GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Mitschrift zur Vorlesung von Dr. Recke im Sommersemester 2003

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Eine gewöhnliche (bzw. partielle) Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion einer (bzw. mehrerer) Variablen, in die die Funktion und einige ihrer Ableitungen (partiellen Ableitungen) eingehen.

gewöhnliche DGL: $\boxed{0 = F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots\right)}$

partielle DGL: $\boxed{0 = F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,y), \ldots\right)}$

1.1. **Sprachregelungen.**

(1) Differentialgleichung n-ter Ordnung in Normalform
Geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$
Ges.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \quad \forall t \in I}$$

(2) Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung in Normalform
Geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$
Ges.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I}$$

Nicht Gegenstand der Vorlesung sind z.B.

- implizite DGLn $f(t, x(t), x'(t)) = 0$
- DGLn mit abweichendem Argument $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$ fixiert
- DGL mit nichtlokalem Term: $x'(t) = f\left(t, x(t), \int_I x(s)\, ds\right)$
- Algebro-DGLsysteme: $x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t))$, $0 = f_2(t, x_1(t), x_2(t))$

Transformation von (1) in (2):

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x(t) \\ x_2(t) &:= x'(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= x^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

führt auf

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Bemerkung. Ein System von DGLn der Art

$$\begin{aligned} x_1^{(n_1)}(t) &= f_1\left(t, x_1(t), \ldots, x_1^{(n_1-1)}(t), x_2(t), \ldots, x_2^{(n_2-1)}(t), \ldots, x_m(t), x_m'(t), \ldots, x_m^{(n_m-1)}(t)\right) \\ &\vdots \\ x_m^{(n_m)}(t) &= f_m(\ldots) \end{aligned}$$

ist analog in ein DGLsystem der Art (2) (der Ordnung $n_1 + \ldots + n_m$) transformierbar.

Definition 1.1. (1) bzw. (2) heißen autonom, wenn $f(t, x_1, \dots, x_n)$ bzw. $f(t, x)$ unabhängig von t sind für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R}^n$ (die in Frage kommen), ansonsten heißen (1) bzw. (2) nicht-autonom. autonom

Beispiel. $x'(t) = (t+1)\, x(t)$ ist nicht-autonom: $f(t, x) = (t+1)\, x$, $U = \mathbb{R}^2$

$x''(t) = x'(t) + \sin(x(t)) + 5$ ist autonom: $f(t, x_1, x_2) = \sin x_1 + x_2 + 5$, $U = \mathbb{R}^3$

Bemerkung. (1) bzw. (2) kann in ein autonomes DGLsystem $(n+1)$-ter Ordnung transformiert werden

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= f\left(s(t), x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right) \\ s'(t) &= 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(s(t), x(t)) \\ s'(t) &= 1. \end{aligned}$$

$s(t) := t$.

Definition 1.2. (1) bzw. (2) heißen linear, wenn linear

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = a_1(t)\, x_1 + \dots + a_n(t)\, x_n + b(t)$$

mit $a_j(t), b(t) \in \mathbb{R}$ bzw.

$$f(t, x) = A(t)\, x + b(t)$$

mit $A(t) \in M(n \times n)$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, ansonsten nicht-linear.

1.2. Beispiele.

Beispiel 1.3. Mathematisches Pendel

Idealisierung:

- ebene Bewegung
- Pendelstange inkompressibel, bewegungsfrei, masselos
- Masse volumenfrei
- keine Reibungen

Ort: $l \cdot (\sin x, -\cos x)$

Geschwindigkeit: $l \cdot (\cos x \cdot x', \sin x \cdot x') = l \cdot (\cos x, \sin x) \cdot x'$

Tangentialkomponente der Beschleunigung: $l \cdot (\cos x, \sin x) \cdot x''$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} m \cdot l \cdot (\cos x, \sin x) \cdot x'' &= \langle (0, -mg), (\cos x, \sin x) \rangle \cdot (\cos x, \sin x) \\ m \cdot l \cdot x'' &= -mg \cdot \sin x \end{aligned}$$

Dies führt auf folgende autonome, nichtlineare DGL 2. Ordnung:

$$\boxed{x''(t) = -\frac{g}{l} \sin(x(t))}$$

Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{g}{l} \sin x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x'(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

