - \lambda\mathrm{Id})} \neq B \rightsquigarrow \lambda \in \sigma_r(L)$.

Beispiel. 12.12.2002

$$l^2 = l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \underline{c} = (c_1, c_2, \ldots) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty \right\}$$

$$L(\underline{c}) = L(c_1, c_2, \ldots) = (0, c_1, c_2, \ldots)$$

$\underline{c}, \underline{c}^* \in l^2$, $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots)$, $\underline{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots)$

$$\begin{aligned}
\langle \underline{c}, \underline{c}^* \rangle_{l^2} &= \langle L(\underline{c}), L(\underline{c}^*) \rangle_l^2 \\
\langle L^n(c), L^n(\underline{c}^*) \rangle_{l^2} &= \langle \underline{c}, \underline{c}^* \rangle_{l^2} \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \ldots \\
\rightsquigarrow \|L^n\| &= 1 \quad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots \\
\rightsquigarrow r(L) &= \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} = 1
\end{aligned}$$

Konsequenz: $|\lambda| > 1 \rightsquigarrow \lambda \in \rho(L)$

- $\sigma_p(L) = \emptyset$: Angenommen, $\lambda \in \sigma_p(L) \rightsquigarrow \exists 0 \neq \underline{c} \in l^2$: $L(\underline{c}) = \lambda \cdot \underline{c}$.

  $$\rightsquigarrow (0, c_1, c_2, \ldots) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3, \ldots).$$

  1. Fall: $\lambda = 0 \rightsquigarrow c_1 = c_2 = \ldots = 0 \rightsquigarrow \underline{c} = 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch

  2. Fall: $\lambda \neq 0 \rightsquigarrow \lambda c_1 = 0 \rightsquigarrow c_1 = 0$; $\lambda c_2 = c_1 = 0 \rightsquigarrow c_2 = 0 \rightsquigarrow \underline{c} = 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch

- Sei $|\lambda| < 1$. Dann gilt $\ker(\lambda \mathrm{Id} - L)_{l^2} = \{0\}$: Betrachte das Bild

  $$\begin{aligned}
  \operatorname{Im}(\lambda \mathrm{Id} - L)_{l^2} &= \left\{ (\lambda - L)(\underline{c}) \,\middle|\, \underline{c} \in l^2 \right\} \\
  &= \left\{ (\lambda c_1, \lambda c_2 - c_1, \lambda c_3 - c_2, \ldots) \,\middle|\, (c_1, c_2, \ldots) \in l^2 \right\}
  \end{aligned}$$

  Ist $|\lambda| < 1 \rightsquigarrow c_\lambda^* = \left(1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \bar\lambda^3, \ldots\right) \in l^2$.

  Betrachte $\Phi_\lambda : l^2 \to \mathbb{C}$ definiert durch

  $$\Phi_\lambda(\underline{c}^{**}) = \langle c_\lambda^*, c^{**} \rangle_{l^2}$$

  $\Phi_\lambda : l^2 \to \mathbb{C}$ ist stetig und es gilt

  $$\operatorname{Im}(\lambda \mathrm{Id} - L)_{l^2} \subset \ker(\Phi_\lambda), \quad \text{weil}$$

  $$\begin{aligned}
  \Phi_\lambda\underbrace{((\lambda \mathrm{Id} - L)c)}_{\in \operatorname{Im}(\lambda \mathrm{Id} - L)} &= \left\langle \underbrace{(1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \ldots)}_{c_\lambda^*}, (\lambda c_1, \lambda c_2 - c_1, \lambda c_3 - c_2, \ldots) \right\rangle_{l^2} \\
  &= 1 \cdot \bar\lambda \bar c_1 + \bar\lambda \cdot \left(\bar\lambda \bar c_2 - \bar c_1\right) + \bar\lambda^2 \cdot \left(\bar\lambda \bar c_3 - \bar c_2\right) + \ldots \\
  &= 0
  \end{aligned}$$

  Konsequenz:

  $$\overline{\operatorname{Im}(\lambda \mathrm{Id} - L)_{l^2}} \subseteq \overline{\ker(\Phi_\lambda)} \overset{\Phi_\lambda \text{ stetig}}{=} \ker(\Phi_\lambda) \neq l^2$$

  $\rightsquigarrow \lambda \in \sigma_r(L)$.

- Weil $\sigma(L)$ abgeschlossen ist, liegt $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| = 1\}$ auch im Spektrum.
- Sei $|\lambda| = 1$. Zunächst ist $(\lambda \mathrm{Id} - L) : l^2 \to l^2$ injektiv, aber <u>nicht</u> surjektiv. (klar)

  Folgende Möglichkeiten: $\lambda \in \sigma_c(L)$ oder $\lambda \in \sigma_r(L)$. ($\sigma_p(L) = \emptyset$)

  Angenommen, $\lambda \in \sigma_r(L) \rightsquigarrow \overline{(\lambda \mathrm{Id} - L)(l^2)} \not\subseteq l^2$.

  $\rightsquigarrow$ Es existiert ein Element $\underline{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots)$ mit $\underline{c}^* \neq 0$ und $\underline{c}^* \perp (\lambda \mathrm{Id} - L)\left(l^2\right)$.

  $$\rightsquigarrow \langle \underline{c}^*, \lambda \cdot \underline{c} - L \cdot \underline{c} \rangle_{l^2} = 0 \quad \forall \underline{c} \in l^2$$

Setze $\underline{c} = \underline{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in l^2$.

$$\begin{aligned}
\langle (c_1^*, c_2^*, \ldots), (0, 0, \ldots, 0, \lambda, -1, 0, \ldots) \rangle &= 0 \\
\rightsquigarrow c_i^* \cdot \lambda - c_{i+1}^* &= 0 \quad \text{für alle } i \\
\rightsquigarrow c_{i+1}^* &= \lambda c_i^* \\
\rightsquigarrow c^* &= \left(c_1^*, \lambda c_1^*, \lambda^2 c_1^*, \ldots\right) \\
\rightsquigarrow \|c^*\|^2 &= |c_1^*|^2 \left(1 + |\lambda|^2 + |\lambda|^4 + \ldots\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } c_1^* = 0 \\ \infty & \text{falls } c_1^* \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Wegen $\underline{c}^* \in l^2$ muß $c_1^* = 0$ gelten und es folgt $\underline{c}^* = 0$. Widerspruch.

6.2. **Das Spektrum kompakter Operatoren.**

Spektrum kompakter Operatoren E_λ

Satz 6.9. *Sei X Banach-Raum, $L : X \to X$ kompakt. Dann gilt:*

(1) *Ist $0 \neq \lambda \in \sigma(L) \rightsquigarrow \lambda \in \sigma_p(L)$.*
(2) *Ist $\lambda \neq 0$ Eigenwert, so gilt $\dim E_\lambda < \infty$, $(E_\lambda = \{x \in X \,|Lx = \lambda x\})$*
(3) *Die Menge aller Eigenwerte $\lambda \neq 0$ ist abzählbar und für jeden Radius $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{\lambda \in \sigma_p(L) \,| |\lambda| \geq \varepsilon\}$ endlich.*

Beweis.

(1) Angenommen, $\lambda \neq 0$ und $\lambda \in \sigma(L) \setminus \sigma_p(L)$.
$L_\lambda := \lambda \mathrm{Id} - L : X \to X$ ist injektiv, aber <u>nicht</u> surjektiv. Bilde die Folge von Räumen:

$$X_0 := X, \quad X_1 := L_\lambda(X), \quad X_2 = L_\lambda^2(X), \quad X_n = L_\lambda^n(X).$$

Dann gilt $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$.
Weil L_λ nicht surjektiv ist, ex.

$$y_0 \in X_0 \setminus X_1, \quad y_0 \neq 0$$

Setze

$$y_n := L_\lambda^n(y_0).$$

<u>Wir zeigen</u>: $y_n \in X_n \setminus X_{n+1}$.
Induktion: IA: $n = 0$ nach Konstruktion von y_0.
IB: $y_{n+1} \in X_{n+1} \setminus X_{n+2}$.
Angenommen, $y_{n+1} \in X_{n+2}$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \exists x_0 \in X : \quad y_{n+1} &= L_\lambda^{n+2}(x_0) \\
\rightsquigarrow L_\lambda^{n+1}(y_0) = y_{n+1} &= L_\lambda^{n+2}(x_0) \\
\rightsquigarrow L_\lambda\left(L_\lambda^n(y_0) - L_\lambda^{n+1}(x_0)\right) &= 0 \\
L_\lambda \text{ injektiv} \rightsquigarrow L_\lambda^n(y_0) &= L_\lambda^{n+1}(x_0) \\
\rightsquigarrow y_n &= L_\lambda^{n+1}(x_0) \in X_{n+1} \quad \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

<u>Wir zeigen</u>: alle Räume $X_n \subset X$ sind abgeschlossen.
Es genügt zu zeigen: Es ex. $\gamma > 0$ mit $\|L_\lambda(x)\| \geq \gamma \|x\| \; \forall x \in X$.[2]

---

[2]Induktion über n:
$n = 0$: klar nach Voraussetzung
$n \to n+1$: Sei $\{y_i\}$ Cauchy-Folge in $X_n \rightsquigarrow \exists x_i \in X_{n-1} : L_\lambda(x_i) = y_i$, $\|y_i - y_j\| = \|L_\lambda(x_i - x_j)\| \xrightarrow{i,j\to\infty} 0$.
$\rightsquigarrow \|x_i - x_j\| \leq \frac{1}{\gamma} \|L_\lambda(x_i - x_j)\| \xrightarrow{i,j\to\infty} 0 \rightsquigarrow \{x_i\}$ Cauchy-Folge in X_{n-1}
IV $\rightsquigarrow X_{n-1}$ abgeschlossen $\rightsquigarrow x_i \xrightarrow{i\to\infty} x^* \in X_{n-1} \rightsquigarrow y_i = L_\lambda(x_i) \to L_\lambda(x^*) \in X_n$.

Beweis indirekt: Angenommen, zu $\gamma = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ existiert eine Folge $z_n \in X$ mit

$$\|L_\lambda (z_n)\| \leq \frac{1}{n} \|z_n\|$$

Normiere:

$$x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \rightsquigarrow \quad \|x_n\| = 1 \text{ und } \|L_\lambda (x_n)\| = \|\lambda x_n - L(x_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

L ist kompakt $\rightsquigarrow$ Eine Teilfolge $L(x_{n_i})$ konvergiert gegen ein $x^* \in X$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|\lambda x_{n_i} - L(x_{n_i})\| &\leq \frac{1}{n_i} \quad \text{impliziert } \lambda x_{n_i} \to x^* \\ \rightsquigarrow \|x^*\| &= \lim_{i\to\infty} \|\lambda x_{n_i}\| = |\lambda| \neq 0 \\ \rightsquigarrow x^* &\neq 0 \end{aligned}$$

Aber:

$$L(x^*) = L\left(\lim_{i\to\infty} \lambda x_{n_i}\right) = \lambda \lim_{i\to\infty} L(x_{n_i}) = \lambda \cdot x^*$$

nach Konstruktion $\rightsquigarrow \lambda \in \sigma_p(L)$, Widerspruch.

Damit ist $X_0 = X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ eine fallende Folge abgeschlossener Räume.

$\rightsquigarrow$ Es existiert eine Folge z_n in X mit $\|z_n\| = 1$, $z_n \in X_n$,

$$\operatorname{dist}(z_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Betrachte

$$L(z_n) - L(z_m) = \lambda (z_n - x) \quad \text{mit} \quad x = z_n + \frac{1}{\lambda}\left(L_\lambda(z_n) - L_\lambda(z_m)\right).$$

Ist $m > n$, so gilt $z_m \in X_{n+1} \subset X_n$ nach Konstruktion. $\rightsquigarrow L_\lambda(z_m) \in X_{n+1}$.

Außerdem haben wir $L_\lambda(z_n) \in X_{n+1}$. $\rightsquigarrow x \in X_{n+1}$.

Damit folgt

$$\|L(z_n) - L(z_m)\| = |\lambda| \cdot \Bigg\| z_n - \underbrace{x}_{\in X_{n+1}} \Bigg\| \geq \frac{1}{2} |\lambda|$$

Keine Teilfolge von $L(z_n)$ konvergiert! $\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Kompaktheit von L.

(2) $\lambda \neq 0$. $E_\lambda = \{x \in X \,|Lx = \lambda x\}$. $\bar{B} \subset E_\lambda$ - Einheitskugel in E_λ

$\rightsquigarrow \overline{L(B)} \subset E_\lambda$ ist Kugel in E_λ $(\lambda \neq 0)$.

Diese Kugel $\overline{L(B)}$ ist kompakt, weil L kompakt. Satz 1.5 $\rightsquigarrow \dim E_\lambda < \infty$.

(3) Indirekt: Zu $\varepsilon > 0$ existiere eine Folge $\{\lambda_n\}$ mit $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, λ_n Eigenwert, $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Sei $x_n \in X$ ein Eigenvektor zu λ_n, d.h. $L(x_n) = \lambda_n \cdot x_n$.

<u>Wir zeigen</u>: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind linear unabhängig für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

Indirekt: Ist dies nicht der Fall, so hätten wir (Induktion):

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i.$$

Berechne:

$$\begin{aligned}
0 &= L(x_n) - \lambda_n x_n \\
&= L\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i\right) - \lambda_n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \{\alpha_i L(x_i) - \lambda_n \alpha_i x_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \{\alpha_i (\lambda_i - \lambda_n)\} x_i \\
\rightsquigarrow 0 &= \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \\
\rightsquigarrow 0 &= \alpha_i \quad \text{weil } \lambda_i - \lambda_n \neq 0 \\
\rightsquigarrow 0 &= x_n \quad \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

Sei $X_n = \operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_n)$. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$
X_n sind endlich-dimensional, also abgeschlossen. Nach Konstruktion gilt $X_n \subsetneq X_{n+1}$.
Damit existieren Vektoren $z_n \in X_n$ mit $\|z_n\| = 1$,

$$\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Betrachte

$$L\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right) - L\left(\frac{1}{\lambda_m} z_m\right) = z_n - x \quad \text{mit} \quad x = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n z_n - L(z_n)) + \frac{1}{\lambda_m} L(z_m).$$

Es gilt nach Konstruktion $\lambda_n z_n - L(z_n) \in X_{n-1}$[3]. Wegen $L(z_m) \in X_{n-1}$ $(m < n)$ folgt dann $x \in X_{n-1}$.

$$\rightsquigarrow \left\| L\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right) - L\left(\frac{1}{\lambda_m} z_m\right) \right\| = \|z_n - x\| \geq \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow L\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right)$ enthält keine konvergente Teilfolge.

Andererseits: $\left\|\frac{1}{\lambda} z_n\right\| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|z_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, ist also beschränkt.$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Kompaktheit von L.

□

17.12.2002 **Beispiel.** Sei H ein Hilbertraum und $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein vollständiges ON-System.
$L : H \to H$ sei definiert durch:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i \rangle}{i} e_i.$$

Die Reihe konvergiert:

$$\|L(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\langle x, e_i \rangle}{i}\right|^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty.$$

$\rightsquigarrow L$ ist linear stetig.

$$Q^\infty = \left\{ x \in H \,\middle|\, |\langle x, e_n \rangle| \leq \frac{1}{n} \right\} \overset{\text{kompakt}}{\subset} H.$$

---

[3] $\lambda_n z_n = \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$, $L(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i$

$\rightsquigarrow \lambda_n z_n - L(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_n x_i - \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in X_{n-1}$

Es gilt

$$|\langle Lx, e_n\rangle| = \left|\frac{\langle x, e_n\rangle}{n}\right| \leq \|x\| \frac{1}{n}$$

$\rightsquigarrow L(\mathcal{K}_H(0,1)) \subset Q^\infty \rightsquigarrow L : H \to H$ ist ein kompakter Operator.

Eigenwert: $x \in H$, $Lx = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i\rangle}{i} e_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \langle x, e_i\rangle e_i \\ \rightsquigarrow \frac{\langle x, e_i\rangle}{i} &= \lambda \langle x, e_i\rangle \end{aligned}$$

Eigenwerte sind somit: $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Eigenvektoren: $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots$

$$\langle Lx, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i\rangle}{i} \langle e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle \frac{\langle e_i, y\rangle}{i} = \langle x, Ly\rangle.$$

L ist selbstadjungiert in $H \rightsquigarrow \sigma_r(L) = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in \sigma(L), \text{ weil } \sigma(L) \text{ abgeschlossen} \\ 0 \notin \sigma_r(L) = \emptyset, \text{ weil } L \text{ selbstadjungiert} \\ 0 \notin \sigma_p(L) \end{array}\right\} \rightsquigarrow 0 \in \sigma_c(L).$$

Beispiel. H Hilbertraum, $e_1, e_2, e_3, \ldots$ vollständiges ON-System.

$L : H \to H$ sei definiert durch:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i\rangle}{i} e_{i+1}.$$

L ist kompakt.

Bedingung für Eigenwerte: $Lx = \lambda x$, $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i\rangle}{i} e_{i+1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle \lambda e_i \\ \langle x, e_1\rangle e_2 + \frac{1}{2}\langle x, e_2\rangle e_3 + \ldots &= \lambda\langle x, e_1\rangle e_1 + \lambda\langle x, e_2\rangle e_2 + \ldots \\ \rightsquigarrow \lambda\langle x, e_1\rangle &= 0 \\ \lambda \neq 0 \rightsquigarrow \langle x, e_1\rangle &= 0 \ldots \\ \langle x, e_i\rangle &= 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots \\ e_1, e_2, \ldots \text{ vollständig} \rightsquigarrow x &= 0. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$: $\operatorname{Im}(L) \subseteq \{y \in H : |\langle y, e_1\rangle = 0\} \subsetneq H$ abgeschlossener Teilraum $\rightsquigarrow \overline{\operatorname{Im}(L)} \neq H \rightsquigarrow 0 \in \sigma_r(L)$.

$\{0\} = \sigma_r(L) = \sigma(L)$ ein einzelner Punkt.

Beispiel. $X = \mathbb{R}^n$, $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$, $\lambda_i \neq 0$, endlich-dimensional, $0 \in \rho(L)$.

6.2.1. *Satz von Fredholm.*

Zur Erinnerung: Definition 5.11: $L : X \to Y$ ist Fredholm-Operator, falls:

(1) $\dim \ker (L) < \infty$
(2) $\mathrm{Im}\,(L) \subset Y$ ist abgeschlossen.
(3) $\dim (Y/\mathrm{Im}\,(L)) < \infty$; $\mathrm{co}\ker (L) := Y/\mathrm{Im}\,(L)$.

Definition 6.10. Der Index von L ist

Index
$\mathrm{Ind}\,(L)$

$$\boxed{\mathrm{Ind}\,(L) := \dim (\ker (L)) - \dim (\mathrm{co}\ker (L))}$$

Beispiel. $\dim X < \infty$, $L : X \to X$ ist in diesem Fall stets Fredholm.

Homömorphiesatz: $\mathrm{Im}\,(L) = X/\ker (L)$.

$$\begin{aligned} \dim (\mathrm{Im}\,(L)) &= \dim X - \dim (\ker (L)) \\ \rightsquigarrow \dim (\ker (L)) &= \dim X - \dim (\mathrm{Im}\,(L)) = \dim (\mathrm{co}\ker (L)) \\ \rightsquigarrow \mathrm{Ind}\,(L) &= 0 \end{aligned}$$

Ist $L : X \to X$ kompakt, so ist $\mathrm{Id}_X - L : X \to X$ Fredholm. (Satz von Riesz, 5.13).

Fredholm-Satz: L kompakt $\rightsquigarrow 0 = \mathrm{Ind}\,(\mathrm{Id} - L)$

Satz 6.11. *(Fredholm) Für jeden kompakten Operator $L : X \to X$ gilt:*

$$\boxed{\mathrm{Ind}\,(\mathrm{Id}_X - L) = 0}$$

Beispiel. H Hilbertraum, $e_1, e_2, \ldots$ ON-system, $L(e_i) = e_{i+1}$.

$$\begin{aligned} l^2 &= \left\{ (c_1, c_2, \ldots) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty \right\} \\ L(c_1, c_2, \ldots) &= (0, c_1, c_2, \ldots) \end{aligned}$$

$\ker (L) = 0$, $\mathrm{co}\ker (L) = \mathbb{C}e_1$ 1-dimensional $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Ind}\,(L) = -1.$$

Analog erhält man zu jeder ganzen Zahl $k \in Z$ einen Fredholm-Operator $L_k : H \to H$ mit $\mathrm{Ind}\,(L_k) = k$.

Beweis. (von Satz 6.11) Setze

$$A := \mathrm{Id}_X - L,$$

L kompakt und $A = \mathrm{Id}_X + \{\text{kompakter Operator}\}$.

(1) Jede Potenz von A ist darstellbar als $A^n = \mathrm{Id}_X + \{\text{kompakter Operator}\}$.
Nach Binomischer Formel ist

$$A^n = (\mathrm{Id}_X - L)^n = \mathrm{Id}_X \underbrace{- \binom{n}{1} L + \binom{n}{2} L^2 - \binom{n}{3} L^3 + \ldots \pm \binom{n}{n} L^n}_{\text{kompakt}}$$

Die Teilräume

$$I_n := A^n(X) = \mathrm{Im}\,(A^n) \subset X$$

sind abgeschlossen in X (siehe Beweis von Satz 5.13) und es gilt $\dim (X/I_n) < \infty$.

$$X = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

nach Konstruktion.

$$E_n := \ker (A^n) = \{x \in X \,|\, A^n x = 0\} \subset X$$

abgeschlossene Teilräume.

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

(2) Die Folge $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ stabilisiert sich; d.h. $\exists p \in N : E_p = E_{p+1} = E_{p+2} = \ldots$
Beweis indirekt: Anderenfalls ex. eine Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, minimale Auswahl, mit

$$E_{n_1} \subsetneq E_{n_2} \subsetneq E_{n_3} \subsetneq \ldots$$

Wir wählen Vektoren $e_i \in E_{n_i}$, $i \geq 2$, mit $\|e_i\| = 1$,

$$\operatorname{dist}\left(e_i, E_{n_{i-1}}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Für $i > j$ ist dann

$$L(e_i) - L(e_j) = (\mathrm{Id} - A)(e_i) - (\mathrm{Id} - A)(e_j) = e_i - e_j - A(e_i) + A(e_j)$$

$e_j \in E_{n_j} \subset E_{n_{i-1}}$, da $j \leq i-1 \rightsquigarrow A^{n_{i-1}}(e_j) = 0 \rightsquigarrow A^{n_{i-1}+1}(e_j) = 0 \rightsquigarrow A(e_j) \in E_{n_{i-1}}$.
$e_i \in E_{n_i} \rightsquigarrow A^{n_i}(e_i) = 0$; n_1, n_2, n_3 minimial $\rightsquigarrow A^{n_{i-1}}(A(e_i)) = 0 \rightsquigarrow A(e_i) \in E_{n_{i-1}}$.

$$\rightsquigarrow \|L(e_i) - L(e_j)\| = \left\| e_i - \underbrace{(e_j + A(e_i) - A(e_j))}_{\in E_{n_{i-1}}} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

nach konstruierter Folge $e_1, e_2, \ldots \rightsquigarrow$ Widerspruch zur Kompaktheit von L!

(3) $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ stabilisiert sich.
Beweis: Wähle $n_1, n_2, n_3, \ldots$, minimal mit

$$I_1 = \cdots = I_{n_1 - 1} \supsetneq I_{n_1} = \cdots = I_{n_2 - 1} \supsetneq I_{n_2} \cdots.$$

Wähle Vektoren $e_i \in I_{n_i - 1}$ mit $\|e_i\| = 1$,

$$\operatorname{dist}(e_i, I_{n_i}) \geq \frac{1}{2}$$

Für $i < j$ ist dann

$$L(e_i) - L(e_j) = (\mathrm{Id} - A)(e_i) - (\mathrm{Id} - A)(e_j) = e_i - e_j - A(e_i) + A(e_j),$$

$e_j \in I_{n_j - 1} = I_{n_{j-1}} \subseteq I_{n_i}$, da $j - 1 \geq i$.
$e_j \in I_{n_j - 1} \rightsquigarrow Ae_j \in I_{n_j} \subseteq I_{n_i}$, da $j > i$.
$e_i \in I_{n_i - 1} = \operatorname{Im}\left(A^{n_i - 1}\right) \rightsquigarrow A(e_i) \in \operatorname{Im}(A^{n_i}) = I_{n_i}$

$$\rightsquigarrow \|L(e_i) - L(e_j)\| = \left\| e_i - \underbrace{(e_j + A(e_i) - A(e_j))}_{\in I_{n_i}} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Kompaktheit von L!

$$\begin{aligned} I_0 \supset I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_q = I_{q+1} \ldots &= I_\infty \\ E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subseteq E_p = E_{p+1} = \ldots &= E_\infty \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind I_∞, $E_\infty \subset X$ abgeschlossene Teilräume!

(4) $I_\infty \cap E_\infty = \{0\}$.
Beweis: Sei $x \in I_\infty \cap E_\infty \rightsquigarrow x \in E_\infty = E_p = \ker(A^p)$ für eine Zahl $p \in \mathbb{N} \rightsquigarrow$

$$\exists p \in \mathbb{N} : A^p(x) = 0$$

Aber $x \in I_\infty = I_q = \operatorname{Im}(A^q) \rightsquigarrow$

$$\exists q, \exists y : x = A^q(y)$$

$\rightsquigarrow A^{p+q}(y) = A^p(A^q(y)) = A^p(x) = 0$.
$\rightsquigarrow y \in \ker(A^{p+q}) = E_{p+q}$, aber $E_q = E_{q+1} = \ldots = E_{p+q}$
$\rightsquigarrow y \in E_q \rightsquigarrow y \in \ker(A^q) \rightsquigarrow 0 = A^q(y) = x$.

(5) $A(E_\infty) \subset E_\infty$, $A(I_\infty) \subset I_\infty$.
Ist $x \in E_\infty \rightsquigarrow \exists p: A^p(x) = 0 \rightsquigarrow A^p(Ax) = 0 \rightsquigarrow Ax \in E_p = E_\infty$.
Analog für $A(I_\infty) = I_\infty$.

(6) $A|_{I_\infty} : I_\infty \to I_\infty$ ist bijektiv.
Sei $x \in I_\infty$ mit $A(x) = 0$. $\rightsquigarrow x \in E_1 = \ker(A) \subset E_2 \subset \cdots \subset E_\infty \rightsquigarrow x \in E_\infty$.
Aber $I_\infty \cap E_\infty = \{0\}$. Damit folgt $x = 0$.
Damit wird $A|_{I_\infty} : I_\infty \to I_\infty$ injektiv.
Ist $y \in I_\infty = I_q = I_{q+1} = \ldots \rightsquigarrow y \in A^{q+1}(x)$ für ein gewisses q.
$\rightsquigarrow y = A(A^q(x)) \overset{I_q = I_\infty}{\rightsquigarrow} y \in \operatorname{Im}(A|_{I_\infty}) \rightsquigarrow A|_{I_\infty} : I_\infty \to I_\infty$ ist surjektiv.

(7) $X = I_\infty \oplus E_\infty$ topologische Äquivalenz.
Beweis: Betrachte den Banach-Raum X/E_∞ (E_∞ ist abgeschlossen!). Wegen $A(E_\infty) \subset E_\infty$ induziert A einen Operator
$$\tilde{A} : X/E_\infty \to X/E_\infty.$$
$\tilde{A}$ ist injektiv: Gelte $\tilde{A}(x + E_\infty) = 0 \rightsquigarrow A(x) + E_\infty = 0$ in $X/E_\infty \rightsquigarrow A(x) \in E_\infty \rightsquigarrow \exists p: A^p(A(x)) = 0. \rightsquigarrow x \in E_{p+1} = E_\infty \rightsquigarrow x + E_\infty = 0$ in X/E_∞.
$\tilde{A}$ ist surjektiv: um das zu zeigen, brauche wir erst die algebraische Vorbreitung:
Sei V ein beliebiger Vektorraum, $B : V \to V$ linear, injektiv.
Beh.: Ist B nicht surjektiv, so ist $\operatorname{Im}(B) \supsetneq \operatorname{Im}(B^2) \supsetneq \ldots$.
Beweis: Sei $v \in V$ gegeben und gelte $\operatorname{Im}(B^k) = \operatorname{Im}(B^{k+1}) \rightsquigarrow B^k(v) \in \operatorname{Im}(B^k) = \operatorname{Im}(B^{k+1}) \rightsquigarrow \exists w \in V : B^k(v) = B^{k+1}(w) \overset{B \text{ inj.}}{\rightsquigarrow} v = B(w)$. Damit wird B surjektiv.
Jetzt angenommen: $\tilde{A} : X/E_\infty \to X/E_\infty$ wäre nicht surjektiv.
Dann ist $\operatorname{Im}(\tilde{A}) \supset \operatorname{Im}(\tilde{A}^2) \supset \operatorname{Im}(\tilde{A}^3) \supset \ldots$ eine echt fallende Folge. Aber

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/E_\infty \arrow[r, "\tilde{A}"] & X/E_\infty \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im}(A^n) = I_n \rightsquigarrow \operatorname{Im}(\tilde{A}_n) = I_n + E_\infty$ in X/E_∞.
Widerspruch, weil die I_n-Räume sich stabilisieren!
Also: $\tilde{A} : X/E_\infty \to X/E_\infty$ ist bijektiv.
$\rightsquigarrow \tilde{A}^p : X/E_\infty \to X/E_\infty$ sind bijektiv.
$\rightsquigarrow \tilde{A}^p : X/E_\infty \to X/E_\infty$ sind surjektiv.
$\rightsquigarrow I_\infty = I_p = \operatorname{Im}(A^p)$ wird bei der Projektion $I_\infty \subset X \xrightarrow{\pi} X/E_\infty$ injektiv nach X/E_∞ abgebildet ($I_\infty \cap E_\infty = \{0\}$) und auch surjektiv auf X/E_∞ abgebildet (weil $\tilde{A}^p$ surjektiv).
$\rightsquigarrow I_\infty \xrightarrow{\text{bij.}} X/E_\infty$, $\ker(\pi) = E_\infty \rightsquigarrow$
$$X = \ker(\pi) \oplus I_\infty = E_\infty \oplus I_\infty.$$

Zusammenfassung: $X = E_\infty \oplus I_\infty$, $A|_{I_\infty} : I_\infty \to I_\infty$ bijektiv. $\ker(A) = E_1 \subset E_\infty$
$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \ker(A) &= \ker(A|_{E_\infty}) \\ \rightsquigarrow \operatorname{Ind}(A) &= \operatorname{Ind}(A|_{E_\infty} : E_\infty \to E_\infty) \end{aligned}$$
Aber $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subseteq E_p = E_{p+1} = \ldots = E_\infty = \ker(A^p) \rightsquigarrow \dim(E_\infty) < \infty$, da A Fredholm.
$$\rightsquigarrow \operatorname{Ind}(A) = 0,$$
weil der Index jedes Operators in einem endlich-dimensionalem Teilraum verschwindet.

$\square$

Anwendung des Fredholm-Satz: Lösbarkeit der Gleichung:

$$Lx - \lambda x = y, \tag{6.4}$$

wobei L kompakt ist.

Frage: Gegeben ist ein kompakter Operator L, λ ist gegeben. Für welche $y \in X$ ist die Gleichung (6.4) lösbar? Wenn ja, wieviele Lösungen existieren?

Antwort:

(1) Ist $\lambda \neq 0$ und kein Eigenwert, dann ist

$$L - \lambda \mathrm{Id}_X = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right), \quad \ker \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) = \{0\},$$

weil λ kein Eigenwert von L ist.
Satz 6.11 von Fredholm $\rightsquigarrow$ $0 = \dim \ker \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) - \dim \mathrm{co}\ker \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) \rightsquigarrow$

$$\dim \mathrm{co}\ker \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) = 0$$

$\rightsquigarrow$ $\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X$ ist surjektiv.
Die Gleichung (6.4) ist für jedes $y \in X$ eindeutig lösbar.

(2) Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von L,

$$L - \lambda \mathrm{Id}_X = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right), \quad 0 \neq m_\lambda = \dim \ker \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) = \dim E_\lambda (L)$$

Satz 6.11 von Fredholm:

$$\dim \left(X / \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) \right) = m_\lambda$$

Damit existiert ein Teilraum $N_\lambda \subset X$ mit N_λ

$$N_\lambda \cap \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\lambda} L - \mathrm{Id}_X \right) = \{0\} \quad \text{und} \quad \dim N_\lambda = m_\lambda = \dim E_\lambda (L)$$

und die Gleichung (6.4) ist nicht lösbar $\forall y \in N_\lambda$.
Ist die Gleichung (6.4) lösbar, so besteht die Lösungsmenge aus einem m_λ-dimensionalen affinen Raum. - Dies ist die "Fredholm Alternative".
Problem: was ist N_λ ?

Satz 6.12. *$L : H \to H$ kompakt, H Hilbertraum, $L^* : H \to H$ adjungierter Operator.*

(1) *$\lambda \neq 0$ ist Eigenwert von $L \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ ist Eigenwert von L^*. In diesem Fall gilt:*

$$\boxed{\dim E_\lambda (L) = \dim E_{\bar{\lambda}} (L^*)}$$

(2) *N_λ ist wählbar als $E_{\bar{\lambda}} (L^*)$. Mit anderen Worten: Die Gleichung*

$$\boxed{Lx - \lambda x = y \text{ ist lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad y \perp E_{\bar{\lambda}} (L^*)}$$

Beweis.

(1) λ ist Eigenwert von $L \rightsquigarrow \exists x \neq 0 : Lx = \lambda x$.
Angenommen, $\bar{\lambda} \neq 0$ ist kein Eigenwert von $L^* \overset{L^* \text{ kompakt}}{\rightsquigarrow} \bar{\lambda} \mathrm{Id}_H - L^* : H \to H$ ist bijektiv.
Demnach ex. $x_1 \in X$ mit $\bar{\lambda} \cdot x_1 - L^* x_1 = x$. Berechnen:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle x, \bar{\lambda} \cdot x_1 - L^* x_1 \right\rangle = \lambda \langle x, x_1 \rangle - \langle Lx, x_1 \rangle = \lambda \langle x, x_1 \rangle - \langle \lambda x, x_1 \rangle = 0.$$

Widerspruch.
Also: λ ist Eigenwert von $L \rightsquigarrow \bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $L^* \rightsquigarrow \lambda$ ist Eigenwert von $L^{**} = L$.

(2) Für welche $y \in H$ ist die Gleichung $Lx - \lambda x = y$ (6.4) lösbar?
Sei $z \in E_{\bar{\lambda}}(L^*)$ und gelte $Lx - \lambda x = y$. Berechnen

$$\langle y, z\rangle = \langle Lx - \lambda x, z\rangle = -\lambda \langle x, z\rangle + \langle x, L^* z\rangle = -\lambda \langle x, z\rangle + \langle x, \bar{\lambda} z\rangle = 0.$$

Das bedeutet: Ist $Lx - \lambda x = y$ bei vorgegebenem $y \in H$ lösbar, so gilt $y \perp E_{\bar{\lambda}}(L^*)$.
Umgekehrt:

$$\begin{aligned} y \perp E_{\bar{\lambda}}(L^*) = \ker\left(\bar{\lambda}\mathrm{Id}_H - L^*\right) &= (\mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id}_H - L))^{\perp} \\ \rightsquigarrow (E_{\bar{\lambda}}(L^*))^{\perp} = (\mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id}_H - L))^{\perp\perp} &\overset{\mathrm{Im}(\lambda \mathrm{Id}_H - L)\ \text{abg.}}{=} \mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id}_H - L) \end{aligned}$$

jetzt folgt:

$$y \perp E_{\bar{\lambda}}(L^*) \quad \rightsquigarrow \quad y \in (E_{\bar{\lambda}}(L^*))^{\perp} = \mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id}_H - L) \quad \rightsquigarrow \quad \exists x \in H : Lx - \lambda x = y$$

$\rightsquigarrow$ Gleichung (6.4) lösbar.

□

6.2.2. *Anwendung auf Integralgleichungen.*

$(X, \mathcal{A}, \mu)$	Maßraum.
$K(x,y)$	Kern in $L^2(X \times X)$
L	Integraloperator zum Kern K:

$$Lf(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

$L : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist kompakt.

$$\begin{aligned} Lu - \lambda u &= -v \\ \Leftrightarrow \int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) - \lambda u(x) &= -v(x) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) - u(x) &= -\frac{1}{\lambda} v(x) \\ \Leftrightarrow u(x) - \frac{1}{\lambda}\int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) &= \frac{1}{\lambda} v(x) \end{aligned}$$

(6.5) $$\text{Integralgleichung} :\Leftrightarrow u(x) - \mu \int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) = v(x)$$

Betrachte:

$$\mu := \frac{1}{\lambda}.$$

(1) Die Gleichung (6.5) hat genau dann für jedes $v \in L^2(X)$ eine Lösung, falls die homogene Gleichung

$$u(x) - \mu \int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) = 0$$

die Lösung $u = 0$ hat.

(2) Hat die Gleichung

$$u(x) - \mu \int_X K(x,y) u(y)\, d\mu(y) = 0$$

eine nicht-triviale Lösung u, $u \in E_{\lambda}(L)$, so hat auch

$$u^*(x) - \bar{\mu} \int_X \overline{K(y,x)} u^*(y)\, d\mu(y) = 0$$

eine Lösung u^*, $u^* \in E_{\bar{\lambda}}(L^*)$, und die Dimension der Lösungsunterräume stimmt überein. (Satz 6.12.(1))

(3) (6.5) besitzt eine Lösung $u(x) \Leftrightarrow$

$$\int_X v(x)\, u^*(x)\, d\mu(x) = 0$$

für alle Lösungen u^* der Gleichung

$$u^*(x) - \bar{\mu} \int_X \overline{K(y,x)} u^*(y)\, d\mu(y) = 0,$$

da nach Satz 6.12.(2) $Lx - \lambda x = y$ lösbar ist, gdw. $y \perp E_{\bar{\lambda}}(L^*)$.

(4) Die Menge der Zahlen μ mit nicht-trivialer Lösung

$$u^*(x) - \bar{\mu} \int_X \overline{K(y,x)} u^*(y)\, d\mu(y) = 0$$

ist endlich, oder ist abzählbar mit $|\mu| \to \infty$. Jeder Lösungsraum ist endlich-dimensional (Satz 6.9).

Satz 6.13. *Sei L kompakt und selbstadjungiert. Dann ist* 7.1.2003

$$\boxed{H = (\ker L) \oplus \bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i) = \bigoplus_{\lambda} E(\lambda)}$$

$H = \bigoplus_{\lambda} E_\lambda$

Beweis. Betrachte

$$X_1 := \overline{\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i)}$$

Sei $x \in X_1^\perp$. $\rightsquigarrow x \perp E(\lambda_i) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda_i \neq 0 \forall y \in E(\lambda_i) &: \quad \langle x, y \rangle = 0 \\
\rightsquigarrow \forall \lambda_i \neq 0 \forall y \in E(\lambda_i) &: \quad \Big\langle x, \underbrace{\lambda_i y}_{L(y)} \Big\rangle = 0 \\
\rightsquigarrow \forall \lambda_i \neq 0 \forall y \in E(\lambda_i) &: \quad \langle Lx, y \rangle = 0 \\
\rightsquigarrow Lx &\in X_1^\perp
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: L bildet $X_1^\perp$ in sich ab. Betrachte

$$L\Big|_{X_1^\perp} : X_1^\perp \to X_1^\perp.$$

Wäre $L\Big|_{X_1^\perp} \neq 0 \rightsquigarrow \left\| L\Big|_{X_1^\perp} \right\| \neq 0$. Mit den Sätzen 6.8 und 6.9 folgt dann $\pm \left\| L\Big|_{X_1^\perp} \right\| \in \sigma_p\left(L\Big|_{X_1^\perp} \right)$. Dann ex. ein Vektor $z \in X_1^\perp$ mit

$$L(z) = \underbrace{\pm \left\| L\Big|_{X_1^\perp} \right\|}_{\neq 0} \cdot z$$

$\rightsquigarrow z \in X_1$ und $z \in X_1^\perp \rightsquigarrow z = 0$.

Also: $L\Big|_{X_1^\perp} \equiv 0$, d.h.

$$X_1^\perp \subseteq \ker(L).$$

Umgekehrt: Sei $x \in \ker(L) \rightsquigarrow Lx = 0 \rightsquigarrow$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle x, \lambda_i y \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle x, Ly \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle Lx, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E(\lambda_i), \lambda_i \neq 0$$

$$\rightsquigarrow x \perp E(\lambda_i)\ \forall \lambda_i \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad x \perp \overline{\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i)} = X_1 \quad \rightsquigarrow \quad \ker(L) \subseteq X_1^\perp \subseteq \ker(L)$$

$$\rightsquigarrow \quad H = X_1^\perp \oplus X_1 = \ker(L) \oplus \bigcup_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i)$$

□

Folgerung. $L : H \to H$ kompakter, selbstadjungierter Operator, H separabel. Dann existiert ein vollständiges ON-System $e_1, e_2, \ldots$ in H bestehend aus Eigenvektoren von L.

$$x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i \quad \rightsquigarrow \quad Lx = \sum \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \quad \rightsquigarrow \quad L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Konsequenz: kompakte, selbstadjungierte Operatoren verhalten sich wie symmetrische Matrizen.

6.2.3. *Integraloperatoren mit symmetrischem Kern (Hilbert-Schmidt-Theorie).*

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	Lebesgue-meßbar
$K(x,y)$	$K(x,y) = \overline{K(y,x)} \in L^2(\Omega \times \Omega)$ symmetrischer Kern
Lf	$L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt und selbstadjungiert

$$Lf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) \, dy$$

Hilbert-Schmidt-Bedingung

Definition 6.14. $K(x,y)$ erfüllt die Hilbert-Schmidt-Bedingung (H-S-Bedingung), falls eine Konstante γ existiert mit

$$\boxed{\int_\Omega |K(x,y)|^2 \, dy \leq \gamma \qquad \forall x \in \Omega}$$

lokal positives Maß

Ω ist eine Menge von lokal-positiven Maß, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$ und jeden Radius $r(x_0)$ gilt:

$$\boxed{\mu(\Omega \cap \mathcal{K}(x_0, r)) > 0}$$

Eigenwert des Kerns

Ein Eigenwert des Kerns $K(x,y)$ ist eine Zahl μ mit

$$\boxed{f(x) - \mu \int_\Omega K(x,y) f(y) \, dy = 0}$$

und $f \in L^2, f \neq 0$.

Bemerkung. μ ist Eigenwert von $K \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$ ist Eigenwert von L.

Satz 6.15. *Alle Eigenwerte μ des Kerns $K(x,y)$ sind reell, es existieren maximal abzählbar viele und*

$$\boxed{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\mu_k^2} \leq \int_{\Omega \times \Omega} |K(x,y)|^2 \, dx dy < \infty}$$

Beweis. Betrachte $L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Wähle in $L^2(\Omega)$ ein vollständiges ON-System $u_1(x), u_2(x), \ldots$ bestehend aus Eigenfunktionen von L.

Sei $f \in L^2$,

$$f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, u_k \rangle_{L^2} \cdot u_k$$

die L^2-Zerlegung von f.

$$g(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) \, dy = (Lf)(x).$$

$$\rightsquigarrow \sum_{\lambda_k \neq 0} \lambda_k \cdot \langle f, u_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \cdot \langle f, u_k \rangle u_k = Lf = g = \sum_{k=1}^\infty \langle g, u_k \rangle u_k.$$

Also: Liegt $g \in L^2$ im Bild von L, so treten in der Orthogonalzerlegung von g nur Eigenfunktionen zu $\lambda \neq 0$ auf. Setze $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Die Funktionen

$$u_{k,l}(x,y) := u_k(x) \cdot \overline{u_l(y)}$$

bilden ein (vollständiges) ON-System in $L^2(\Omega \times \Omega)$.

Besselsche Ungleichung: $\left(L^2(\Omega \times \Omega), u_{k,l}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle K(x,y), u_k(x)\overline{u_k(y)} \right\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} \right|^2 &\leq \|K(x,y)\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} \\
\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\overline{u_k(x)\overline{u_k(y)}}dxdy \right|^2 &\leq \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\, dxdy \\
\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\overline{u_k(x)}u_k(y)\, dxdy \right|^2 &\leq \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\, dxdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_k = \langle Lu_k, u_k\rangle &= \int_{\Omega} Lu_k(x)\overline{u_k(x)}dx \\
&= \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} K(x,y)\,u_k(y)\,dy\right)\overline{u_k(x)}dx \\
&= \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\overline{u_k(x)}u_k(y)\,dxdy \\
\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Lu_k, u_k\rangle|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)\overline{u_k(x)}u_k(y)\,dxdy\right|^2 \\
&\leq \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\,dxdy
\end{aligned}$$

□

Die Reihe

$$\sum_{k=1,\lambda_k\neq 0}^{\infty} \langle g, u_k\rangle\, u_k$$

konvergiert in L^2 gegen g.