Beispiel 1.4. Eulerscher Knickstab

$t \in [0, l]$ Bogenlänge, $(\xi(t), \eta(t))$ sei die Position, $x(t)$ der Winkel des Stabes in der Ebene

Idealisierungen:

- Stab dünn, elastisch, inkompressibel
- keine Schleifen, ebene Beulform

$$\int_{t_0}^{t} \left[\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt = t - t_0$$

$$\begin{aligned}
\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2 &= 1 \\
\frac{d\eta}{d\xi}(\xi(t)) &= \tan x(t) \\
\rightsquigarrow \eta'(t) &= \tan x(t) \cdot \xi'(t) = \tan x(t) \cdot \left[1 - \eta'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
\rightsquigarrow \eta'(t)^2 &= \frac{\tan^2 x(t)}{1 + \tan^2 x(t)} = \sin^2 x(t) \\
\rightsquigarrow \eta'(t) &= \sin x(t) \\
p\eta(t) &= -c(t)\, x'(t)
\end{aligned}$$

Materialverhalten: Kraftmoment bzgl. der ξ-Achse des Druckes $p\eta$ wird durch das Bestreben des Stabes, Nullkrümmung zu haben, in Gleichgewicht gehalten. Dieses "Bestreben" (Biegungsabhängiges Kraftmoment) sei $c(t)\, x'(t)$.

$$\begin{aligned}
\eta' &= \sin x \\
\text{bzw. } \eta' &= \left(-\frac{c}{p} x'\right)' = -\frac{c(t)}{p} x'' - \frac{c'(t)\, x'(t)}{p} = -\frac{c(t)}{p} x''(t) \\
\rightsquigarrow x''(s) &= -\frac{p}{c} \sin x(s)
\end{aligned}$$

Randwertaufgabe:

$$\boxed{x''(s) = -\frac{p}{c} \sin x(s)}$$

gelenkig gelagert: $x'(0) = x'(l) = 0$

fest eingespannt: $x(0) = x(l) = 0$

Beispiel 1.5. Räuber-Beute-Modelle

$x(t) \geq 0$: Anzahl (Dichte) der Beute-Population zum Zeitpunkt t

$y(t) \geq 0$: Anzahl (Dichte) der Räuber-Population zum Zeitpunkt t

$a > 0$: Vermehrungsrate minus Sterberate der Beutepopulation

$d > 0$: Sterberate minus Vermehrungsrate der Räuberpopulation

xy: Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Räuber und Beute

Autonomes nichtlineares DGLsystem 2. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} x' &=& ax - bxy & \quad b > 0 \\ y' &=& cxy - dy & \quad c > 0 \end{array}}$$

$$f(t, x, y) = (ax - bxy, cxy - dy)$$

Beispiel 1.6. Ein elektrischer Schwingkreis

In Reihe geschaltet:

- Widerstand $R > 0$: $U_R = R \cdot I$
- Spule $L > 0 : U_L = L \cdot I'$
- Kondensator $C > 0$: $I = C \cdot U_C'$

Kirchhoff-Gesetz: $I_R = I_L = I_C = I$, $U(t) = U_R + U_L + U_C$

$$U' = U_R' + U_L' + U_C' = RI' + LI'' + \frac{I}{C}$$

Dies führt auf eine lineare nicht-autonome DGL 2. Ordnung:

$$\boxed{I'' = \frac{1}{L}\left(U' - \frac{I}{C} - RI'\right)}$$

$$f(t, x_1, x_2) = \frac{1}{L}\left(U' - \frac{x_1}{C} - Rx_2\right) = \underbrace{a_1(t)}_{-\frac{1}{LC}} x_1 + \underbrace{a_2(t)}_{-\frac{R}{L}} x_2 + \underbrace{b(t)}_{\frac{U'(t)}{L}}$$

Beispiel 1.7. n-Körper-Problem

$$m_i \cdot \overrightarrow{x_i}''(t) = \sum_{j \neq i} \left[-\gamma \frac{m_i m_j}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|}\right], \qquad i = 1, \ldots, n$$

$\overrightarrow{x_i} = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}) \in \mathbb{R}^3$:

$$m_i x_{ij}'' = \sum_{k \neq i} -\gamma \frac{m_i m_k}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|^2} \cdot \frac{x_{ij} - x_{kj}}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, 3$$