Frage: Konvergiert diese Reihe "besser" als nur in L^2?

Satz 6.16.

(1) *Erfülle der symmetrische Kern $K(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$ die Hilbert-Schmidt-Bedingung. Sei $g \in L^2(\Omega)$ und $g \in \operatorname{Im}(L)$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle g, u_k\rangle_{L^2} u_k(x)$$

absolut und gleichmäßig auf Ω und fast-überall gegen g.

(2) *Sei Ω kompakt, lokal von positivem Maß und sei $K(x,y)$ stetig. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle g, u_k\rangle_{L^2} u_k(x)$$

in jedem Punkte gegen g.
(Bem.: Weil K stetig und Ω kompakt, muß $g = L(f)$ stetig sein.!)

Beweis. von (2), falls (1) gilt:

$$u_k(x) = \frac{1}{\lambda}\int_\Omega K(x,y)\,u_k(y)\,dy$$

$u_k \in L^2$, Ω kompakt, K stetig $\rightsquigarrow$ (Lebesgue-Satz) $u_k(x)$ sind stetig.

Nach (1) konvergiert $\sum_k \langle g,u_k\rangle_{L^2} u_k(x) \rightrightarrows g^*(x) \rightsquigarrow g^*$ ist stetig.

Aber nach (1): $g^* \equiv g$ fast überall. g^* stetig, $g \in \operatorname{Im}(L)$, Ω hat lokal positives Maß $\rightsquigarrow g^* = g$.

Beweis von (1): Wähle $\gamma > 0$ mit

$$\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy \le \gamma \quad \forall x \in \Omega.$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^m \left|\langle g,u_k\rangle_{L^2} u_k(x)\right| &= \sum_{k=n}^m \left|\langle Lf,u_k\rangle_{L^2} u_k(x)\right| \\
&= \sum_{k=n}^m \left|\langle f,Lu_k\rangle_{L^2} u_k(x)\right| \\
&= \sum_{k=n}^m |\lambda_k|\left|\langle f,u_k\rangle_{L^2} u_k(x)\right| \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \sqrt{\sum_{k=n}^m |\lambda_k|^2\,|u_k(x)|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=n}^m \left|\langle f,u_k\rangle_{L^2}\right|^2}
\end{aligned}$$

Wir wissen:

$$\lambda_k u_k(x) = Lu_k(x) = \int_\Omega K(x,y)\,u_k(y)\,dy$$

Fixiere $x \in \Omega$. Dann ist $\overline{\lambda_k u_k(x)}$ der k-te Koeffizient der Funktion $K(\cdot,x)$ bzgl. $u_1,u_2,\ldots$ in L^2:

$$\langle K(\cdot,x),u_k\rangle_{L^2} = \int_\Omega K(y,x)\,\overline{u_k(y)}dy = \int_\Omega \overline{\overline{K(y,x)}u_k(y)} = \overline{\int_\Omega K(x,y)\,u_k(y)} = \overline{Lu_k(x)} = \overline{\lambda_k u_k(x)}$$

Besselsche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^m |\lambda_k u_k(x)|^2 = \sum_{k=n}^m \left|\overline{\lambda_k u_k(x)}\right|^2 = \sum_{k=n}^m |\langle K(\cdot,x),u_k\rangle|^2 &\le \|K(\cdot,x)\|_{L^2}^2 \\
&= \int_\Omega |K(y,x)|^2\,dy = \int_\Omega |K(x,y)|^2 \\
&\le \gamma \quad \text{unabhängig von } x
\end{aligned}$$

Also:

$$\sum_{k=n}^m \left|\langle g,u_k\rangle_{L^2} u_k(x)\right| \le \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\sum_{k=n}^m \left|\langle f,u_k\rangle_{L^2}\right|^2} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

weil $\sum_k |\langle f,u_k\rangle|^2$ konvergiert.

$\square$

9.1.2003 **Satz 6.17.** *Erfülle der stetige symmetrische Kern $K(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$ die Hilbert-Schmidt-Bedingung. Sei Ω kompakt und lokal von positivem Maß. Dann gilt*

$$\boxed{\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy = \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{u_k(x)}{\mu_k}\right|^2}$$

und die Reihe konvergiert gleichmäßig auf Ω.

Beweis. Betrachte einen neuen Kern

$$B(x,z) = \int_\Omega K(x,y)\cdot\overline{K(z,y)}dy = L\left(\overline{K(z,\cdot)}\right)$$

Ist $z\in\Omega$ fest, wenden wir Satz (6.16) auf $g(x) := B(x,z)$ an !

$$\begin{aligned}
B(x,z) = L\left(\overline{K(z,\cdot)}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\overline{K(z,\cdot)},u_k\right\rangle L(u_k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)}{\mu_k}\int_\Omega\overline{K(z,y)u_k(y)}dy\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)}{\mu_k}\overline{L(u_k)(z)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)}{\mu_k}\cdot\frac{\overline{u_k(z)}}{\mu_k}\\
\text{Lege } z=x \rightsquigarrow B(x,x) = \int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k^2}\\
\text{Aber: } \underbrace{B(x,x)}_{\text{stetige Fkt.}} &= \lim_{N\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k^2}}_{\text{wachsende Folge stetiger Fkt.}}
\end{aligned}$$

Dini-Lemma $\rightsquigarrow$ gleichmäßige Konvergenz □

Folgerung. Ω und K wie zuvor. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|K(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}\right|^2 dy = 0}$$

und diese Konvergenz ist gleichmäßig in $x\in\Omega$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left|K(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}\right|^2 dy &= \int_\Omega K(x,y)\,\overline{K(x,y)}dy - 2\int_\Omega\sum_{k=1}^{n}K(x,y)\,\overline{\frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}}dy\\
&\quad+\int\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}\right)\overline{\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{u_l(x)\overline{u_l(y)}}{\mu_l}\right)}dy\\
&= \int_\Omega|K(x,y)|^2\,dy - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{u_k(x)}}{\mu_k}\underbrace{\int_\Omega K(x,y)\,u_k(y)\,dy}_{Lu_k=\lambda_k u_k}\\
&\quad+\sum_{k,l=1}^{n}\frac{u_k(x)\,\overline{u_l(x)}}{\mu_k^2}\underbrace{\int_\Omega\overline{u_k(y)}u_l(y)\,dy}_{\langle u_l,u_k\rangle_{L^2}=\delta_{k,l}}\\
&= \int_\Omega K^2(x,y)\,dy - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{u_k(x)}}{\mu_k}\lambda_k u_k(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)\,\overline{u_k(x)}}{\mu_k^2}\\
&= \int_\Omega|K(x,y)|^2\,dy - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k(x)}{\mu_k}\right|^2 \rightrightarrows 0
\end{aligned}$$

□

Satz von Mercer

Satz 6.18. *(Mercer) Ω kompakt, lokal positives Maß, $K(x,y)$ symmetrischer Kern, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $K(x,y)$ stetig, alle Eigenwerte $\mu_k > 0$. Dann gilt*

$$\boxed{K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}}$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz!

Bemerkung. $Lf = \lambda_k f \Leftrightarrow$ Lösung einer DGL $\rightsquigarrow$ Berechne alle Eigenpunkte der DGL $\rightsquigarrow$ explizite Formeln für $u_k(x) \rightsquigarrow \sum_k \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}$ berechnet durch $K(x,y)$

$n = 1$: siehe Übungen; $n \geq 2$: Vorlesung über partielle Differentialgleichungen

Beweis. Setze

$$K_n(x,y) := K(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}.$$

Sei $f \in L^2(\Omega)$

$$Lf = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle f, u_k \rangle_{L^2} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \langle f, u_k \rangle_{L^2} u_k$$

Also folgt

$$\langle Lf, f \rangle_{L^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} |\langle f, u_k \rangle_{L^2}|^2 \geq 0$$

Sei L_n der Integraloperator zu K_n. Dann gilt analog

$$\langle L_n f, f \rangle = \int_{\Omega \times \Omega} K_n(x,y) f(y) \overline{f(x)} dx dy \geq 0$$

für alle n und jede Funktion $f \in L^2(\Omega)$.

<u>Wir zeigen</u>: $K_n(x,x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.

Zunächst gilt $K_n(x,x) = \overline{K_n(x,x)}$, d.h. $K_n(x,x)$ist reell.

Angenommen, es ex. ein $x_0 \in \Omega$ mit $K_n(x_0, x_0) < 0$.

Somit existiert eine Umgebung $U(x_0)$ und eine positive Zahl δ mit

$$\operatorname{Re}[K_n(x,y)] \leq -\delta < 0 \qquad \forall x, y \in U(x_0) \cap \Omega.$$

Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U(x_0) \cap \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Re}\langle L_n f, f \rangle \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega \times \Omega} K_n(x,y) f(y) \overline{f(x)} dx dy \\ &= \operatorname{Re} \int_{U(x_0) \cap \Omega} \int_{U(x_0) \cap \Omega} K_n(x,y) \, dx dy \\ &\leq -\delta \cdot \int_{U(x_0) \cap \Omega} \int_{U(x_0) \cap \Omega} 1 \\ &= -\delta \cdot \mu_L (U(x_0) \cap \Omega)^2 \\ &\leq 0 \\ \rightsquigarrow \mu_L(U(x_0) \cap \Omega) &= 0 \end{aligned}$$

Widerspruch, weil dann Ω nicht lokal von positivem Maß.

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq K_n(x,x) = K(x,x) - \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{u_k(x)}{\mu_k} \right|^2 \\ \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{u_k(x)}{\mu_k} \right|^2 &\leq K(x,x), \end{aligned}$$

d.h. die Folge der Funktionen $\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{u_k(x)}{\mu_k} \right|^2$ ist beschränkt und wachsend. Damit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{u_k(x)}{\mu_k} \right|^2$ in jedem Punkte. Sei

$$M := \sup_{x\in\Omega} K(x,x) < \infty.$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{u_k(x)}{\mu_k} \right|^2 \leq M$$

für alle $x \in \Omega$. Betrachte das Cauchy-Restglied

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k} \right|^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k} \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k} \leq M \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k}$$

Bei festem x konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k}$. $\rightsquigarrow$ Bei festem x konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}$ gleichmäßig in $y \in \Omega$ und die Cauchy-Bedingung ist erfüllt.

Nach der letzten Folgerung gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| K_n(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k} \right|^2 dy \rightrightarrows 0.$$

Alle Funktionen sind stetig $\rightsquigarrow$

$$K(x,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k}$$

punktweise für alle $x \in \Omega$.

Dini-Lemma: ($\mu_k > 0$) Diese Konvergenz ist gleichmäßig.

Letztlich gilt:

$$\begin{aligned} \left| u_k(x)\overline{u_k(y)} \right| &\leq \frac{1}{2}\left(|u_k(x)|^2 + |u_k(y)|^2 \right) \\ \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k} \right| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k} \end{aligned}$$

Dann konvergiert

$$K^*(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k}$$

gleichmäßig auf $\Omega \times \Omega$. $\rightsquigarrow$ K^* ist stetig auf $\Omega \times \Omega$,

$$\int_\Omega |K(x,y) - K^*(x,y)|^2 \, dy = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

K ist stetig und Ω ist von lokal positivem Maß.

$$\rightsquigarrow K = K^*.$$

$\square$

6.3. Spektraldarstellung selbstadjungierter und unitärer Operatoren.

Motivation aus der linearen Algebra: $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ linear, $L = L^*$.

Dann existiert eine ON-Basis $e_1, e_2, \ldots, e_N$ in $\mathbb{C}^N$ mit $L(e_i) = \lambda_i e_i$, $\sigma(L) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Sei $P_i : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{C} \cdot e_i$, $P_i(x) = \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$. Dann gilt

$$L = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} \lambda \cdot P_\lambda \overset{??}{=} \int_{\sigma(L)} \lambda \cdot P_\lambda d\lambda$$

6.3.1. *Spektralmaße.*

	H	Hilbertraum
	$(\Omega, \mathcal{A})$	Menge Ω mit σ-Algebra $\mathcal{A}$.
Projektoren $\operatorname{Proj}(H)$	$\operatorname{Proj}(H)$	Menge aller Projektoren in H

$$\boxed{\operatorname{Proj}(H) = \left\{ P : H \to H \,\middle|\, P^2 = P \text{ und } P^* = P \right\}}$$

Spektralmaß **Definition 6.19.** Ein Spektralmaß ist eine Zuordnung

$$\boxed{E : \mathcal{A} \to \operatorname{Proj}(H)}$$

mit folgender Eigenschaft:

(1) Ist $x \in H$, so ist die Abbildung

$$\boxed{\mathcal{A} \ni A \mapsto E(A)x \in H \quad \sigma\text{-additiv}}$$

(2)

$$\boxed{E(\Omega) = \mathrm{Id}_H}$$

(3) Für alle Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt

$$\boxed{E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \cdot E(A_2)}$$

Lokalisierung von E *Bemerkung.* $E : \mathcal{A} \to \operatorname{Proj}(H)$ sei Spektralmaß. Sei $x \in H$ ein Vektor. Definiere dann

$$\boxed{E_x : \mathcal{A} \to [0, \infty)}$$

durch

$$\boxed{E_x(A) := \langle E(A)x, x \rangle}$$

Dann ist E_x ein gewöhnliches, endliches ($E_x(\Omega) = \|x\|^2$!) Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

E_x - Lokalisierung von E auf $x \in H$.

Beispiel. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$- Maßraum. $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Definiere $E : \mathcal{A} \to \operatorname{Proj}(H)$ durch

$$E(A) f := \chi_A \cdot f \qquad f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

$E(A) : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist Projektor ($E^2(A) = E(A)$, $E^*(A) = E(A)$).

$f \in H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Berechnen

$$\begin{aligned} E_f(A) &= \langle E(A) f, f \rangle_{L^2} = \langle \chi_A f, f \rangle_{L^2} = \int_A |f|^2 \, d\mu \\ \rightsquigarrow \frac{dE_f}{d\mu} &= |f|^2 \end{aligned}$$

Bemerkung. Gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so ist

$$0 = E(\emptyset) = E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \cdot E(A_2)$$

Dann projizieren $E(A_1)$ und $E(A_2)$ auf zueinander orthogonale Räume in H.

<u>Ziel</u>: Entwicklung einer Integrationstheorie:

Für jede <u>beschränkte</u>, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ soll ein Integral 14.01.2003

$$\int_\Omega f(\omega)\, dE(\omega) \in \mathcal{L}(H,H).$$

definiert werden.

(1) $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$

$$\boxed{\int_\Omega f(\omega)\, dE(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot E(A_i) \in \mathcal{L}(H,H)}$$

Satz 6.20. *f_1, f_2 seien einfache, $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen.*

(a)

$$\boxed{\int_\Omega (\alpha f_1 + \beta f_2)(\omega)\, dE(\omega) = \alpha \int_\Omega f_1(\omega)\, dE(\omega) + \beta \int_\Omega f_2(\omega)\, dE(\omega)}$$

(b)

$$\boxed{\left(\int_\Omega f_1(\omega)\, dE(\omega)\right)^* = \int_\Omega \overline{f_1(\omega)} dE(\omega)}$$

(weil $E(A_i)^* = E(A_i)$)

(c)

$$\boxed{\int_\Omega f_1(\omega) f_2(\omega)\, dE(\omega) = \left(\int_\Omega f_1(\omega)\, dE(\omega)\right) \cdot \left(\int_\Omega f_2(\omega)\, dE(\omega)\right)}$$

(d)

$$\boxed{\left\|\int_\Omega f(\omega)\, dE(\omega)\right\| \leq \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|}$$

(e)

$$\boxed{\left\langle \int_\Omega f(\omega)\, dE(\omega) \cdot x, x \right\rangle = \int_\Omega f(\omega)\, dE_x(\omega)}$$

Beweis. zu (c): f_1, f_2 seien zwei Treppenfunktionen. Stelle f_1, f_2 bzgl. einer gemeinsamen Zerlegung $\Omega = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n$ dar:

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \qquad f_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{A_j}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow f_1 \cdot f_2 &= \sum_{i=1}^{n} c_i d_i \chi_{A_i} \\ \int_\Omega (f_1 f_2)(\omega)\, dE(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} c_i d_i E(A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega f_1(\omega)\,dE(\omega)\right)\left(\int_\Omega f_2(\omega)\,dE(\omega)\right) &= \left(\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n d_j E(A_j)\right)\\
&= \sum_{i,j} c_i d_j \cdot E(A_i)\,E(A_j)\\
&= \sum_{i,j} c_i d_j \cdot E\underbrace{(A_i\cap A_j)}_{=\emptyset \text{ für } i\neq j}\\
&= \sum_{i=1}^n c_i d_i \cdot E(A_i)
\end{aligned}$$

zu (d): $f=\sum\limits_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$, $\Omega = A_1\dot\cup\ldots\dot\cup A_n$.

$$\left\|\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right\| = \sup_{\|x\|=1,x\in H}\left|\left\langle\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\,x,x\right\rangle\right|$$

$E(A_1)$, $E(A_2)$, $\ldots$ projizieren auf paarweise orthogonale Räume $W_1,W_2,\ldots,W_n\subset H$, weil $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$.

Sei $\|x\|=1$ und zerlege $x=x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{\text{rest}}$, $x_i\in W_i$ und $x_{\text{rest}}\perp W_1\oplus\ldots\oplus W_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\cdot x &= \sum_{i=1}^n c_i\cdot x_i\\
\rightsquigarrow\ \left\langle\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\,x,x\right\rangle &= \sum_{i=1}^n c_i\cdot\langle x_i,x\rangle = \sum_{i=1}^n c_i\cdot\|x_i\|^2\\
\left|\left\langle\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\,x,x\right\rangle\right| &\le \sum_{i=1}^n |c_i|\cdot \underbrace{\|x_i\|^2}_{\le 1,\text{ weil }\|x\|\le 1}\\
&\le \max_{1\le i\le n}(|c_i|)\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2}_{\le 1,\text{ weil }\|x\|\le 1}\\
\rightsquigarrow\ \sup_{\|x\|=1}\left|\left\langle\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\,x,x\right\rangle\right| &\le \max_{1\le i\le n}(|c_i|) = \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|
\end{aligned}$$

□

(2) $f:\Omega\to\mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-meßbar, beschränkt.

Stelle f als $f=f_1+i\cdot f_2$ dar. Dann sind $f_1,f_2:\Omega\to\mathbb{R}^1$ $\mathcal{A}$-meßbar und beschränkt.

$$\boxed{\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega) := \int_\Omega f_1(\omega)\,dE(\omega) + i\cdot\int_\Omega f_2(\omega)\,dE(\omega)}$$

D.h. es genügt $\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega)$ für eine beschränkte, $\mathcal{A}$-meßbare, reell-wertige Funktion zu definieren.

(3) $f:\Omega\to\mathbb{R}^1$ reellwertig, $\mathcal{A}$-meßbar, beschränkt. Bilde

$$\begin{aligned}
f_+(\omega) &:= \max(f(\omega),0)\\
f_-(\omega) &:= \max(-f(\omega),0)\\
f &= f_+ - f_-,
\end{aligned}$$

$f_\pm$ nichtnegative, $\mathcal{A}$-meßbare, beschränkte Funktionen

$$\boxed{\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega) := \int_\Omega f_+(\omega)\,dE(\omega) - \int_\Omega f_-(\omega)\,dE(\omega)}$$

D.h. es genügt $\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega)$ für jede nichtnegative, beschränkte, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $f:\Omega\to[0,\infty)$ zu definieren.

(4) $f:\Omega\to[0,\infty)$ sei nichtnegativ, $\mathcal{A}$-meßbar, beschränkt.

Lemma 6.21. *$f:\Omega\to[0,\infty)$ sei nicht-negativ, $\mathcal{A}$-meßbar, beschränkt. Es existiert eine Folge $f_n:\Omega\to[0,\infty)$ von Treppenfunktionen mit $0\le f_n\le f$ und $f_n\rightrightarrows f$.*

Beweis. Sei $[t]$ der ganzzahlige Anteil der Zahl $t\in\mathbb{R}^1$.

$$f_n(\omega) := \frac{1}{n}[n\cdot f(\omega)]$$

Es existiert eine Konstante $M>0$ mit

$$0\le f(\omega)\le M \qquad \forall\omega\in\Omega.$$

Damit hat $f_n(\omega)$ höchstens die Werte $\frac{1}{n}\cdot 0, \frac{1}{n}\cdot 1, \ldots, \frac{1}{n}\cdot[n\cdot M]\le M$ - endlich viele Werte!
Nach Definition von $[t]$:

$$\begin{aligned}
0 \le\ & n\cdot f(\omega)-[n\cdot f(\omega)] && \le 1\\
\rightsquigarrow 0 \le\ & f(\omega)-\tfrac{1}{n}[n\cdot f(\omega)] && \le \frac{1}{n}\\
\rightsquigarrow 0 \le\ & f(\omega)-f_n(\omega) && \le \frac{1}{n} \quad \forall\omega\in\Omega\\
\rightsquigarrow\ & \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)-f_n(\omega)| && \le \frac{1}{n}\\
\rightsquigarrow\ & f_n\rightrightarrows f
\end{aligned}$$

□

Integraldefinition: $f:\Omega\to[0,\infty)$ sei beschränkt und $\mathcal{A}$-meßbar.
Wähle $f_n \nearrow\!\!\nearrow f$ und f_n Treppenfunktionen

$$\left\|\int_\Omega f_n(\omega)\,dE(\omega)-\int_\Omega f_m(\omega)\,dE(\omega)\right\| \le \sup_{\omega\in\Omega}\underbrace{|f_n(\omega)-f_m(\omega)|}_{\text{hat die Cauchy-Eigenschaft}}$$

$\rightsquigarrow$ Die Folge der Operatoren $\int_\Omega f_n(\omega)\,dE(\omega):H\to H$ ist eine Cauchy-Folge.
$\mathcal{L}(H,H)$ ist ein vollständiger, normierter Raum

$$\boxed{\int_\Omega f(\omega)\,dE(\omega) := \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\,dE(\omega)}$$

(Grenzwert in $\mathcal{L}(H,H)$ bzgl. Operatornorm).

Satz 6.22. *Die Eigenschaften (a)-(e) des letzten Satzes (6.20) übertragen sich.*

Beispiel. $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$-Maßraum, $H=L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. $E:\mathcal{A}\to\operatorname{Proj}\left(L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)\right)$ sei definiert durch:

$$E(A)f=\chi_A\cdot f$$

Die Konstruktion liefert für jede beschränkte, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $g:\Omega\to\mathbb{C}$ einen Operator

$$\int_\Omega g(\omega)\,dE(\omega):L^2\to L^2.$$

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega \chi_A(\omega)\,dE(\omega)\right]f &= [E(A)]f=\chi_A\cdot f.\\
\rightsquigarrow \left[\int_\Omega g(\omega)\,dE(\omega)\right]f &= g\cdot f \qquad f\in L^2.
\end{aligned}$$

6.3.2. *Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren (stetiger Fall).*

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Satz 6.23. *$L : H \to H$ selbstadjungiert, stetig. $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^1$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^1$. Maßraum $(\sigma(L), \mathcal{B}(\sigma(L)))$.*

Dann existiert genau ein reguläres Spektralmaß $E : \mathcal{B}(\sigma(L)) \to \mathrm{Proj}(H)$ mit

$$\boxed{L = \int_{\sigma(L)} \lambda dE(\lambda)}$$

Ist $\dim H < \infty$, $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, so ist

$$L = \sum \lambda_i \mathrm{Proj}_{E_{\lambda_i}} = \sum \lambda_i E(\{\lambda_i\}) = \int_{\sigma(L)} \lambda dE(\lambda).$$

reguläres Spektralmaß

Definition 6.24. $A \subset \mathbb{R}^1$ Borel-Menge. $\mathcal{B}(A)$ σ-Algebra der Borelmengen in A. $E : \mathcal{B}(A) \to \mathrm{Proj}(H)$ Spektralmaß. E heißt <u>reguläres Spektralmaß</u>, falls

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{B}(A)\, \forall x \in H \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \text{ abg.}, O \text{ offen}, F \subset B \subset O \subset A : \quad \|E(Q)x\| < \varepsilon \quad \forall Q \subset O \setminus F}$$

$\sigma(P(L)) = P(\sigma(L))$

Satz 6.25. *Sei H komplexer Hilbert-Raum, $L : H \to H$ linear, stetig*

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \quad \textit{Polynom} \\ P(L) &= \sum_{i=1}^{n} a_i L^i \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\boxed{\sigma(P(L)) = P(\sigma(L))}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma(L)$. Dann hat $P(x) - P(\lambda)$ eine Nullstelle bei $x = \lambda$.

$$\rightsquigarrow P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda) Q_\lambda(x) = Q_\lambda(x)(x - \lambda).$$

Setze $x = L$:

$$P(L) - P(\lambda) \cdot \mathrm{Id} = (L - \lambda \mathrm{Id}) Q_\lambda(L) = Q_\lambda(L)(L - \lambda \mathrm{Id}).$$

Angenommen, $P(\lambda) \notin \sigma(P(L)) \rightsquigarrow [P(L) - P(\lambda)\mathrm{Id}]^{-1}$ existiert. $\rightsquigarrow L - \lambda\mathrm{Id}$ ist bijektiv, d.h. $\lambda \notin \sigma(L)$, Widerspruch. Also:

$$\lambda \in \sigma(L) \quad \rightsquigarrow \quad P(\lambda) \in \sigma(P(L)).$$

Umgekehrt: Sei $\mu \in \sigma(P(L))$. Betrachte $P(x) - \mu$. Zerlege dieses Polynom über $\mathbb{C}$

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n), \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Setze $x = L$:

$$P(L) - \mu \mathrm{Id}_H = a(L - \lambda_1 \mathrm{Id}) \cdots (L - \lambda_n \mathrm{Id}).$$

Angenommen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(L)$. Alle Operatoren $L - \lambda_i \mathrm{Id}$ sind invertierbar. $\rightsquigarrow P(L) - \mu\mathrm{Id}_H$ invertierbar $\rightsquigarrow$ Widerspruch zu $\mu \in \sigma(P(H))$.

Also existiert $\lambda_{i_0} \in \sigma(L)$. Setze $x = \lambda_{i_0}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(\lambda_{i_0}) - \mu &= 0 \\ \rightsquigarrow \mu &= P(\lambda_{i_0}), \quad \lambda_{i_0} \in \sigma(L) \\ \rightsquigarrow \mu &\in P(\sigma(L)). \end{aligned}$$

□

16.01.2003

Folgerung.

$$\|P(L)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(L)} |P(\lambda)|$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|P(L)\|^2 &= \sup_{x\in H,\|x\|=1} \|P(L)x\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle P(L)x, P(L)x\rangle \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle P^*(L)P(L)x, x\rangle \\
&= \|P^*(L)P(L)\| \\
&\overset{P^*(L)P(L)\text{ s.a.}}{=} \sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\sigma(P^*(L)P(L))\} \qquad P^*=\bar{P} \\
&= \sup\left\{\bar{P}(\lambda)P(\lambda)\,|\lambda\in\sigma(L)\right\} \\
&= \sup\left\{|P(\lambda)|^2\,|\lambda\in\sigma(L)\right\}
\end{aligned}$$

□

Beweis. (des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren 6.23)

$L: H\to H$ selbstadjungiert, $S := \sigma(L)\subset\mathbb{R}^1$ kompakt.

Betrachten den Banach-Raum $\mathcal{C}(S)$ mit der Supremumsnorm.

Sei $W\subset\mathcal{C}(S)$ der Teilraum der Polynome. Approximationssatz: W ist dicht in $\mathcal{C}(S)$.

Folgerung $\rightsquigarrow$

$$\|P(L)\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|P(x)\|_{\mathcal{C}(S)}.$$

$x,y\in H$ gegeben. Betrachten das Funktional $\Phi_{x,y}: W\to\mathbb{C}$

$$\Phi_{x,y}(P) := \langle P(L)x, y\rangle.$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_{x,y}(P)| &= |\langle P(L)x,y\rangle| \\
&\le \|P(L)x\|_H\cdot\|y\|_H \\
&\le \|P(L)\|_{\mathcal{L}(H,H)}\cdot\|x\|_H\cdot\|y\|_H \\
&= \|P(x)\|_{\mathcal{C}(S)}\cdot\|x\|_H\cdot\|y\|_H
\end{aligned}$$

Damit wird $\Phi_{x,y}: W\to\mathbb{C}$ stetig in der Supremumsnorm.

Weil $W\subset\mathcal{C}(S)$ dicht ist, existiert eine <u>stetige</u> Ausdehung $\Phi_{x,y}:\mathcal{C}(S)\to\mathbb{C}$.

Damit ist (nach Satz von Riesz, Maßtheorie)

$\Phi_{x,y}\in\mathcal{C}(S)\simeq\mathcal{C}_r^*(S) :=$ Raum aller regulären signierten komplexwertigen Borel-Maße auf S

$\rightsquigarrow$ Es existiert ein eindeutig bestimmtes reguläres Borelmaß

$$\mu(L,x,y) = \mu^1(L,x,y) + i\mu^2(L,x,y)$$

mit

$$\Phi_{x,y}(P(\lambda)) = \int_S P(\lambda)\,d\mu(L,x,y)(\lambda) \quad \forall P\in W$$

$$\begin{array}{ccccc}
W & \xrightarrow{\text{dicht}} & \mathcal{C}(S) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}_r^*(S) \\
\Phi_{x,y}: W\to\mathbb{C} & = & \Phi_{x,y}:\mathcal{C}(S)\to\mathbb{C} & = & \mu(L,x,y):\mathcal{C}(S)\to\mathbb{C} \\
P\mapsto\langle P(L)x,y\rangle & & P\mapsto\langle P(L)x,y\rangle & & P\mapsto\int_S P(\lambda)d\mu(L,x,y)(\lambda)
\end{array}$$

Also gilt:

$$\langle P(L)x,y\rangle = \int_S \underbrace{P(\lambda)\,d\mu(L,x,y)}_{\text{hat Sinn }\forall f\in\mathcal{C}(S)}(\lambda)$$

Sei

$$\beta(f,L,x,y) := \int_S f(\lambda)\,d\mu(L,x,y)(\lambda)$$

Sei $A \in \mathcal{B}(S)$ eine Borel-Menge in S. Dann ist $h_A : H \times H \to \mathbb{C}$ mit

$$h_A(x,y) := \mu(L,x,y)(A),$$

eine hermitische Form:

Wir haben für <u>jedes</u> Polynom:

$$\begin{aligned}
\int_S P(\lambda)\,d\mu(L,\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)(\lambda) &= \langle P(L)(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2),y\rangle \\
&= \alpha_1\langle P(L)x_1,y\rangle + \alpha_2\langle P(L)x_2,y\rangle \\
&= \int_S P(\lambda)\{\alpha_1 d\mu(L,x_1,y)+\alpha_2 d\mu(L,x_2,y)\}(\lambda)
\end{aligned}$$

Das signierte Borelmaß $\alpha_1\mu(L,x_1,y)+\alpha_2\mu(L,x_2,y)$ gehört zum Punkt $(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \alpha_1\mu(L,x_1,y)+\alpha_2\mu(L,x_2,y) &= \mu(L,\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y) \\
\rightsquigarrow \alpha_1h_A(x_1,y)+\alpha_2h_A(x_2,y) &= h_A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)
\end{aligned}$$

<u>Analog</u>: $h_A(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2) = \bar{\alpha}_1h_A(x,y_1)+\bar{\alpha}_2h_A(x,y_2)$.

Weiterhin gilt:[4]

$$|h_A(x,y)| = |\mu(L,x,y)(A)| \leq \operatorname{var}(\mu(L,x,y)) = \|\Phi_{x,y}\|_{\mathcal{C}(S)} \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

$\rightsquigarrow h_A : H\times H \to \mathbb{C}$ ist eine stetige, hermitische Form. $A \in \mathcal{B}(S)$

Damit existiert ein Operator

$$E(A) : H \to H$$

mit

$$h_A(x,y) = \langle E(A)x,y\rangle \quad \forall x,y \in H.$$
$$\mathcal{B}(S) \ni A \mapsto E(A) : H \to H.$$

<u>Zu zeigen</u>: $E(A)$ sind Projektoren und E ist Spektralmaß.

$E(A)$ ist ein Projektor ($(E(A))^* = E(A)$ und $E(A)\circ E(A) = E(A)$):

- $(E(A))^* = E(A)$: Betrachte

$$\begin{aligned}
\int_S P(\lambda)\,d\mu(L,x,y)(\lambda) &= \langle P(L)x,y\rangle_H \\
&\overset{\substack{L=L^*\\ P\in\mathbb{R}[X]}}{=} \langle x,P(L)y\rangle_H \\
&= \overline{\langle P(L)y,x\rangle}_H \\
&= \overline{\int_{S\subset\mathbb{R}^1} P(\lambda)\,d\mu(L,y,x)(\lambda)} \\
&= \int_S P(\lambda)\,\overline{d\mu(L,y,x)}(\lambda) \\
\rightsquigarrow \mu(L,x,y) &= \overline{\mu(L,y,x)} \\
\rightsquigarrow h_A(x,y) &= \overline{h_A(y,x)} \\
\rightsquigarrow \langle E(A)x,y\rangle &= \overline{\langle E(A)y,x\rangle} = \langle x,E(A)y\rangle \quad \forall x,y\in H \\
\rightsquigarrow (E(A))^* &= E(A)
\end{aligned}$$

---

[4]

$$\|\Phi_{x,y}\|_{\mathcal{C}(S)} = \sup_{P\in W}\frac{|\Phi_{x,y}(P)|}{\|P\|_{\mathcal{C}(S)}} = \sup_{P\in W}\frac{|\langle Px,y\rangle|}{\|P\|_{\mathcal{C}(S)}} \overset{\text{CSU}}{\leq} \sup_{P\in W}\frac{\|P(x)\|_{\mathcal{C}(S)}\cdot\|x\|\cdot\|y\|}{\|P(x)\|_{\mathcal{C}(S)}} = \|x\|\cdot\|y\|$$

- $E(A) \circ E(A) = E(A)$: P und Q seien Polynome mit reellen Koeffizienten. Berechne

$$\begin{aligned}\int_S P(\lambda)\, d\mu(L, x, Q(L)y) &= \langle P(L)x, Q(L)y\rangle \\ &\overset{\substack{L^*=L \\ Q\in\mathbb{R}[X]}}{=} \langle Q(L)P(L)x, y\rangle \\ &= \int_S P(\lambda)\cdot Q(\lambda)\, d\mu(L, x, y)\end{aligned}$$

Damit gilt für die Radon-Nikodym-Ableitung:

$$\frac{d\mu(L, x, Q(L)y)}{d\mu(L, x, y)} = Q(\lambda) \tag{6.6}$$

Fixiere $A \in \mathcal{B}(S)$ und betrachte

$$\begin{aligned}\int_S P(\lambda)\, d\mu(L, E(A)x, y) &= \langle P(L)E(A)x, y\rangle \\ &\overset{\substack{L=L^* \\ P\in\mathbb{R}[X]}}{=} \langle E(A)x, P(L)y\rangle \\ &= h_A(x, P(L)y) \\ &= \mu(L, x, P(L)y)(A) \\ &= \int_S \chi_A(\lambda)\, d\mu(L, x, P(L)y) \\ &\overset{(6.6)}{=} \int_S \chi_A(\lambda)\, P(\lambda)\, d\mu(L, x, y)\end{aligned}$$

<u>Also gilt</u>:

$$\frac{d\mu(L, E(A)x, y)}{d\mu(L, x, y)} = \chi_A \tag{6.7}$$

Seien nun $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S)$, so gilt:

$$\begin{aligned}\langle E(A_1)E(A_2)x, y\rangle &= h_{A_1}(E(A_2)x, y) \\ &= \mu(L, E(A_2)x, y)(A_1) \\ &= \int_S \chi_{A_1}(\lambda)\, d\mu(L, E(A_2)x, y)(\lambda) \\ &\overset{(6.7)}{=} \int_S \chi_{A_1}(\lambda)\,\chi_{A_2}(\lambda)\, d\mu(L, x, y)(\lambda) \\ &= \int_S \chi_{A_1\cap A_2}(\lambda)\, d\mu(L, x, y)(\lambda) \\ &= h_{A_1\cap A_2}(x, y) \\ &= \langle E(A_1\cap A_2)x, y\rangle \qquad \forall x, y \in H\end{aligned}$$

Damit folgt $E(A_1)\cdot E(A_2) = E(A_1 \cap A_2)$.
Für $A_1 = A_2$ folgt $E(A)^2 = E(A)$. $\rightsquigarrow$ Alle Operatoren $E(A)$ sind Projektoren.
Weiterhin ist eine der Eigenschaften für Spektralmaße gezeigt.

- Berechnung von $E(S)$:

$$\begin{aligned}\langle E(S)x, y\rangle &= h_S(x, y) = \mu(L, x, y)(S) = \int_S 1\cdot d\mu(L, x, y) = \langle \mathrm{Id}_H \cdot x, y\rangle \\ \rightsquigarrow E(S) &= \mathrm{Id}_H\end{aligned}$$

- σ-Additivität von $E(A)$ folgt aus der σ-Additivität der Maße $\mu(L, x, y)$ direkt.

<u>Konsequenz</u>: Es wurde ein Spektralmaß konstruiert.

$$E : \mathcal{B}(S) \to \mathrm{Proj}(H).$$

Zu zeigen: $L = \int_S \lambda dE(\lambda)$

$$\left\langle \int_S P(\lambda)\, dE(\lambda)\, x, y \right\rangle = \int_S P(\lambda)\, dE_{x,y}(\lambda) \text{ mit } E_{x,y}(A) = \langle E(A)\, x, y\rangle \qquad \text{(allgemein)}$$

Nach unserer Konstruktion gilt jedoch:

$$\langle P(L)\, x, y\rangle = \int P(\lambda)\, d\mu(L, x, y)(\lambda)$$

Aber:

$$E_{x,y}(A) = \langle E(A)\, x, y\rangle = h_A(x, y) = \mu(L, x, y)(A).$$

$$\begin{aligned} \left\langle \int_S P(\lambda)\, dE(\lambda)\, x, y \right\rangle &= \int_S P(\lambda)\, dE_{x,y}(\lambda) = \int_S P(\lambda)\, d\mu(L, x, y)(\lambda) = \langle P(L)\, x, y\rangle \\ \rightsquigarrow P(L) &= \int_S P(\lambda)\, dE(\lambda) \qquad \text{für alle Polynome} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit von E folgt aus dem Satz von Riesz.

□

Funktionen von Operatoren:

$\mathcal{M}(S)$ Sei $f : S = \sigma(L) \to \mathbb{C}$ Borel-meßbar, beschränkt, d.h. $f \in \mathcal{M}(S)$

$$f(L) := \int_S f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

wird ein wohl-definierter, stetiger Operator in H. Durch

$$f \mapsto f(L)$$

entsteht eine Abbildung

$$\mathcal{C}(S) \to \mathcal{L}(H, H)$$

bei vorgegeben selbstadjungierten Operator L und $S = \sigma(L)$. Bzw. eine Einbettung

$$\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{M}(S) \hookrightarrow \mathcal{L}(H, H).$$

21.01.2003 6.3.3. *Der Spektralsatz für unitäre Operatoren.*

Sei H ein Hilbert-Raum, $L : H \to H$ ein linearer stetiger Operator.

unitärer Operator **Definition 6.26.** $L : H \to H$ heißt unitär , falls

$$\boxed{L^{-1} = L^*}$$

L unitär $\rightsquigarrow$ $\sigma(L) \subset S^1$ **Satz 6.27.** *Sei L unitär. Dann ist*

$$\boxed{\sigma(L) \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$$

Wegen $S^1 \cong \{0 \le t \le 2\pi\}$ erhalten wir folgende

Folgerung. Sei L unitär.

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu t} \qquad \text{trigonometrisches Polynom}, t \in [0, 2\pi) \\ P(L) &= \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu L^\nu \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\boxed{P(\sigma(L)) = \sigma(P(L))}$$

Beweis. Analog zum selbstadjungierten Fall. □

Satz 6.28. *(Spektralsatz für unitäre Operatoren) Sei H ein Hilbert-Raum, $L : H \to H$ ein unitäre Operator mit $\sigma(L) \subset S^1$. Dann existiert genau ein Borel-Spektralmaß E derart, daß* Spektralsatz unitäre Operatoren

$$\boxed{L = \int_{\sigma(L)} \lambda dE(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{it} dE(t)}$$

Beweis. Sei $S = \sigma(L), \mathcal{C}(S)$ Banach-Raum aller stetigen Funktionen $f : S \to \mathbb{R}^1$, W sei die Menge der trigonometrischen Polynome.

Abermals folgt nach Stone-Weierstrass, daß $W \subset \mathcal{C}(S)$ dicht ist (W trennt Punkte!). Anwendung der Riesz-Sätze liefert dann, analog zum selbstadjungierten Fall, die Behauptung.

□

Bemerkung. Ein Operator $L : H \to H$ heißt normal, falls normaler Operator

$$\boxed{L^* L = L L^*}$$

Dann gilt ein entsprechender Spektralsatz.

Folgerung. Sei H ein komplexer Hilbert-Raum, $L : H \to H$ ein unitärer Operator. Dann $\exists! A : H \to H$ selbstadjungiert derart, daß $L = e^{iA}$, A selbstadj.

$$\boxed{L = e^{iA} = \cos A + i \sin A}$$

Beweis. Nach dem Spektralsatz $\exists!\ E : B(\sigma(L)) \to \mathrm{Proj} H$:

$$L = \int_{\sigma(L) \subset [0,2\pi)} e^{it} dE(t) = \int_{\sigma(L)} \cos t dE(t) + i \int_{\sigma(L)} \sin t dE(t)\,. \tag{6.8}$$

Setze dann

$$A := \int_{\sigma(L) \subset [0,2\pi)} t dE(t)\,.$$

Dann ist $A^* = A$, und mittels des üblichen Funktionalkalküls folgt $L = \cos A + i \sin A$ vermöge (6.8). Bemerke, daß t meßbar und beschränkt ist. □

Beispiel. $H = \mathbb{C}^n$.

$$U(n) = \left\{ A \,\middle|\, A^* = A^{-1} \right\}$$

die Menge der unitären Matrizen,

$$\underline{u}(n) = \{ iA \,|\, A^* = A \}\,.$$

Nach obiger Folgerung ist dann

$$\exp : \underline{u}(n) \to U(n)$$

surjektiv.

6.3.4. *Die Gruppe* $\mathrm{GL}(H)$. $\mathrm{GL}(H)$

Zur Erinnerung: $\mathrm{GL}(H) = \{L : H \to H \text{ stetig, bijektiv}\}$, H ein Hilbert-Raum.

Bekannt ist: $\mathrm{GL}(H) \subset \mathcal{L}(H, H)$ ist eine offene Teilmenge, topologische Gruppe.

Frage: Wann ist $\mathrm{GL}(H)$ zusammenhängend?

Beispiel. $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$, (d.h. $H = \mathbb{R}$) ist nicht zsh. ($\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$), aber $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend!

Satz 6.29. *Sei H ein komplexer Hilbert-Raum. Dann ist $\mathrm{GL}(H)$ zusammenhängend.* $\mathrm{GL}(H)$ zusammenhängend

Als Vorbereitung benötigen wir folgenden

Satz 6.30. *(Polarzerlegung in $\mathrm{GL}(H)$) Sei $L \in \mathrm{GL}(H)$. Dann existieren zwei Operatoren $U, S : H \to H$ derart, daß U unitär ist, S selbstadjungiert und positiv (also invertierbar), und* Polarzerlegung

$$\boxed{L = U \circ S}$$

Beweis. Sei $L \in \mathrm{GL}(H)$, L^* dessen adjungierter Operator. Dann ist L^*L selbstadjungiert und positiv, denn

$$\langle L^*Lx, x\rangle = \langle Lx, Lx\rangle > 0$$

für $x \in H, x \neq 0$. Damit ist L^*L invertierbar! Zudem ist $\sigma(L^*L) \subset (0, \infty)$ und wir definieren

$$S := \sqrt{L^*L} = \int_{\sigma(L^*L)} \sqrt{t} dE_{L^*L}(t),$$

wobei E_{L^*L} das Spektralmaß von L^*L ist. S ist ebenfalls selbstadjungiert, positiv, also invertierbar und man setzt

$$U = L \circ S^{-1}.$$

Zeige, daß U unitär ist: Man berechnet

$$\begin{aligned} UU^* &= \left(L \circ S^{-1}\right)\left(L \circ S^{-1}\right)^* \\ &= \left(L \circ S^{-1}\right)\left(S^{-1}\right)^* \circ L^* \\ &= L \circ \left(S^{-2}\right)^* \circ L^* \\ &= L \circ (L^*L)^{-1} \circ L^* \\ &= L \circ L^{-1} \circ (L^*)^{-1} \circ L^* \\ &= \mathrm{Id}_H. \end{aligned}$$

□

Beweis. (von Satz 6.29) Wir wissen, daß $\mathrm{GL}(H, H) \subset \mathcal{L}(H, H)$ eine offene Teilmenge ist.

Zu konstruieren ist ein Weg $\gamma(t)$ von Id_H nach $L \in \mathrm{GL}(H)$, $0 \leq t \leq 1$, derart, daß $\gamma(t) \in \mathrm{GL}(H)$ $\forall 0 \leq t \leq 1$.

Sei

$$L = U \circ S$$

die Polarzerlegung von L nach Satz 6.30. U ist unitär, so daß nach der Folgerung zu Satz 6.28 genau ein A selbstadjungiert existiert mit

$$U = e^{iA}.$$

Definiere dann

$$\gamma(t) := e^{itA} \circ ((1-t)\mathrm{Id}_H + t \cdot S) =: \mathrm{I} \circ \mathrm{II}$$

Dann ist

$$\gamma(0) = \mathrm{Id}_H \quad \text{und} \quad \gamma(1) = e^{iA} \circ S = U \circ S = L.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\gamma(t) \in \mathrm{GL}(H)$ $\forall 0 \leq t \leq 1$.

II ist positiv, sowie selbstadjungiert $\rightsquigarrow$ II ist invertierbar!

Weiter gilt

$$\mathrm{I}{=}e^{itA} = \int_{\sigma(A)\subset\mathbb{R}^1} e^{it\lambda} dE_A(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \underbrace{(\cos(t\lambda) + i\sin(t\lambda))}_{F_\lambda(t)} dE_A(\lambda)$$

$(F_\lambda(t))^{-1}$ ist stetig auf $\sigma(A)$, d.h. wir können

$$F(t) = \int_{\sigma(A)} (\cos(t\lambda) + i\sin(t\lambda))^{-1} dE_A(\lambda)$$

schreiben. Nach Konstruktion ist

$$F(t) \circ \mathrm{I} = \mathrm{Id}_H,$$

nach allgemeinem Funktionalkalkül.

Da weiter II invertierbar ist, folgt, daß $\gamma(t) \in \mathrm{GL}(H)$ $\forall 0 \leq t \leq 1$.

□

7. Fredholm-Operatoren

Zur Erinnerung (Def. 5.11): Seien X, Y zwei Banach-Räume, $L \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist L Fredholm-Operator $\Leftrightarrow$ $\dim\ker L < \infty$, $L(X)$ abg., $\dim(Y/L(X)) < \infty$

$$\boxed{\mathrm{Ind}L := \dim\ker L - \dim\mathrm{co}\ker L}$$

Fred (H,H)

$$\boxed{\mathrm{Fred}\,(H,H) := \{L \in \mathcal{L}(H,H)\,|L \text{ ist Fredholm}\}}$$

Bereits gezeigt wurde (Satz 5.13), daß $\mathrm{Id}_H - K$, K kompakt, Fredholm ist.

Ziel ist es, für H <u>komplexer</u> Hilbert-Raum, zu zeigen, daß

$$\mathrm{Ind}: \ \mathrm{Fred}\,(H,H) \to \mathbb{Z}$$

die Zusammenhangskomponenten klassifiziert.

Satz 7.1. *Seien X, Y zwei Banach-Räume, $L : X \to Y$ ein stetiger Operator mit $\dim\mathrm{co}\ker L < \infty$. Dann ist $\mathrm{Im}L$ abgeschlossen ist.*

Beweis. $\ker L = \{x \in X\,|Lx = 0\}$ ist abgeschlossen $\rightsquigarrow$ $X/\ker L$ ist ein Banach-Raum. Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{kan. Proj.}"'] & \mathrm{Im}L \subset Y \\ X/\ker L \arrow[r, equal] & X/\ker L \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd} \qquad S[x] = Lx$$

Dann ist S stetig und bijektiv. Wähle nun ein Komplement W in Y zu $\mathrm{Im}L$, d.h.

$$W \cap \mathrm{Im}L = 0 \quad \text{und} \quad W \oplus \mathrm{Im}L = Y$$

Dann ist

$$W \simeq Y/\mathrm{Im}L,$$

also W ist endlich-dimensional nach Voraussetzung, also abgeschlossen. Definiere nun

$$\hat{S} : X/\ker L \oplus W \to Y, \qquad ([x], w) \mapsto Lx + w$$

Dann ist $\hat{S}$ ein stetiger Isomorphismus von Banach-Räumen! Nach dem Satz von Banach ist dann $\hat{S}$ ein Homöomorphismus, d.h. $\hat{S}^{-1}$ ist stetig. Da

$$\hat{S}^{-1}(\mathrm{Im}L) = X/\ker L \oplus \{0\}$$

und $X/\ker L \oplus \{0\}$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung.

□

Satz 7.2. *Sei $L : X \to Y$ Fredholm, $L^* : Y^* \to X^*$ dessen adjungierte (duale) Operator. Dann ist L^* ebenfalls Fredholm und* $\mathrm{Ind}L^* = -\mathrm{Ind}L$

$$\boxed{\mathrm{Ind}L^* = -\mathrm{Ind}L}.$$

Folgerung. Sei H Hilbert-Raum, $L \in L(H)$ Fredholm und selbstadjungiert. Dann ist $\mathrm{Ind}L = 0$. L selbstadj. $\rightsquigarrow \mathrm{Ind}L = 0$

Beweis. Es ist $(L^*\xi)(x) = \xi(Lx)$, $\xi \in Y^*$, $x \in X$, so daß 23.01.2003

$$\ker L^* = \{\xi \in Y^*\,|L^*\xi = 0\} = \{\xi \in Y^*\,|\xi(Lx) = 0 \forall x \in X\} =: \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Im}L)$$

Definiere

$$V := \{y \in Y\,|\xi(y) = 0 \forall \xi \in \ker L^*\}$$

Offenbar ist $\mathrm{Im}L \subset V$, und die Elemente von $\ker L^*$ sind bereits vollständig durch ihre Einschränkung auf Y/V bestimmt, d.h.

$$\ker L^* \cong (Y/V)^*.$$

Zeige, daß $V = \mathrm{Im}L$! Schreibe

$$V = \{y \in Y \mid \nexists \xi \in Y^* : \xi|_{\mathrm{Im}L} = 0, \xi(y) \neq 0\}$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach (siehe Folgerung aus der VL) gilt $V \subset \overline{\mathrm{Im}L}$. Aber $\mathrm{Im}L$ ist abgeschlossen! $\rightsquigarrow V = \mathrm{Im}L$.

D.h. wir erhalten

$$\ker L^* \cong (Y/V)^* = \underbrace{(Y/\mathrm{Im}L)^*}_{\mathrm{co}\ker L} \cong (Y/\mathrm{Im}L)\,.$$

Also ist $\dim\ker L^* = \dim \mathrm{co}\ker L$.

Ähnlich zeigt man $\dim \mathrm{co}\ker L^* = \dim\ker L$.

□

Satz 7.3.

Parametrix

(1) *Sei $L : X \to Y$ Fredholm, X, Y Banach-Räume. Dann existiert ein Operator $S : Y \to X$ derart, daß*

$$S \circ L - \mathrm{Id}, \quad L \circ S - \mathrm{Id}$$

endlich-dimensionale Operatoren sind. Zudem ist $S \in \mathrm{Fred}(X, Y)$,

$$\mathrm{Ind}S = -\mathrm{Ind}L.$$

S heißt Parametrix von L.

(2) *Sei $L : X \to Y$ ein stetiger Operator. Falls zwei Operatoren $S, S' : Y \to X$ derart existieren, daß*

$$S \circ L - \mathrm{Id}, \quad L \circ S' - \mathrm{Id}$$

kompakt sind, so ist L Fredholm.

Bemerkung. $X = Y$, $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ ist eine Algebra sowie ein Ideal. Betrachte

$$\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$$

Ist $[L] \in \mathrm{Fred}(X)/\mathcal{K}(X)$, so definiert die zu L gehörige Parametrix S das Inverse von $[L]$, d.h.

$$[L]^{-1} = [S]\,.$$

Beweis.

(2)**:** Angenommen, S, S' sind wie angegeben. Dann sind $S \circ L$, $L \circ S'$ Fredholm (Satz 5.13: $\mathrm{Id} - K \in \mathrm{Fred}(X, Y)$ für K kompakt). Es ist weiter

$$X \xrightarrow{L} Y \xrightarrow{S} X, \quad \text{so daß} \quad \ker(L) \subset \ker(L \circ S)\,,$$

also $\dim\ker L < \infty$, sowie

$$Y \xrightarrow{S'} X \xrightarrow{L} Y, \quad \text{so daß} \quad Y/\mathrm{Im}L \subset Y/\mathrm{Im}(S' \circ L)\,,$$

also $\dim \mathrm{co}\ker L < \infty$.

(1)**:** Allgemein gilt (Lemma 5.12, Konsequenz aus Hahn-Banach): Ist M ein endlicher dimensionaler Teilraum eines normierten Raumes X, so hat M ein abgeschlossenes Komplement N und

$$X = M \oplus N.$$

Sei also $L : X \to Y$ Fredholm. Dann können Banach-Räume V, W so gewählt werden, so daß

$$Y = \mathrm{Im}L \oplus \underbrace{W}_{\substack{\cong Y/\mathrm{Im}L, \\ \text{also endl.dim.}}} \quad \text{und} \quad X = \underbrace{\ker L}_{\text{endl.dim}} \oplus V.$$

Dann ist

$$L|_V : V \to \mathrm{Im}L$$

ein stetiger Isomorphismus, also nach dem Satz 3.13 von Banach ein Homöomorphismus, so daß $(L|_V)^{-1}$ stetig ist. Definiere dann die Parametrix gemäß

$$S := \begin{cases} (L|_V)^{-1} & \text{auf } \mathrm{Im}L \\ 0 & \text{auf } W \end{cases}$$

Dann ist S stetig und Fredholm, denn $\ker S = W$, $\operatorname{co}\ker S = V$.

$$\rightsquigarrow \mathrm{Ind}S = \underbrace{\dim W}_{\dim(Y/\mathrm{Im}L)} - \dim\ker L = -\mathrm{Ind}L$$

$S \circ L - \mathrm{Id}_X$ ist Projektor auf $\ker L \rightsquigarrow$ endlich dimensionaler Operator.

$L \circ S - \mathrm{Id}_X$ ist Projektor auf $W \rightsquigarrow$ endlich dimensionaler Operator.

$\square$

Folgerung. Ist $L \in \mathrm{Fred}\,(X,Y)$. $K \in \mathcal{L}\,(X,Y)$ kompakt, so ist $L + K \in \mathrm{Fred}\,(X,Y)$.

Beweis. Sei S eine Parametrix von L. Dann ist

$$(L+K)\circ S - \mathrm{Id} = \underbrace{L\circ S - \mathrm{Id}}_{\text{endl.-dim.}} + \underbrace{K\circ S}_{\text{kompakt}} \in \mathcal{K} \quad \text{und} \quad S\circ(L+K) - \mathrm{Id} \in \mathcal{K},$$

so daß nach Satz 7.3 die Behauptung folgt. $\square$

Satz 7.4. *Die Menge der Fredholm-Operatoren* $\mathrm{Fred}\,(X,Y)$ *ist offen in* $\mathcal{L}\,(X,Y)$. Fred (X,Y) offen

Beweis. Sei $L : X \to Y$ Fredholm, S Parametrix von L. Sei $L' \in \mathcal{L}\,(X,Y)$ mit $\|L - L'\| < \|S\|^{-1}$. Dann gilt

$$\|S\circ(L-L')\| \le \|S\| \circ \|L - L'\| < 1.$$

Aber

$$r\,(S\circ(L-L')) \le \|S\circ(L-L')\| < 1$$

$\rightsquigarrow$ 1 liegt in der Resolventenmenge ! D.h.

$$B := (-S\circ(L-L') + \mathrm{Id})^{-1}$$

existiert. Setze

$$S' := B \circ S.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S'\circ L' &= B\circ S\circ L' \\ &= B\circ S\circ(L-(L-L')) \\ &= \underbrace{B}_{\text{Homöom.}} \circ \left(\underbrace{S\circ L - \mathrm{Id}}_{\text{kompakt}} + \mathrm{Id} - S\circ(L-L')\right) \\ &= B\circ(S\circ L - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id} \\ &= \text{komp. Op.} + \mathrm{Id} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow S'$ ist linksseitige Parametrix von L'.

Analog konstruiert man die rechtsseitige Parametrix von L'.

$\square$

Satz 7.5. *Sei* $L : X \to Y$ *Fredholm,* $L' \in \mathcal{K}\left(L, \|S\|^{-1}\right)$, *$S$ Parametrix, so ist*

$$\boxed{\mathrm{Ind}L = \mathrm{Ind}L'}$$

Lemma 7.6. *Seien* $X \xrightarrow{L_2} Y \xrightarrow{L_1} Z$, *$L_1, L_2$ Fredholm. Dann ist $L_1 \circ L_2$ wieder Fredholm, und* Ind $(L_1\circ L_2) =$ Ind (L_1) + Ind (L_2)

$$\boxed{\mathrm{Ind}\,(L_1\circ L_2) = \mathrm{Ind}L_1 + \mathrm{Ind}L_2}$$

Beweis. (des Satzes 7.5) Aus dem Beweis des Satzes 7.4 folgt, daß $S' \circ L' - \mathrm{Id}$ kompakt ist. $\rightsquigarrow$ $S' \circ L'$ ist Fredholm,

$$\mathrm{Ind}\,(S' \circ L') = 0.$$

Weiter ist L' Fredholm und $S' = B \circ S$ ebenfalls, da B bijektiv, stetig. Nach Lemma 7.6 ist dann

$$0 = \mathrm{Ind}\,(S \circ L') = \underbrace{\mathrm{Ind}S'}_{=\mathrm{Ind}S = -\mathrm{Ind}L} + \mathrm{Ind}L' \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}L' = \mathrm{Ind}L.$$

□

Beweis. (des Lemmas 7.6) $L_1 \circ L_2$ ist Fredholm (Übung). Z.z.: $\mathrm{Ind}\,(L_1 \circ L_2) = \mathrm{Ind}L_1 + \mathrm{Ind}L_2$.

Sei

$$0 \xrightarrow{L_0} A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{L_2} C \xrightarrow{L_3} 0$$

eine exakte Sequenz von Vektorräumen, d.h.

$$\ker L_i = \mathrm{Im}L_{i-1},$$

$A \subset B \rightsquigarrow \ker L_2 = i\,(A)$

$$\rightsquigarrow B/A = B/\ker L_2 \cong C$$

Betrachte nun die exakten Sequenzen

$$0 \to \ker L_1 \hookrightarrow \ker\,(L_2 \circ L_1) \xrightarrow{L_1} \ker L_2 \cap L_1\,(X) \to 0$$

$$0 \to L_2\,(Y)\,/\,(L_2 \circ L_1\,(X)) \hookrightarrow \underbrace{Z/\,(L_2 \circ L_1\,(X))}_{=\mathrm{co}\ker L_2 \circ L_1} \to \underbrace{Z/L_2\,(Y)}_{\mathrm{co}\ker L_2} \to 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}L_2 \circ L_1 &= \dim\ker L_2 \circ L_1 - \mathrm{co}\ker L_2 \circ L_1 \\ &= \dim\ker L_1 - \dim\mathrm{co}\ker L_2 + \dim\,(\ker L_2 \cap L_1\,(X)) - \dim\,(L_2\,(Y)\,/\,(L_2 \circ L_1\,(X))) \end{aligned}$$

Betrachte weitere exakte Sequenz

$$0 \to \ker L_2 \cap L_1\,(X) \hookrightarrow \ker L_2 \to \ker L_2/\,(\ker L_2 \cap L_1\,(X)) \to 0$$

Dann folgt

$$\mathrm{Ind}L_2 \circ L_1 = \mathrm{Ind}L_2 + \dim\ker L_1 \underbrace{- \dim\ker L_2/\,(\ker L_2 \cap L_1\,(X)) - \dim L_2\,(Y)\,/L_2 \circ L_1\,(X)}_{\alpha}.$$

Aber

$$\dim\mathrm{co}\ker L_1 = -\alpha,$$

und die Behauptung folgt.

□

Satz 7.7. *Die Index-Funktion ist auf den Zusammenhangskomponenten von* $\mathrm{Fred}\,(X)$ *eine Klassifizierung, d.h. ist* L_t, $0 \le t \le 1$, *ein Weg von* L_0 *nach* L_1 *in* $\mathrm{Fred}\,(X)$, *so ist* $\mathrm{Ind}L_0 = \mathrm{Ind}L_1$.

Beweis. Sei $L \in \mathrm{Fred}\,(X)_{\mathrm{comp}}$. Setze

$$A := \{L' \in \mathrm{Fred}\,(X)\,|\mathrm{Ind}L' = \mathrm{Ind}L\}.$$

Dann gilt

(1) A ist abgeschlossen,
(2) A ist offen in $\mathrm{Fred}\,(X)_{\mathrm{comp}}$ in Folge des Satzes 7.5.

$$\rightsquigarrow A = \mathrm{Fred}\,(X)_{\mathrm{comp}}$$

□

Korollar 7.8. *Ist* $L \in \operatorname{Fred}(X,Y)$, $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, *so ist*

$$\boxed{\operatorname{Ind}(L+K) = \operatorname{Ind} L}$$

Beweis. Es ist $L + tK$, $0 \le t \le 1$, ein Weg in $\operatorname{Fred}(X,Y)$, der $L+K$ und L verbindet. □

Lemma 7.9. *Seien* H_1, H_2 *Hilbert-Räume,* $L : H_1 \to H_2$ *Fredholm-Operator mit* $\operatorname{Ind} L \ge 0$. *Dann existiert für jeden Unterraum* $G_1 \subset H_1$ *mit* $\dim G_1 = \operatorname{Ind} L$ *ein Fredholm-Operator* $L_1 : H_1 \to H_2$ *mit* 28.1.2003

(1) L_1 *ist surjektiv (d.h.* $\operatorname{co}\ker$ *ist trivial)*
(2) $G_1 = \ker L_1$.

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &\le \operatorname{Ind}(L) = \dim\ker(L) - \dim(\operatorname{Im} L)^\perp \\ \rightsquigarrow \dim(\operatorname{Im} L)^\perp &\le \dim\ker(L) \qquad \text{endl.-dim. VR} \end{aligned}$$

Wähle im VR $\ker(L)$ einen Teilraum $G \subset \ker L$ mit

$$\dim(G) = \dim(\operatorname{Im} L)^\perp$$

sowie einen Isomorphismus

$$\tilde{U} : G \tilde{\to} (\operatorname{Im} L)^\perp, \qquad G \subset \ker L \subset H_1$$

Betrachte

$$U = \tilde{U} \circ \operatorname{Proj}_G : H_1 \to H_2$$

U ist ein endlich-dimensionaler Operator. Betrachte

$$L + t \cdot U : H_1 \to H_2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

Alle Operatoren $L + t \cdot U$ sind Fredholm.

$L + U : H_1 \to H_2$ ist surjektiv:

$$\begin{aligned} L + U \Big|_{(\ker L)^\perp} &= L && \leftrightarrow \operatorname{Im}(L) \\ L + U \,|_{\ker L} &= U && \leftrightarrow \operatorname{Im}(L)^\perp \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}(L+U) &= \operatorname{Ind}(L) \\ \rightsquigarrow \dim\ker(L+U) - \underbrace{\dim\operatorname{co}\ker(L+U)}_{0} &= \operatorname{Ind}(L) \\ \rightsquigarrow \dim\ker(L+U) &= \operatorname{Ind}(L) = \dim(G_1) \end{aligned}$$

Zerlege

$$H_1 = G_1 \oplus G_1^\perp = \ker(L+U) \oplus \ker(L+U)^\perp .$$

Wähle einen Isomorphismus $A : H_1 \to H_1$ mit

$$A(G_1) \simeq \ker(L+U), \quad A\left(G_1^\perp\right) = \ker(L+U)^\perp$$

Endlich:

$$L_1 := (L+U) \circ A.$$

Dann gilt: L_1 surjektiv, Fredholm, $\ker L_1 = G_1$.

Weil $\operatorname{GL}(H_1)$ zusammenhängend ist, existiert eine Schar von $A_t \in \operatorname{GL}(H_1)$ mit $A_0 = \operatorname{Id}_{H_1}$, $A_1 = A$. Dann wird

$$L_t = (L+U) \circ A_t$$

ein stetiger Weg von Fredholm-Operatoren von L_1 nach $L+U$, $L + U \overset{L+t\cdot U}{\leftrightarrow} L$.

□

Satz 7.10. *H_1, H_2 seien Hilbert-Räume. $L_1, L_2 \in \operatorname{Fred}(H_1, H_2)$. L_1 und L_2 liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Fred}(H_1, H_2)$ genau dann, falls $\operatorname{Ind}(L_1) = \operatorname{Ind}(L_2)$.*

Beweis. Zu zeigen: $\operatorname{Ind}(L_1) = \operatorname{Ind}(L_2) \overset{?}{\rightsquigarrow} L_1, L_2$ liegen in der gleichen Komponente.

(1) Es genügt, den Satz für $\operatorname{Ind}(L_1) = \operatorname{Ind}(L_2) \geq 0$ zu zeigen:

$$H_1 \xrightarrow{L_1, L_2} H_2 \rightsquigarrow H_2^* \xrightarrow{L_1^*, L_2^*} H_1^* \rightsquigarrow H_2^* \xrightarrow{L_t^*} H_1^* \rightsquigarrow H_1 \xrightarrow{L_t} H_2$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{Ind}(L_t^*) = -\operatorname{Ind}(L_t)$$

(2) Sei $\operatorname{Ind}(L_1) = \operatorname{Ind}(L_2) \geq 0$. Lemma 7.9 $\rightsquigarrow$ Wir deformieren L_1 zu $\bar{L}_1$ und L_2 zu $\bar{L}_2$ mit

$$\ker\left(\bar{L}_1\right) = \ker\left(\bar{L}_2\right) = G_1,$$

$\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ surjektiv.

$\bar{L}_1 : H_1 \to H_2$ und $\bar{L}_1\big|_{G_1^\perp} : G_1^\perp \to H_2$ und $\bar{L}_2\big|_{G_1^\perp} : G_1^\perp \to H_2$ sind bijektiv.

Banach-Satz 3.13: $\bar{L}_1^{-1}, \bar{L}_2^{-1}$ sind stetig. Bilde

$$\bar{L}_2^{-1} \circ \bar{L}_1 \in \operatorname{GL}\left(G_1^\perp\right).$$

Weil $\operatorname{GL}\left(G_1^\perp\right)$ zusammenhängend ist, existiert eine Schar

$$A(t) \in \operatorname{GL}\left(G_1^\perp\right) \quad \text{mit} \quad A(0) = \operatorname{Id}_{G_1^\perp}, \quad A(1) = \bar{L}_2^{-1} \circ \bar{L}_1.$$

Dann ist

$$\bar{L}_2 \circ A(t) \circ \operatorname{Proj}_{G_1^\perp}$$

ein stetiger Weg von Fredholm-Operatoren.

$$\begin{aligned} t = 1 \quad &: \quad \bar{L}_2 \circ A(1) \circ \operatorname{Proj}_{G_1^\perp} = \bar{L}_2 \circ \bar{L}_2^{-1} \circ \bar{L}_1 \circ \operatorname{Proj}_{G_1^\perp} = \bar{L}_1 \\ t = 0 \quad &: \quad \bar{L}_2 \circ \operatorname{Proj}_{G_1^\perp} = \bar{L}_2 \end{aligned}$$

<u>Insgesamt</u>:

$$L_1 \rightsquigarrow \underbrace{\bar{L}_1}_{\text{kein KoKern}} \overset{\bar{L}_2 \circ A(t) \circ \operatorname{Proj}_{G_1^\perp}}{\rightsquigarrow} \underbrace{\bar{L}_2}_{\text{kein KoKern}} \rightsquigarrow L_2$$

□

8. Unbeschränkte Operatoren

unbe-schränkter Operator

Definition 8.1. Sei H ein Hilbert-Raum, $\mathcal{D}(A) \subset H$ ein linear Teilraum, dicht in H und $A : \mathcal{D}(A) \to H$ linear (nicht notwendig stetig). $(A, \mathcal{D}(A))$ heißt dann <u>unbeschränkter Operator</u>.

Definition 8.2. Zwei Operatoren A, B sind <u>gleich</u>, falls:

(1) $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$
(2) $A\big|_{\mathcal{D}(A)} = B\big|_{\mathcal{D}(A)}$

Beispiel. $H = L^2(-\infty, \infty)$

$\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(-\infty, \infty)$, $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger; $A(f) = f'$

$\mathcal{D}(B) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ - Schwartz-Raum; $B(f) = f'$

A und B sind nicht gleich, da $\mathcal{C}_0^\infty(-\infty, \infty) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Erweiterung $A \subset B$

Definition 8.3. $(A, \mathcal{D}(A))$, $(B, \mathcal{D}(B))$ Operatoren in H.

$$\boxed{A \subset B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \quad \text{und} \quad A\big|_{\mathcal{D}(A)} = B\big|_{\mathcal{D}(A)}}$$

B heißt dann <u>Erweiterung</u> von A.

Summe $A + B$

<u>Summe</u> $A + B$:

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x) \quad \text{für } x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$$

$$\boxed{A + B := (A + B, \mathcal{D}(A + B) := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B))}$$

<u>Superposition</u> $A \circ B$:

Superposition $A \circ B$

$$\boxed{(A \circ B)(x) := A(B(x)) \quad \text{mit } x \in \mathcal{D}(A \circ B) = \{x \in \mathcal{D}(B) \,|B(x) \in \mathcal{D}(A)\}}.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln

$$\begin{aligned} (A + B) \circ C &= A \circ C + B \circ C \\ (A \circ B) \circ C &= A \circ (B \circ C) \end{aligned}$$

Definition 8.4. Der <u>Graph $\Gamma(A)$</u> von $(A, \mathcal{D}(A))$ ist

Graph $\Gamma(A)$

$$\boxed{\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in H \oplus H \,|x \in \mathcal{D}(A)\}}$$

<u>Frage</u>: $(A, \mathcal{D}(A))$-Operator. $\Gamma(A) \subset H \oplus H$ - Graph $\rightsquigarrow \overline{\Gamma(A)} \subset H \oplus H$. Wann gilt $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$?

Satz 8.5. *$\overline{\Gamma(A)} \subset H \oplus H$ ist Graph eines Operators $(B, \mathcal{D}(B)) \Leftrightarrow$ Für jede Folge $x_n \in \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to 0$ und $A(x_n)$ konvergent, folgt*

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = 0.$$

Beweis. Sei $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$. Ist nun $x_n \in \mathcal{D}(A)$ eine Folge mit $x_n \to 0$, $A(x_n) \to x^*$, so ist

$$\begin{aligned} (x_n, A(x_n)) \in \Gamma(A) \quad &\rightsquigarrow \quad (0, x^*) \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B) \\ &\rightsquigarrow \exists y \in \mathcal{D}(B): \quad (y, B(y)) = (0, x^*) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow y = 0$ und dann $x^* = 0$.

<u>Umgekehrt</u>: Gelte die Bedingung.

Zeigen: Sind $(x, y) \in \overline{\Gamma(A)}$ und $(x, y_1) \in \overline{\Gamma(A)} \rightsquigarrow y = y_1$.

Wir wählen eine Folge $x_n \in \mathcal{D}(A)$ mit

$$(x_n, A(x_n)) \to (x, y)$$

und $x_n^* \in \mathcal{D}(A)$ mit

$$(x_n^*, A(x_n^*)) \to (x, y_1).$$

Dann gilt

$$x_n - x_n^* \to 0, \quad A(x_n) - A(x_n^*) \to y - y_1$$

Die Bedingung impliziert $y = y_1$.

$$\mathcal{D}(B) = \left\{x \in H \,\middle|\, \exists y \in H : (x, y) \in \overline{\Gamma(A)}\right\}$$

Ist $x \in \mathcal{D}(B)$, so ist y eindeutig!

$$B(x) := y.$$

Dann gilt:

(1) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$
(2) $A\big|_{\mathcal{D}(A)} = B\big|_{\mathcal{D}(A)}$
(3) $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$

□

Abschluß $\bar{A}$ **Definition 8.6.** Ein Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ heißt abschließbar, falls ein Operator B mit $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$ existiert. $\bar{A} := B$ - Abschluß von A.

$$\boxed{\mathcal{D}(\bar{A}) = \left\{x \in H \,\middle|\, \exists y \in H : (x, y) \in \overline{\Gamma(A)}\right\}}$$

A heißt abgeschlossener Operator, falls $A = \bar{A}$.

Beispiel. H sei seperabler Hilbert-Raum. $e_1, e_2, e_3, \dots$ sei ein vollständiges ON-System.

$$\mathcal{D}(A) := \{x \in H \,|\, x \text{ ist endliche Linearkombination von } e_1, e_2, \dots\}$$

$A : \mathcal{D}(A) \to H$ sei definiert durch

$$A(x) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) e_1$$

A ist linear. A ist nicht abschließbar. Betrachte

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \cdot e_k \in \mathcal{D}(A) \\ \|x_n\|^2 &= \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)\cdot n}{n^4 \cdot 6} \to 0 \\ A(x_n) &= \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right)\cdot e_1 = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot e_1 \to \frac{1}{2}e_1 \end{aligned}$$

30.1.2003 transponierter Operator **Satz 8.7.** *Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ ein Operator und existiere ein Operator $(A^t, \mathcal{D}(A))$ (transponierter Operator) mit*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{D}(A)$$

Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ abschließbar.

Beweis. Sei $x_n \to 0$. $x_n \in \mathcal{D}(A)$ und $A(x_n) \to y$ in H. Dann folgt für alle $u \in \mathcal{D}(A)$:

$$\langle y, u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A(x_n), u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, A^t(u)\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, A^t(u)\right\rangle = \langle 0, A^t(u)\rangle = 0$$

Weil $\mathcal{D}(A) \subset H$ dicht ist, folgt $y = 0$. □

Beispiel. (Differentialoperatoren sind abschließbar)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$, $H = L^2(\Omega)$

$\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ Raum aller $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger in Ω

$\mathcal{D}(A) \subset H$ dicht, $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$A(u)(x) := \sum_{\alpha, |\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \rightsquigarrow D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$u \in \mathcal{C}_0^\infty$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightsquigarrow A(u) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset H$.

$A:\mathcal{D}(A)\to H$, $u,u_1\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle Au,u_1\rangle_{L^2} &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x)\,\overline{u_1(x)}dx\\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega(-1)^{|\alpha|}\,u(x)\,D^\alpha\left(a_\alpha(x)\,\overline{u_1(x)}\right)dx\\
&= \int_\Omega u(x)\,\overline{\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\,D^\alpha\left(\overline{a_\alpha(x)}u_1(x)\right)}dx\\
&= \left\langle u,A^t(u_1)\right\rangle_{L^2}\\
\text{mit } A^t(u_1) &= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\,D^\alpha\left(\overline{a_\alpha(x)}u_1(x)\right)
\end{aligned}$$

Beispiel. $A=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ Laplace-Operator $\rightsquigarrow A^t=A\rightsquigarrow\langle Au,u_1\rangle=\langle u,Au_1\rangle$, $u,u_1\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Definition 8.8. Ein Operator $(A,\mathcal{D}(A))$ heißt symmetrisch, falls symmetrisch

(1) $\mathcal{D}(A)\subset H$ ist dicht.
(2) $\forall x,y\in\mathcal{D}(A)$: $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$

Folgerung. Jeder symmetrische Operator ist abschließbar.

8.1. **Zum Begriff des adjungierten Operators.**

$(A,\mathcal{D}(A))$ sei beliebiger Operator, $\mathcal{D}(A)\subset H$ dicht

$$\boxed{\mathcal{D}(A^*):=\{x\in H\,|\,\exists z\in H\forall y\in\mathcal{D}(A):\langle A(y),x\rangle=\langle y,z\rangle\}}$$

$A^*:\mathcal{D}(A^*)\to H$ wird dann durch

$$\boxed{A^*(x):=z}$$

definiert.

Rechtfertigung: Sei $x\in\mathcal{D}(A^*)$ mit

$$\begin{aligned}
\langle A(y),x\rangle &= \langle y,z\rangle \quad \forall y\in\mathcal{D}(A)\\
\langle A(y),x\rangle &= \langle y,z_1\rangle \quad \forall y\in\mathcal{D}(A)\\
\rightsquigarrow \forall y\in\mathcal{D}(A):\langle y,z-z_1\rangle &= 0\\
\mathcal{D}(A)\subset H\text{ dicht}\rightsquigarrow z &= z_1
\end{aligned}$$

Definition 8.9. Sei $(A,\mathcal{D}(A))$ gegeben. $(A^*,\mathcal{D}(A^*))$ ist der adjungierte Operator. adjungierter Operator A^*

Bemerkung. $(A,\mathcal{D}(A))$ sei symmetrisch $\rightsquigarrow\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A^*)\rightsquigarrow A\subset A^*$.

$R(A)$, $N(A^*)$

$$\begin{aligned}
R(A) &:= \operatorname{Im}(A)=A(\mathcal{D}(A)) \qquad \text{Bild von } A\\
N(A^*) &:= \ker(A^*)=\{x\in\mathcal{D}(A^*)\,|\,A^*(x)=0\}
\end{aligned}$$

Satz 8.10. $\overline{R(A)}\oplus N(A^*)=H$

$$\boxed{H=\overline{R(A)}\oplus N(A^*)}$$

Insbesondere ist $N(A^*)$ stets ein abgeschlossener Teilraum!

Beweis. Sei $x\in\mathcal{D}(A^*)$ und gelte $A^*(x)=0$ $(x\in N(A^*))$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \forall y\in\mathcal{D}(A) &: \langle A(y),x\rangle=\langle y,A^*(x)\rangle=\langle y,0\rangle=0\\
\rightsquigarrow R(A) &\perp N(A^*)\\
\rightsquigarrow \overline{R(A)} &\perp N(A^*)
\end{aligned}$$

$N(A^*)$ ist abgeschlossen! Dann ist

$$\overline{R(A)} \oplus N(A^*) \subset H$$

ein abgeschlossener Teilraum. Sei $z \in H$ mit

$$z \perp \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$$
$$\rightsquigarrow \langle A(y), z\rangle = 0 = \langle y, 0\rangle \quad \forall y \in \mathcal{D}(A)$$
$$\rightsquigarrow z \in \mathcal{D}(A^*) \text{ mit } A^*(z) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z \in N(A^*)$$

Aber $z \perp N(A^*)$ nach Voraussetzung $\rightsquigarrow z = 0$.

$$\rightsquigarrow \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = H$$

□

Beispiel. $H = L^2(\mathbb{R}^n)$

$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ Borel-meßbar, beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, a(x) \cdot f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(A)$, weil $a(x)$ auf kompakten Mengen beschränkt ist. $\rightsquigarrow \mathcal{D}(A) \subset H$ ist dicht.

Operator:

$$A(f)(x) := a(x) \cdot f(x), \qquad A : \mathcal{D}(A) \to H = L^2(\mathbb{R}^n)$$

Wir zeigen:

$$\mathcal{D}(A^*) = D(A) \quad \text{und} \quad (A^* f)(x) = \overline{a(x)} \cdot f(x)$$

Seien $f \in \mathcal{D}(A)$ und $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle Af, h\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) f(x) \cdot \overline{h(x)} dx$$

Angenommen, es existiert (zu h) eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\langle A(f), h\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2},$$

so erhalten wir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) f(x) \cdot \overline{h(x)} dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmenge. $f = \chi_K \in \mathcal{D}(A)$ (weil a beschränkt auf K)

$$\rightsquigarrow \int_K a(x) \cdot \overline{h(x)} dx \quad = \quad \int_K \overline{g(x)} dx \qquad \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$
$$\rightsquigarrow g(x) \quad = \quad \overline{a(x)} h(x) \quad \text{fast überall}$$

Aber: $g \in L^2(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \overline{a(x)} h(x) \in L^2$.

Also: $h \in \mathcal{D}(A^*) \rightsquigarrow a(x)\, h(x) \in L^2 \rightsquigarrow h \in \mathcal{D}(A)$ und umgekehrt analog

$$\rightsquigarrow \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ und } (A^* h)(x) = \overline{a(x)} h(x)$$

Sei $U : H \oplus H \to H \oplus H$ definiert durch

$$\boxed{U(x, y) := (y, -x)}$$

$\Gamma(A^*) = [U(\Gamma(A))]^\perp$

Satz 8.11. *(Alternative Beschreibung von A^*)*

$$\boxed{\Gamma(A^*) = [U(\Gamma(A))]^\perp}$$

Beweis. Sei $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle A(x), y\rangle &= \langle x, A^*(y)\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)\\
\rightsquigarrow \langle A(x), y\rangle + \langle -x, A^*(y)\rangle &= 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)\\
\rightsquigarrow \langle U(x, A(x)), (y, A^*(y))\rangle_{H\oplus H} &= \langle A(x), y\rangle_H + \langle -x, A^*(y)\rangle_H = 0\\
\rightsquigarrow (y, A^*(y)) &\perp U(\Gamma(A)) \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^*)\\
\rightsquigarrow \Gamma(A^*) &\subset [U(\Gamma(A))]^\perp
\end{aligned}$$

Rückrichtung analog. □

Folgerung. Der adjungierte Operator A^* ist stets abgeschlossen, d.h. $\overline{A^*} = A^*$

$$\boxed{\overline{A^*} = A^*}$$

Satz 8.12. *(von Neumann) $(A, \mathcal{D}(A))$ sei Operator mit dichtem Definitionsbereich und $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ wie oben definiert.* Neumann-Satz

Es gilt $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = H$ dann und nur dann, falls $(A, \mathcal{D}(A))$ abschließbar ist. In diesem Fall gilt

$$\boxed{\bar{A} = (A^*)^*}$$

Beweis. $\mathcal{D}(A) \subset H$ ist dicht und sei A abschließbar. Zu zeigen: $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = H$.

Sei $x \perp \mathcal{D}(A^*)$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow (x, 0) &\perp \Gamma(A^*) = (U(\Gamma(A)))^\perp\\
\rightsquigarrow (x, 0) &\in \overline{U(\Gamma(A))} = U\left(\overline{\Gamma(A)}\right) = U\left(\Gamma(\bar{A})\right)\\
\rightsquigarrow U(x, 0) &\in U^2\left(\Gamma(\bar{A})\right) = \Gamma(\bar{A})\\
\rightsquigarrow (0, -x) &\in \Gamma(\bar{A})\\
\rightsquigarrow -x &= \bar{A}(0)\\
\rightsquigarrow x &= 0
\end{aligned}$$

Konsequenz: A abschließbar $\rightsquigarrow \mathcal{D}(A^*)$ dicht.

Zu zeigen: $\bar{A} = (A^*)^*$. 4.2.2003

A^* ist dicht definiert. Satz 8.11 $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\Gamma(A^{**}) &= [U(\Gamma(A^*))]^\perp\\
&= \left[U\left(U(\Gamma(A))^\perp\right)\right]^\perp\\
&= \left[\underbrace{U^2}_{\text{-Id}}(\Gamma(A))^\perp\right]^\perp\\
&= \left[\Gamma(A)^\perp\right]^\perp\\
&= \overline{\Gamma(A)}\\
&= \Gamma(\bar{A})\\
\rightsquigarrow A^{**} &= \bar{A}
\end{aligned}$$

$(A, \mathcal{D}(A))$ sei dicht definiert und gelte $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = H$. Wiederhole die Rechnung

$$\Gamma(A^{**}) = [U(\Gamma(A^*))]^\perp = \ldots = \overline{\Gamma(A)}$$

$\rightsquigarrow \overline{\Gamma(A)}$ ist Graph von A^{**}, d.h. A ist abschließbar.

□

Folgerung. Ist A symmetrisch, so gilt

$$A \subset \bar{A} \subset A^*.$$

selbstadjungiert

Definition 8.13. Ein dicht-definierter Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ heißt selbstadjungiert, falls

$$\boxed{A = A^*}$$

Folgerung. Selbstadjungierte Operatoren sind stets abgeschlossene Operatoren.

wesentlich selbstadjungiert

Definition 8.14. Ein dicht-definierter Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ heißt wesentlich-selbstadjungiert, falls

$$\boxed{\bar{A} = A^*}$$

Beispiel. für $\bar{A} \neq A^*$: $H = L^2[a,b]$.

$$\begin{aligned} Af(x) &:= i \cdot \frac{df}{dx}(x) \\ \mathcal{D}(A) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp}(f) \subset (a,b)\} \end{aligned}$$

Integriere partiell: $f, g \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle Af, g\rangle_{L^2} = \int_a^b i \cdot f'(x) \cdot \overline{g(x)} dx = -\int_a^b i \cdot f(x) \cdot \overline{g'(x)} dx = \int_a^b f(x) \cdot \overline{ig'(x)} = \langle f, Ag\rangle_{L^2}$$

- $h \equiv 1$ liegt in $\mathcal{D}(A^*)$:
$$\langle A(f), h\rangle_{L^2} = \int_a^b i \cdot f'(x) \cdot 1 dx = i \cdot [f(b) - f(a)] = 0 = \langle f, 0\rangle_{L^2}$$
$\rightsquigarrow h \in \mathcal{D}(A^*)$ und $A^*(h) = 0$.
- $h \equiv 1 \notin \mathcal{D}(\bar{A})$: Angenommen, $1 \in \mathcal{D}(\bar{A}) \rightsquigarrow (1, \bar{A}(1)) \in \Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.
$$\rightsquigarrow \exists f \in L^2 \exists f_n \in \mathcal{D}(A) : f_n \to 1 \text{ in } L^2 \text{ und } A(f_n) = i \cdot f_n' \to f \text{ in } L^2.$$
Wenn $\operatorname{supp}(f_n) \subset (a,b)$ ist, so ist jede der Funktionen $f_n \in \mathcal{D}(A)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^1$ mit kompaktem Träger. Dann gilt mit der Inversformel der Fouriertransformation (Satz 2.9):
$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\
|f_n(x)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \hat{f}_n(\xi) \sqrt{1+\xi^2} d\xi \right|^2 \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ix\xi} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}_n(\xi) \sqrt{1+\xi^2} d\xi \right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \hat{f}_n(\xi) \right|^2 + \left| \xi \hat{f}_n(\xi) \right|^2 \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \cdot \left\{ \left\| \hat{f}_n \right\|_{L^2}^2 + \left\| \xi \cdot \hat{f}_n \right\|_{L^2}^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \cdot \left\{ \left\| \hat{f}_n \right\|_{L^2}^2 + \left\| \hat{f}_n' \right\|_{L^2}^2 \right\} \\
&\overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \cdot \left\{ \|f_n\|_{L^2}^2 + \|f_n'\|_{L^2}^2 \right\} \\
\rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| &\leq C^* \sqrt{\|f_n\|_{L^2}^2 + \|f_n'\|_{L^2}^2} \\
\rightsquigarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| &\leq C^* \sqrt{\|f_n\|_{L^2}^2 + \|f_n'\|_{L^2}^2}
\end{aligned}$$

Auf $[a,b]$ sind f_n und f_n' Cauchy-Folgen in $L^2 \rightsquigarrow f_n$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}[a,b]$.
Konsequenz: Es existiert eine stetige Funktion in $\mathcal{C}[a,b]$ mit $f_n \rightrightarrows g$. Aber:

$$\|f_n - g\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - g(x)|^2\, dx \le (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{|f_n(x) - g(x)|^2}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}$$

Somit konvergiert f_n in L^2 gegen g. Nach Vorausetzung $f_n \to 1$ in L^2.
Konsequenz: $g \equiv 1$, d.h. $f_n \rightrightarrows 1$. Aber $f_n(a) = 0$ für alle n. Widerspruch.

8.2. **Das Spektrum unbeschränkter, symmetrischer Operatoren.**

$(A, \mathcal{D}(A))$ - dicht definierter Operator $A : \mathcal{D}(A) \to H$.

$$\boxed{A_\lambda := \lambda \mathrm{Id} - A : \mathcal{D}(A) \to H}$$

- $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \ker(A_\lambda) \neq \{0\}$ (Punktspektrum)
- $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \ker(A_\lambda) = \{0\}$ und $\overline{\mathrm{Im}(A_\lambda)} \neq H$
- $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \ker(A_\lambda) = \{0\}$ und $\overline{\mathrm{Im}(A_\lambda)} = H$. $A_\lambda^{-1} : \mathrm{Im}(A_\lambda) \to H$ <u>nicht</u> stetig.
- $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} : H \to H$ stetig.

$$\rightsquigarrow \mathbb{C} = \rho(A)\, \dot\cup \sigma_p(A)\, \dot\cup \sigma_r(A)\, \dot\cup \sigma_c(A)$$
$$\lambda \in \sigma_p(A) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in \mathcal{D}(A),\, \|x\| = 1 :\; Ax - \lambda x = 0$$

Definition 8.15. (Approximationsspektrum)

Approximationsspektrum $\sigma_a(A)$

$$\boxed{\lambda \in \sigma_a(A) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x_n \in \mathcal{D}(A) \text{ mit } \|x_n\| = 1 :\; \|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0}$$

Satz 8.16.

$\sigma_p \cup \sigma_c \subset \sigma_a \subset \sigma$

$$\boxed{\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_a(A) \subset \sigma(A)}$$

Beweis. $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$: Sei $\lambda \in \sigma_a(A) \rightsquigarrow \exists x_n \in \mathcal{D}(A), \|x_n\| = 1$: $\|A_\lambda(x_n)\| \to 0$.
1. Fall: $\ker(A_\lambda) \neq \{0\} \rightsquigarrow \lambda \in \sigma(A)$.
2. Fall: $\ker(A_\lambda) = \{0\}$. Dann ist $A_\lambda^{-1} : \mathrm{Im}(A_\lambda) \to H$ invertierbar. Dann folgt

$$y_n := A_\lambda(x_n) \in \mathrm{Im}(A_\lambda), \quad \|y_n\| \to 0, \left\|A_\lambda^{-1} y_n\right\| = \|x_n\| = 1$$

$\rightsquigarrow A_\lambda^{-1}$ ist nicht stetig $\rightsquigarrow \lambda \in \sigma(A)$.
$\sigma_p(A) \subset \sigma_a(A)$ ist trivial
$\sigma_c(A) \subset \sigma_a(A)$: Sei $\lambda \notin \sigma_a(A)$

$$\rightsquigarrow \exists \varepsilon > 0\, \forall x \in \mathcal{D}(A) :\; \|Ax - \lambda x\| \ge \varepsilon \|x\|.$$

$\rightsquigarrow A_\lambda^{-1}$ stetig $\rightsquigarrow \lambda \notin \sigma_c(A)$.

□

Folgerung. $(A, \mathcal{D}(A))$ dicht definiert,

$$\boxed{\sigma_r(A) = \emptyset \rightsquigarrow \sigma(A) = \sigma_a(A) = \sigma_p(A)\, \dot\cup \sigma_c(A)}$$

Satz 8.17. $(A, \mathcal{D}(A))$ *dicht definiert, symmetrisch, $\bar{A} = A^*$ (wesentlich selbstadjungiert). Dann gilt:*

$$\boxed{\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A^*) \cap \{\sigma_a(A) \setminus (\sigma_p(A)\, \dot\cup \sigma_c(A))\}}$$

Folgerung. Ist $A = A^*$ (selbstadjungierter Operator), so ist

(1) $\sigma_r(A) = \emptyset$
(2) $\sigma(A) = \sigma_a(A) \subset \mathbb{R}^1$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_r(A)$, d.h. $\lambda \cdot \mathrm{Id} - A : \mathcal{D}(A) \to H$ ist injektiv, $\overline{\mathrm{Im}(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A)} \neq H$.

Wähle $y \in H$ mit $\|y\| = 1$ und $y \perp \mathrm{Im}(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A)$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle y, \lambda x - Ax \rangle &= 0 \\ \rightsquigarrow \forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow y \in \mathcal{D}(A^*)$ und $A^*(y) = \bar{\lambda} y \rightsquigarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Nach Voraussetzung $\bar{A} = A^*$, d.h. $y \in \mathcal{D}(\bar{A})$. $\rightsquigarrow$

$$\exists x_n \in \mathcal{D}(A) : x_n \to y \text{ und } A(x_n) \to \bar{A}(y) = A^*(y) = \bar{\lambda} y$$

Berechnen

$$\langle y, \bar{\lambda} y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, A(x_n) \rangle \overset{A^* = \bar{A}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle A(x_n), x_n \rangle = \langle \bar{\lambda} y, y \rangle$$

$\rightsquigarrow \lambda \cdot \|y\|^2 = \bar{\lambda} \cdot \|y\|^2$, d.h. $\lambda = \bar{\lambda}$. Also $\lambda = \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Normiere die Folge x_n:

$$x_n^* := \frac{x_n}{\|x_n\|} \to y, \quad \|x_n^*\| = 1.$$

$$A(x_n^*) = \underbrace{\frac{1}{\|x_n\|}}_{\to 1} \cdot A(x_n) \to \bar{\lambda} y = \lambda y = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n^*$$

$\rightsquigarrow \lambda \in \sigma_a(A)$.

□

Defektraum $\Delta_A(\lambda)$

$(A, \mathcal{D}(A))$ dicht definiert. Defektraum von A zu λ

$$\boxed{\Delta_A(\lambda) := \left[\overline{\mathrm{Im}(\lambda \mathrm{Id} - A)}\right]^{\perp}}$$

Allgemeine Zerlegung:

$$\overline{\mathrm{Im}(\lambda \mathrm{Id} - A)} \oplus N\left(\bar{\lambda} \mathrm{Id} - A^*\right) = H,$$

also

$$\boxed{\Delta_A(\lambda) = N\left(\bar{\lambda} \mathrm{Id} - A^*\right)}$$

Definition 8.18. Defekt von A:

$$\boxed{d_A(\lambda) = \dim(\Delta_A(\lambda))}$$

Krein-Krasnosielski-Satz

Satz 8.19. *(Krein-Krasnosielski, 1947) $(A, \mathcal{D}(A))$ dicht definiert, $\sigma_a(A)$ Approximationsspektrum.*

Liegen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \sigma_a(A)$, so gilt

$$\boxed{d_A(\lambda_1) = d_A(\lambda_2)}$$

A symmetrisch $\rightsquigarrow \sigma_a(A)$ reell. $d_+(A) := d_A(i)$, $d_-(A) := d_A(-i)$.

Defektindex (d_+, d_-)

Definition 8.20. $(A, \mathcal{D}(A))$ sei symmetrisch. Der Defektindex von A ist das Paar

$$\boxed{(d_+(A), d_-(A)) = (d_A(+i), d_A(-i))}$$

6.2.2003 Satz von Neumann

Satz 8.21. *(Neumann) $(A, \mathcal{D}(A))$ symmetrischer Operator, $\mathcal{D}(A) \subset H$ dicht. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) $d_+(A) = d_-(A)$
(2) *Es existiert ein Operator $A \subset B$ mit $B^* = B$ (d.h. A besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung)*

Bemerkung. Die selbstadjungierte Erweiterung ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Satz 8.22. *(Neumann)* $(A, \mathcal{D}(A))$ *symmetrisch, dicht definiert. Folgende Bedingungen sind äquivalent:* Satz von Neumann

(1) $d_+(A) = d_-(A) = 0$
(2) $\bar{A} = A^*$ *(d.h. A ist wesentlich selbstadjungiert)*

Bemerkung. Nicht jeder symmetrische Operator in H besitzt innerhalb von H eine selbstadjungierte Erweiterung (Bedingung $d_+ = d_-$)

Satz 8.23. *(Nojmark) Jeder symmetrische Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ in H kann zu einem selbstadjungierten Operator $\left(\tilde{A}, \mathcal{D}\left(\tilde{A}\right)\right)$ in einem gewissen Hilbert-Raum $H \subset K$ erweitert werden.* Satz von Nojmark

Beispiel. $H^2 = L^2[a,b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \,|\, f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp}(f) \subset (a,b)\} \\ A(f) &= if' \end{aligned}$$

- $(A, \mathcal{D}(A))$ ist symmetrisch
- $\bar{A} \not\subseteq A^*$ d.h. A ist nicht wesentlich selbstadjungiert

$$d_A(\lambda) = \dim N\left(\overline{\lambda}\mathrm{Id} - A^*\right)$$

Um $d_\pm(A)$ zu berechnen, ist die Gleichung

$$\underbrace{A^* f}_{if'} = \pm i f$$

mit $f \in \mathcal{D}(A^*)$ zu lösen. Die Lösung ist $f(t) = C \cdot e^{\pm t}$. $\rightsquigarrow$

$$d_+(A) = d_-(A) = 1.$$

Neumann-Sätze 8.21 und 8.22 $\rightsquigarrow$ A ist <u>nicht</u> wesentlich selbstadjungiert und A läßt eine selbstadjungierte Erweiterung zu.

Wähle einen Parameter $0 \leq s < 2\pi$ und definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_s) &:= \left\{f : [a,b] \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ ist absolut-stetig}, f' \in L^2[a,b], f(a) = e^{is} f(b)\right\} \\ A &= i\frac{d}{dx} \end{aligned}$$

<u>Es gilt</u>: $A_s^* = A_s$ und $A \subset A_s = A_s^*$.

8.2.1. *Beweis des Satzes von Krein-Krasnosielski.*

Lemma 8.24. *$P_1, P_2 : H \to H$ Orthogonalprojektionen, $\|P_1 - P_2\| < 1$. Dann ist*

$$\dim P_1(H) = \dim P_2(H).$$

Beweis. $S_i = P_i(H)$ Bild von P_i. Angenommen, $\dim S_2 > \dim S_1$.

Bezeichnen mit S den Raum $S := P_2(S_1)$. Dann gilt $S \subset S_2$ und

$$\dim S \leq \dim S_1 < \dim S_2.$$

Dann existiert ein Vektor $x \in S_2$ mit $\|x\| = 1$ und $x \perp S$.

Dies bedeutet

$$0 = \left\langle x, \underbrace{P_2(y)}_{\in S} \right\rangle = \langle P_2(x), y\rangle \overset{x \in S_2}{=} \langle x, y \rangle \qquad \forall y \in S_1$$

$\rightsquigarrow x \perp S_1 \rightsquigarrow P_1(x) = 0$ und $(\mathrm{Id} - P_1)(x) = x$. Aber:

$$\begin{aligned}
(P_1 - P_2)(x) &= P_1 \underbrace{(\mathrm{Id} - P_2)(x)}_{=0 \text{ weil } x \in S_2} - (\mathrm{Id} - P_1) P_2(x) \\
&= -(\mathrm{Id} - P_1) P_2(x) \\
&\overset{x \in S_2}{=} -(\mathrm{Id} - P_1)(x) \\
&= -x \\
\rightsquigarrow \|(P_1 - P_2) x\| &= \|x\| \qquad \text{und } \|x\| = 1
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu $\|P_1 - P_2\| < 1$.

$\square$

Lemma 8.25. *Ist $(A, \mathcal{D}(A))$ ein dicht definierter Operator, so ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_a(A)$ offen.*

Beweis. Aus $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(A)$ folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon(\lambda_0) > 0$ mit

$$\varepsilon(\lambda_0) \|x\| \leq \|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\| \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Sei $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0)$. Dreiecksungleichung $\rightsquigarrow$

$$\|(\lambda \mathrm{Id} - A)(x)\| \geq \left[\varepsilon(\lambda_0) - \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0)\right] \|x\| = \frac{2}{3}\varepsilon(\lambda_0)\|x\|.$$

$\rightsquigarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(A)$. $\square$

Beweis. (des Krein-Krasnosielski-Satzes 8.19) Sei $\lambda_0 \notin \sigma_a(A)$ und $\varepsilon(\lambda_0)$ gewählt mit

$$\varepsilon(\lambda_0)\|x\| \leq \|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\| \qquad x \in \mathcal{D}(A)$$

$\rightsquigarrow$ Für alle $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0)$ gilt:

$$\frac{2}{3}\varepsilon(\lambda_0)\|x\| \leq \|(\lambda \mathrm{Id} - A)(x)\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Betrachte $\Delta_A(\lambda) = N\left(\overline{\lambda}\mathrm{Id} - A^*\right)$ - dies ist ein abgeschlossener Teilraum !

P_λ sei die Projektion auf $\Delta_A(\lambda)$. $\mathrm{Id} - P_\lambda$ ist dann die Projektion auf $\Delta_A(\lambda)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(\lambda \mathrm{Id} - A)}$.

<u>Allgemein</u>: Sei Q Projektion in H, $z \in H$.

$$\|Q(z)\| = \sup_{u \subset G} |\langle z, u \rangle|,$$

wobei G eine dichte Teilmenge in der Einheitskugel des Raumes $Q(H)$ ist.[5]

Wenden diese Formel auf den Projektor $Q := \mathrm{Id} - P_{\lambda_0}$ an, mit

$$G := \left\{ y = \frac{(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)}{\|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\|} \,\middle|\, x \in \mathcal{D}(A), x \neq 0 \right\}$$

[5] $H = Q(H) \oplus Q(H)^\perp$, $z = z_1 + z_2 \rightsquigarrow Q(z) = z_1$.
$u \in Q(H)$, $\|u\| \leq 1 \rightsquigarrow |\langle z, u \rangle| = |\langle z_1, u \rangle| \leq \|z_1\| \cdot \|u\| \leq \|z_1\| = \|Q(z)\| \rightsquigarrow \sup_{u \subset G} |\langle z, u \rangle| \leq \|Q(z)\|$
$u = \frac{z_1}{\|z_1\|} \rightsquigarrow \|u\| = 1$, $|\langle z, u \rangle| = \left|\left\langle z_1, \frac{z_1}{\|z_1\|} \right\rangle\right| = \|z_1\| = \|Q(z)\|$

und für $z \in \Delta_A(\lambda) = \left(\overline{\mathrm{Im}(\lambda \mathrm{Id} - A)}\right)^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{Id} - P_{\lambda_0})(z)\| &= \sup_{x \in \mathcal{D}(A)} \left| \frac{\langle z, (\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\rangle}{\|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\|} \right| \\
&= \sup_{x \in \mathcal{D}(A)} \left| \frac{\overbrace{\langle z, (\lambda \mathrm{Id} - A)(x)\rangle}^{=0} + (\lambda_0 - \lambda)\langle z, x\rangle}{\|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\|} \right| \\
&= \sup_{x \in \mathcal{D}(A)} \left| \frac{(\lambda_0 - \lambda)\langle z, x\rangle}{\|(\lambda_0 \mathrm{Id} - A)(x)\|} \right| \\
&\leq |\lambda_0 - \lambda| \cdot \sup_{x \in \mathcal{D}(A)} \frac{\|z\| \cdot \|x\|}{\varepsilon(\lambda_0) \cdot \|x\|} \\
&\leq \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0) \cdot \frac{\|z\|}{\varepsilon(\lambda_0)} \\
&= \frac{1}{3}\|z\|
\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \|(\mathrm{Id} - P_{\lambda_0})(z)\| \leq \frac{1}{3}\|z\| \quad \forall z \in \Delta_A(\lambda), |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0) \tag{8.1}$$

Andere Rechnung:

$$\|(\mathrm{Id} - P_\lambda)(y)\| \leq \frac{1}{3}\|y\| \quad \forall y \in \Delta_A(\lambda_0), |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0) \tag{8.2}$$

Für $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}
\|P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\|^2 &= \langle P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)x, P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)x\rangle \\
&\overset{P_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}^* = P_{\lambda_0}^2}{=} \langle P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)x, (\mathrm{Id} - P_\lambda)x\rangle \\
&\overset{\mathrm{Id} - P_\lambda = (\mathrm{Id} - P_\lambda)^2}{=} \langle (\mathrm{Id} - P_\lambda)P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x), (\mathrm{Id} - P_\lambda)x\rangle \\
&\leq \left\| (\mathrm{Id} - \mathrm{P}_\lambda) \underbrace{P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - \mathrm{P}_\lambda)(x)}_{\in \Delta_A(\lambda_0), \text{ da } P_{\lambda_0} \text{ Proj. auf } \Delta_A(\lambda_0)} \right\| \cdot \|(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\| \\
&\overset{(8.2)}{\leq} \frac{1}{3}\|P_{\lambda_0}(\mathrm{Id}\text{-}P_\lambda)(x)\| \cdot \|(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\| \\
\rightsquigarrow \|P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\| &\leq \frac{1}{3}\|(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\|.
\end{aligned}$$

Wende (8.1) auf $z := P_\lambda(x) \in \Delta_A(x)$ an:

$$\|(\mathrm{Id} - P_{\lambda_0})P_\lambda(x)\| \leq \frac{1}{3}\|P_\lambda x\|$$

Letzter Schritt:

$$\begin{aligned}
\|(P_{\lambda_0} - P_\lambda)(x)\|^2 &= \|P_{\lambda_0}(P_{\lambda_0} - P_\lambda)(x)\|^2 + \|(\mathrm{Id} - P_{\lambda_0})(P_{\lambda_0} - P_\lambda)(x)\|^2 \\
&= \left\|\left(P_{\lambda_0}^2 - P_{\lambda_0}P_\lambda\right)(x)\right\|^2 + \left\|\left(P_{\lambda_0} - P_\lambda - P_{\lambda_0}^2 + P_{\lambda_0}P_\lambda\right)(x)\right\|^2 \\
&\overset{P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}}{=} \|P_{\lambda_0}(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\|^2 + \|(\mathrm{Id} - P_{\lambda_0})P_\lambda(x)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{9}\|(\mathrm{Id} - P_\lambda)(x)\|^2 + \frac{1}{9}\|P_\lambda(x)\| \\
&= \frac{1}{9}\|x\|^2 \\
\rightsquigarrow \|P_{\lambda_0} - P_\lambda\| &\leq \frac{1}{3} < 1 \qquad \forall |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{3}\varepsilon(\lambda_0)
\end{aligned}$$

Lemma 8.24 $\rightsquigarrow \dim P_{\lambda_0}(H) = \dim P_\lambda(H)$

$$\rightsquigarrow \dim \Delta_A(\lambda_0) = \dim \Delta_A(\lambda).$$

□

Konsequenz:

- Die Funktionen
$$\mathbb{C} \setminus \sigma_a(A) \ni \lambda \mapsto \dim \Delta_A(\lambda)$$
ist lokal konstant.
- $\mathbb{C} \setminus \sigma_a(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$.

11.2.2003 8.2.2. *Beweis der von Neumann-Sätze.*

Beweise beruhen auf tieferem Verständnis von

- Geometrie der Defekträume
- Cayley-Transformation von Operatoren

Geometrie der Defekträume:

$$\begin{aligned}
\Delta_A^+ &:= \Delta_A(i) = \overline{\operatorname{Im}(A - i\mathrm{Id})}^\perp = N(A^* + i\mathrm{Id}) = \ker(A^* + i\mathrm{Id}) \\
\Delta_A^- &:= \Delta_A(-i) = \overline{\operatorname{Im}(A + i\mathrm{Id})}^\perp = N(A^* - i\mathrm{Id}) = \ker(A^* - i\mathrm{Id}) \\
d_\pm(A) &= \dim \Delta_A^\pm
\end{aligned}$$

Daraus bilden wir 2 Unterräume von $H \oplus H$:

$$\begin{aligned}
K_+ &= \left\{ f \oplus (-if) \,\middle|\, f \in \Delta_A^+ \right\} \\
K_- &= \left\{ f \oplus if \,\middle|\, f \in \Delta_A^- \right\}
\end{aligned}$$

Bemerkung. $K_\pm \subset \Gamma(A^*)$:

$f \oplus (-if) \in K_+ \rightsquigarrow f \in \ker(A^* + i\mathrm{Id}) \rightsquigarrow A^* f = -if$. Analog K_-.

Lemma 8.26. *Sei A abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann gilt*

$$\boxed{\Gamma(A^*) = \Gamma(A) \oplus K_- \oplus K_+}$$

Beweis. Sei $f \oplus if \in K_-$, $h \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned}
\langle h \oplus Ah, f \oplus if \rangle &= \langle h, f \rangle + \langle Ah, if \rangle \\
&= \langle h, f \rangle - i \langle Ah, f \rangle \\
&= -i \langle Ah + ih, f \rangle \\
&= -i \langle (A + i\mathrm{Id}) h, f \rangle \\
&= -i \langle h, (A^* - i\mathrm{Id}) f \rangle \\
&= 0, \text{ denn } f \in \Delta_A^- = \ker(A^* - i\mathrm{Id}) \\
\rightsquigarrow K_- &\perp \Gamma(A).
\end{aligned}$$

Analog $\Gamma(A)$, K_-, K_+ paarweise orthogonal

Zeige noch, daß $\Gamma(A) \oplus K_- \oplus K_+$ dicht liegt in $\Gamma(A^*)$.

Sei dazu $h \in \mathcal{D}(A^*)$ derart, daß

$$h \oplus A^* h \perp \Gamma(A) \oplus K_- \oplus K_+.$$

$h \oplus A^* h \perp \Gamma(A) \rightsquigarrow \forall f \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h \oplus A^* h, f \oplus Af \rangle = \langle h, f \rangle + \langle A^* h, Af \rangle \\ \rightsquigarrow \left\langle \underbrace{A^* h}_{\in \mathcal{D}(A^*)}, Af \right\rangle &= -\langle h, f \rangle \\ \rightsquigarrow \langle A^* A^* h, f \rangle &= -\langle h, f \rangle \\ \rightsquigarrow A^* A^* h &= -h \\ \rightsquigarrow (A^* A^* + \mathrm{Id})\, h &= 0 \\ \rightsquigarrow (A^* - i\mathrm{Id})(A^* + i\mathrm{Id})\, h &= 0, \end{aligned}$$

d.h. $(A^* + i\mathrm{Id})\, h \in \Delta_A^-$. Analog $(A^* - i\mathrm{Id})\, h \in \Delta_A^+$.

Ist nun aber g beliebig aus Δ_A^-, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle h \oplus A^* h, \underbrace{g \oplus ig}_{\in K_-} \right\rangle \\ &= \langle h, g \rangle + \langle A^* h, ig \rangle \\ &= -i \langle (A^* + i\mathrm{Id})\, h, g \rangle \end{aligned}$$

Setze $g = (A^* + i\mathrm{Id})\, h \rightsquigarrow (A^* + i\mathrm{Id})\, h = 0 \rightsquigarrow h \in \Delta_A^+$.

Wieder analog: $h \in \Delta_A^- \rightsquigarrow h = 0$.

$\square$

Korollar. *Sei A abgeschlossen, symmetrisch: A ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow d_A^+ = d_A^- = 0$.*

A selbstadj. $\Leftrightarrow d_A^+ = d_A^- = 0$

Beachte: Abschluss eines symmetrischen Operators ist wieder symmetrisch $\rightsquigarrow$ 2. Satz von J. v. Neumann (8.22).

Die Cayley-Transformation:

Cayley-Transformation $c(z)$

$$c(z) = \frac{z - i}{z + i} : \mathcal{H}_+ \to D \qquad \mathcal{H}_+ = \{z \,|\mathrm{Im} z \geq 0\}, D = \{z \,||z| \leq 1\}$$

z	0	1	∞	i	-1
$c(z)$	-1	$-i$	1	0	$+i$

c ist eine sogenannte Möbius-Transformation, die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbildet. Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} c : \partial \mathcal{H}_+ = \mathbb{R} & \to & \partial D = S^1 \\ z = \bar{z} & & |z| = 1 \\ \text{selbstadj. Op.} & & \text{unitäre Op.} \end{array}$$

Macht Operator-Analogie Sinn ? Was, wenn der Ausgangsoperator “nur” symmetrisch ist?

Sei A fortan ein symmetrischer Operator mit dichtem Definitionsgebiet. Dann ist $A + i\mathrm{Id}$ injektiv, d.h.

$$c(A) = (A - i\mathrm{Id}) \circ (A + i\mathrm{Id})^{-1}$$

ist wohldefiniert und bildet wegen

$$\mathrm{Im}\,(A + i\mathrm{Id})^{-1} = \mathcal{D}(A + i\mathrm{Id}) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A - i\mathrm{Id})$$

$\mathrm{Im}\,(A + i\mathrm{Id})$ bijektiv auf $\mathrm{Im}\,(A - i\mathrm{Id})$ ab.

Definitions- und Bildbereich von $c(A)$ ist umso größer, je kleiner $d_\pm(A)$ ist!

Lemma 8.27. $c(A) : \mathrm{Im}\,(A + i\mathrm{Id}) \to \mathrm{Im}\,(A - i\mathrm{Id})$ *ist isometrisch.*

Beweis. $y := (A + i\mathrm{Id})\, x \in \mathcal{D}(c(A))$, $x \in \mathcal{D}(A) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\|c(A)\, y\|^2 &= \|(A - i\mathrm{Id})\, x\|^2 \\
&= \langle (A - i\mathrm{Id})\, x, (A - i\mathrm{Id})\, x \rangle \\
&= \langle Ax, Ax \rangle + \langle Ax, -ix \rangle + \langle -ix, Ax \rangle + \langle x, x \rangle \\
&= \langle Ax, Ax \rangle + \langle ix, Ax \rangle + \langle Ax, ix \rangle + \langle x, x \rangle \\
&= \langle (A + i\mathrm{Id})\, x, (A + i\mathrm{Id})\, x \rangle \\
&= \|y\|^2 .
\end{aligned}$$

□

Korollar. *$c(A)$ setzt sich zu unitärem Operator $\overline{\mathrm{Im}\,(A + i\mathrm{Id})} \to \overline{\mathrm{Im}\,(A - i\mathrm{Id})}$ fort.*

Kann die Cayley-Transformation invertiert werden (d.h. Rekonstruktion von A aus $c(A)$) ?

Lemma 8.28. $1 \notin \sigma_p(c(A))$.

Beweis. Angenommen, $\exists y \in \mathcal{D}(c(A))$ mit $c(A)\, y = y$. Schreibe wieder $y = (A - i\mathrm{Id})\, x$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

$$(A + i\mathrm{Id})\, x = c(A)\, y = y = (A - i\mathrm{Id})\, x \quad \rightsquigarrow \quad 2ix = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = 0.$$

□

Somit ist $\mathrm{Id} - c(A)$ invertierbar, und

$$\mathrm{Id} - c(A) = (A + i\mathrm{Id})\,(A + i\mathrm{Id})^{-1} - (A - i\mathrm{Id})\,(A + i\mathrm{Id})^{-1} = 2i\,(A + i\mathrm{Id})^{-1},$$

insbesondere $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - c(A)) = \mathcal{D}(A + i\mathrm{Id}) = \mathcal{D}(A)$.

$$\mathrm{Id} + c(A) = (A + i\mathrm{Id})\,(A + i\mathrm{Id})^{-1} + (A - i\mathrm{Id})\,(A + i\mathrm{Id})^{-1} = 2A\,(A + i\mathrm{Id})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow\ (\mathrm{Id} + c(A))\,(\mathrm{Id} - c(A))^{-1} &= 2A\,(A + i\mathrm{Id})^{-1}\,\frac{1}{2i}\,(A + i\mathrm{Id}) = \frac{1}{i} A \\
\text{kurzum } A &= i\,(\mathrm{Id} + c(A))\,(\mathrm{Id} - c(A))^{-1}
\end{aligned}$$

Korollar. $A \subset B \Leftrightarrow c(A) \subset c(B)$ *(Weil $A \subset B \rightsquigarrow A^{-1} \subset B^{-1}$).*

Lemma 8.29. *Sei A symmetrisch, V ein isometrischer Operator auf $\mathcal{D}(V) \subset H$, und gelte $c(A) \subset V$. Dann ex. ein symmetrischer Operator B mit $c(B) = V$ und $A \subset B$.*

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\ c\ } & c(A) \\
\cap & & \cap \\
B & \xrightarrow{\ c\ } & V
\end{array}$$

Kurzum:

$$\{\text{symm. Erw. von } A\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{isometr. Erw. von } c(A)\}$$

Beweis.

(1) $(\mathrm{Id} - V)^{-1}$ ex.: Denn aus $(\mathrm{Id} - V)\, x = 0$ folgt mit $y = (\mathrm{Id} - V)\, z$, $z \in \mathcal{D}(V)$:

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle x, (\mathrm{Id} - V)\, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, Vz \rangle \\
&\overset{V \text{ Isom.}}{=} \langle Vx, Vz \rangle - \langle x, Vz \rangle = -\left\langle \underbrace{(\mathrm{Id} - V)\, x}_{=0}, Vz \right\rangle, \\
\text{d.h. } x &\perp \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - V) \supset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - c(A)) \supset \mathcal{D}(A) \ \text{ dicht in } H \\
\rightsquigarrow x &= 0
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow (\mathrm{Id} - V)$ ist invertierbar.

(2)

$$B := i\,(\mathrm{Id} + V)\,(\mathrm{Id} - V)^{-1}$$

leistet das Gewünschte: Nach (1) ex. B, und wegen

$$c\,(A) \subset V = c\,(B)$$

gilt $A \subset B$.

Zeige noch, daß B symmetrisch ist: Sei $y_1, y_2 \in \mathcal{D}\,(B)$, d.h. $\exists x_1, x_2 \in \mathcal{D}\,(V)$ mit $y_k = (\mathrm{Id} - V)\,x_k$, $k = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\langle By_1, y_2\rangle &= \langle i\,(\mathrm{Id} + V)\,x_1, (\mathrm{Id} - V)\,x_2\rangle \\
&= \langle ix_1, x_2\rangle + \langle iVx_1, x_2\rangle + \langle ix_1, -Vx_2\rangle + \underbrace{\langle iVx_1, -Vx_2\rangle}_{-\langle ix_1, x_2\rangle} \\
&= i\,[\langle Vx_1, x_2\rangle - \langle x_1, Vx_2\rangle] \\
&= \langle(\mathrm{Id} - V)\,x_1, (\mathrm{Id} - V)\,x_2\rangle \\
&= \langle y_1, By_2\rangle
\end{aligned}$$

□

Nun ist es leicht, den 1. Satz von J.v. Neumann (8.21) zu beweisen (symm. Op. besitzt selbstadj. Erw. $\Leftrightarrow d_+\,(A) = d_-\,(A) = 0$):

Beweis. (Neumann 1, 8.21)

($\Rightarrow$): Angenommen, es ex. $A \subset B$, $B = B^*$. $\rightsquigarrow$

$$d_+\,(B) = d_-\,(B) = 0$$

nach Lemma 8.26, d.h.

$$H = \overline{\mathrm{Im}\,(B^* \pm i\mathrm{Id})}.$$

Dies bedeutet, daß $c\,(B)$ sich zu einem unitären Operator $H \to H$ fortsetzt, insbesondere bildet diese Fortsetzung Δ_A^-unitär auf Δ_A^+ ab. Insbesondere ist dann

$$d_-\,(A) = \dim \Delta_A^- = \dim \Delta_A^+ = d_+\,(A)$$

($\Leftarrow$): Sei $d_+\,(A) = d_-\,(A)$: Dann ex. unitäre Operatoren Z: $\Delta_A^- \to \Delta_A^+$, welche $c\,(A)$ unitär ausdehen:

$$H = \Delta_A^- \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(A + i\mathrm{Id})} \to \Delta_A^+ \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(A - i\mathrm{Id})} = H$$

Dieses

$$Z \oplus c\,(A) =: V : H \to H$$

ist weiterhin unitär, d.h. nach Lemma 8.29 ex. ein B mit

$$c\,(B) = Z \oplus c\,(A)$$

mit allen Eigenschaften.

□

Bemerkung. Aus dem Beweis wird klar, daß die selbstadjungierten Erweiterungen von A durch die unitäre Abbildung Z: $\Delta_A^- \to \Delta_A^+$ parametrisiert werden.

Beispiel. $AC\,([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ absolut stetig, } f' \in L^2\,([0,1])\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\,(A) &= \{f \in AC\,([0,1])\,|\,f\,(0) = f\,(1) = 0\} \\
Af &= if'.
\end{aligned}$$

A war abgeschlossener, symmetrischer Operator, nicht selbstadjungiert, $\mathcal{D}(A^*) = AC([0,1])$, $A^*f = if'$. ($A \subsetneq A^*$).

$$\begin{aligned} \Delta_A^+ &= \ker(A^* + i\mathrm{Id}) = \{f \in AC([0,1]) \,|\, 0 = if' + if\} = \mathrm{Lin}\left(e^{-t}\right) \\ \Delta_A^- &= \ker(A^* - i\mathrm{Id}) = \mathrm{Lin}\left(e^{+t}\right) \\ \rightsquigarrow d_\pm(A) &= 1 \end{aligned}$$

Wir sehen unitäre Transformation von Δ_A^- nach Δ_A^+ aus?

$$\begin{aligned} \left\|e^t\right\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) \\ \left\|e^{-t}\right\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) \end{aligned}$$

Eine solche ist $e^t \mapsto e \cdot e^{-t}$, und jede weitere ist der Gestalt $e^t \mapsto \alpha e e^{-t}$ mit $|\alpha| = 1$.

In der Übung wurden selbstadjungierte Erweiterungen A_α von A konstruiert, $\alpha \in S^1$. Dies waren also bereits alle.

8.2.3. *Maximal symmetrische Operatoren.*

Beispiel. Modifikation: $AC([0,\infty)) = \left\{\text{absolut stetige Funktionen mit } f' \in L^2([0,\infty))\right\}$.

Da $e^t \notin AC([0,\infty))$, ist $d_+(A) = 1$, aber $d_-(A) = 0$.

A läßt sich nicht mehr erweitern, weil $c(A)$ nun bereits auf ganz H $(= \underbrace{\Delta_A^-}_{0} \oplus \overline{\mathrm{Im}(A + i\mathrm{Id})})$ definiert ist.

Lemma 8.30. *Jeder symmetrische Operator besitzt mindestens eine maximale Erweiterung, und dessen Defektindizes sind der Form $(0,m)$ oder $(m,0)$.*

Beweis. (Shizze): Ist z.B. $\dim \Delta_A^- < \dim \Delta_A^+$, dann erweitern $c(A)$ um part. Isometrie $\Delta_A^- \to \Delta_A^+$. □

13.02.2003 <u>Wold-Zerlegung</u>

H sei Hilbert-Raum

(1) $A : H \to H$ heißt <u>unitär</u>, falls $AA^* = \mathrm{Id}_H = A^*A$.
  (a) A ist bijektiv
  (b) $\|Ax\| = \|x\| \; \forall x \in H$.
(2) $A : H \to H$ ist eine <u>Isometrie</u>, falls $\|Ax\| = \|x\| \; \forall x \in H$.
  $\rightsquigarrow A^*A = \mathrm{Id}_H$ (d.h. Isometrien sind injektiv, aber nicht notwendig surjektiv)

Beispiel. H sei Hilbertraum unendlicher Dimension, separabel. $e_1, e_2, e_3, \ldots$ vollständiges ON-System

$$A(e_i) = e_{i+k} \qquad k > 0 \text{ fest}$$

$$\begin{aligned} H = l^2 &= \left\{(a_1, a_2, \ldots) \left| \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \right.\right\} \\ A(a_1, a_2, \ldots) &= (0, \ldots, 0, a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}$$

Ist eine Isometrie, aber kein unitärer Operator. (Verschiebungsoperator)

Satz 8.31. *(Wold-Zerlegung) $T : H \to H$ Isometrie in H. Dann existiert eine Zerlegung $H = H_1 \oplus H_2$ mit folgenden Eigenschaften:* Wold-Zerlegung

(1) $T(H_1) \subset H_1$
(2) $T(H_2) \subset H_2$
(3) $T|_{H_1} : H_1 \to H_1$ *ist unitär.*
(4) $T|_{H_2} : H_2 \to H_2$ *ist ein Verschiebungsoperator*

$$T = \begin{pmatrix} T|_{H_1} & 0 \\ 0 & T|_{H_2} \end{pmatrix}$$

Weitherin gilt:

$$\begin{aligned} H_1 &= \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(H) \\ H_2 &= \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(S) \ \ \textit{mit } S := (T(H))^{\perp} \end{aligned}$$

Beweis. Betrachten $S = (T(H))^{\perp}$. Für $n > m$ gilt $T^n(S) \perp T^m(S)$:

$$(T^*)^m T^n = (T^*)^{m-1} \underbrace{T^*T}_{\mathrm{Id}_H} T^{n-1} = (T^*)^{m-1} T^{n-1} = \ldots = T^{n-m}$$

Sind $x, y \in S$, so folgt

$$\langle T^n x, T^m y\rangle = \langle (T^*)^m T^n x, y\rangle = \left\langle \underbrace{T^{\overbrace{n-m}^{\geq 1}}(x)}_{\in T(H)}, \underbrace{y}_{\perp T(H)} \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow \forall x, y \in S$: $\langle T^n x, T^m y\rangle = 0 \Rightarrow T^n(S) \perp T^m(S)$.

Konsequenz:

$$H_2 := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(S)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T^n(S)$$

Ist $x \perp H_2 \Rightarrow x \perp T^m(S)$ für alle $m \geq 0$.

$$S \oplus T(S) \oplus \cdots \oplus T^{m-1}(S) = (T(H))^{\perp^H} \oplus \left(T^2(H)\right)^{\perp^{T(H)}} \oplus \ldots \oplus (T^m(H))^{\perp} = (T^m(H))^H$$

$x \perp H_2 \Leftrightarrow x$ liegt in $T^m(H)$ für alle $m \geq 1$.

Also:

$$H_2^{\perp} = \bigcap_{m=0}^{\infty} T^m(H) =: H_1$$

Klar ist: $T(H_1) \subset H_1$, $T(H_2) \subset H_2$ nach Konstruktion der Räume.

Berechnen:[6]

$$T(H_1) = T\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} T^m(H)\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} T^m(H) = H_1$$

$\rightsquigarrow T|_{H_1} : H_1 \to H_1$ ist surjektiv $\rightsquigarrow T|_{H_1}$ ist unitär.

$$T|_{H_2} : H_2 = S \oplus T(S) \oplus T^2(S) \oplus \ldots \to H_2$$

mit $T(T^m(S)) = T^{m+1}(S) \rightsquigarrow T|_{H_2}$ ist Verschiebungsoperator

□

[6] $x \in H_1 \rightsquigarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} T^m(H) \rightsquigarrow x \in \bigcap_{m=2}^{\infty} T^m(H) \rightsquigarrow T(x) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} T^m(H) \rightsquigarrow T(x) \in H_1$

Satz 8.32. *Sei $T_2 : H_2 \to H_2$ eine n-fache Verschiebung. Dann existiert ein Hilbert-Raum $H_2 \subset K_2$ und ein unitärer Operator $\tilde{T}_2 : K_2 \to K_2$ mit*

$$\begin{array}{ccc} H_2 & \xrightarrow{T_2} & H_2 \\ \cap & & \cap \\ K_2 & \xrightarrow{\tilde{T}_2} & K_2 \end{array}$$
$$\tilde{T}_2 \,|_{H_2} = T_2.$$

Beweis. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in $H_2 \setminus T_2$. Wähle einen Hilbert-Raum L und eine Isometrie
$$A : L \simeq L \oplus \{e_1, \ldots, e_n\}$$
Definiere:
$$\begin{aligned} K_2 &:= H_1 \oplus L \\ \tilde{T}_2 &= T_2 \oplus A. \end{aligned}$$
□

$(B, \mathcal{D}(B))$ sei ein maximal symmetrischer Operator in $H \rightsquigarrow$ Defektindex $(0, n)$.

Cayley-Transformation: $C(B) : H \to H$. $C(B)$ ist eine Isometrie.

Wold-Zerlegung: $H = H_1 \oplus H_2$ mit $C(B)\,|_{H_1}$ unitär und $C(B)\,|_{H_2}$ Verschiebung.

Dann existiert ein Hilbert-Raum $H_2 \subset K_2$ und eine unitäre Erweiterung
$$\widetilde{C(B)} : K_2 \to K_2$$
von $C(B)\,|_{H_2}$. Dann gilt
$$H = H_1 \oplus H_2 \subset H_1 \oplus K_2$$
$$\begin{array}{ccc} H = H_1 \oplus H_2 & \xrightarrow{C(B) = C(B)|_{H_1} \oplus C(B)|_{H_2}} & H_1 \oplus H_2 = H \\ \cap & & \cap \\ H_1 \oplus K_2 & \xrightarrow{C(B)|_{H_1} \oplus \widetilde{C(B)} \text{ unitär}} & H_1 \oplus K_2 \end{array}$$

Konsequenz:

Nojmark **Satz.** *(Nojmark, 8.23) Jeder symmetrische Operator $(A, \mathcal{D}(A))$ in H besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung in einem H umfassenden Hilbert-Raum.*

8.3. Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren.

$E : \mathcal{A} \to \operatorname{Proj}(H)$ - Spektralmaß $(\Omega, \mathcal{A})$

Definiert: f meßbar, beschränkt:
$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\lambda)\, dE(\lambda) &: H \to H \qquad \text{stetiger Operator} \\ \left\| \int_\Omega f(\lambda)\, dE(\lambda) \right\| &\le \sup_{\lambda \in \Omega} |f(\lambda)|. \end{aligned}$$

Sei $f : \Omega \to [0, \infty)$ nicht beschränkt. Betrachte
$$f_n(\lambda) = \min\{f(\lambda), n\} = \begin{cases} f(\lambda) & \text{für } f(\lambda) \le n \\ n & \text{für } f(\lambda) > n \end{cases}$$

Dann gilt $f_n \to f$ punktweise, f_n sind beschränkt und $\mathcal{A}$-meßbar.
$$\int_\Omega f_n(\lambda)\, dE(\lambda) : H \to H$$

ist ein wohl-definierter, beschränkter Operator.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \left\{ x \in H \,\middle|\, \int_\Omega |f(\lambda)|^2 \, dE_x(\lambda) < \infty \right\} \\ x_n &= \left(\int_\Omega f_n(\lambda) \, dE(\lambda) \right) x. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \int_\Omega (f_n(\lambda) - f_m(\lambda)) \, dE(\lambda) \, x \right\|^2 = \int_\Omega |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)|^2 \, dE_x(\lambda)$$

Lebesque-Satz: Dies ist eine Cauchy-Folge.

$\rightsquigarrow$ Es entsteht ein Operator

$$\int_\Omega f(\lambda) \, dE(\lambda) : \mathcal{D} \subset H \to H$$

$$\boxed{\int_\Omega f(\lambda) \, dE(\lambda) \, x = \lim_{n \to \infty} \left[\int_\Omega f_n(\lambda) \, dE(\lambda) \right] x \quad \text{für } x \in \mathcal{D}}$$

Definitionsbereich:

$$\left\{ x \in H \,\middle|\, \int_\Omega |f(\lambda)|^2 \, dE_x(\lambda) < \infty \right\} = \left\{ x \in H \,\middle|\, \lim_{n \to \infty} \int f_n(\lambda) \, dE(\lambda) \, x \text{ existiert} \right\}$$

Satz 8.33. *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar, so ist der Operator*

$$\boxed{(A, \mathcal{D}(A)) := \left(\int_\Omega f(\lambda) \, dE(\lambda), \mathcal{D} \right)}$$

stets ein abgeschlossener Operator mit <u>dichtem</u> Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset H$. Es gilt weiterhin:

(1) $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$
(2)

$$\boxed{A^* = \int_\Omega \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)}$$

(3) $\sigma_r(A) = \emptyset \rightsquigarrow \sigma(A) = \sigma_a(A)$.

Satz 8.34. *(Spektraltheorem für selbstadjungierte Opertoren)* Spektralsatz selbstadj. Op.
$(A, \mathcal{D}(A))$ sei selbstadjungierter Operator, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^1$ - Spektrum
Dann existiert genau ein reguläres Spektralmaß $E : \mathcal{B}(\sigma(A)) \to Proj(H)$ mit

$$\boxed{A = \int_{\sigma(A)} \lambda \cdot dE(\lambda)}$$

Literatur

[1] Hizehuch, Scharlau: Funktionalanalysis, BI
[2] Achieser, Glasmann: Lineare Operatoren im Hilbert-Raum, Akademie-Verlag
[3] W. Rudin, Functional analysis, Mc Graw-Hill
[4] M Schlechter, Principles of functional analysis, AMS, Grad Stud. in Math. 36, 2002
[5] Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer

Index