$3n$ skalare Gleichungen 2. Ordnung $\rightsquigarrow$ nichtlin. autonomes DGLsystem $6n$-ter Ordnung

$$\begin{aligned}
U(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) &= -\frac{\gamma}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} \frac{m_i m_j}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|} \qquad U : U \subseteq \left(\mathbb{R}^3\right)^n \to \mathbb{R} \\
\text{mit } U &= \left\{(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^n | \overrightarrow{x_i} \neq \overrightarrow{x_j} \forall i \neq j\right\} \quad \text{offen im } \left(\mathbb{R}^3\right)^n \\
\nabla_{\overrightarrow{x_i}} U(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) &= \left(\frac{\partial U(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})}{\partial x_{i1}}, \frac{\partial U(\ldots)}{\partial x_{i2}}, \frac{\partial U(\ldots)}{\partial x_{i3}}\right) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i1}}\left[-\frac{\gamma}{2} \sum_{k,j=1, k \neq j}^{n} \frac{m_k m_j}{\|\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_j}\|}\right] = -2 \cdot \frac{\gamma}{2} \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (x_{i1} - x_{j1})$$

Dies führt auf

$$\boxed{m_i \overrightarrow{x_i}'' = -\nabla_{\overrightarrow{x_i}} U(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})}$$

"gute" Lösung:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, i \neq j} \left\{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|, \frac{1}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|}\right\} < \infty,$$

d.h. für alle Zeiten sind Körper nicht unendlich weit entfernt und auch nicht ganz nah zueinander.

Frage: Ist die Vereinigung aller Orbits $\left\{\overrightarrow{x_1}(t), \ldots, \overrightarrow{x_n}(t) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^n | t \in \mathbb{R}\right\}$ aller "guten" Lösungen offen und dicht in $\left(\mathbb{R}^3\right)^n$?

2. Elementare analytische Lösungsmethoden

autonome DGL

2.1. Autonome Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Sei

$$\boxed{x'(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}}$$

Existiert F, so daß $F' = \frac{1}{f}$, so ist

$$\begin{aligned} F(x)' &= \frac{x'}{f(x)} = 1 \\ \rightsquigarrow F(x(t)) - F(x(t_0)) &= \int_{t_0}^{t} F'(x)\,dt = t - t_0 \\ \rightsquigarrow x(t) &= F^{-1}(t - t_0 + F(x(t_0))) \end{aligned}$$

Satz 2.1. *Sei $f : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, f stetig.*
Sei $F : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $F' = \frac{1}{f}$ (F ist streng monoton auf $J \rightsquigarrow F^{-1}$ existiert auf $F(J)$). Sei $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{x(t) := F^{-1}(t - t_0) \qquad \text{für } t \in t_0 + F(J)}$$

Dann gilt:

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad \text{für } t \in t_0 + F(J).$$

Beweis.

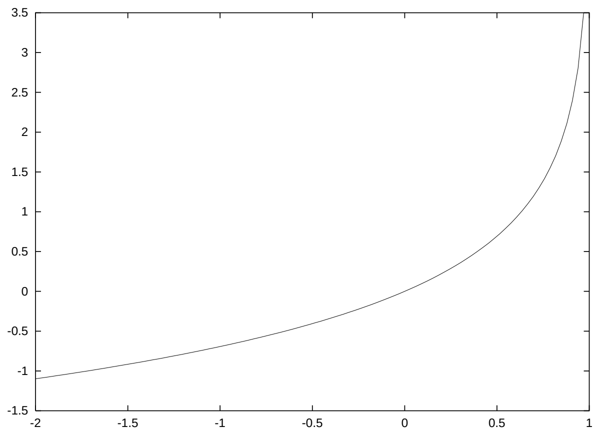
$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}F^{-1}(t - t_0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t - t_0))} = f\left(F^{-1}(t - t_0)\right) = f(x(t))$$

□

Beispiel. $x' = e^x$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \qquad J = \mathbb{R} \\ \rightsquigarrow F'(x) &= \frac{1}{e^x} = e^{-x} \\ \rightsquigarrow F(x) &= -e^{-x}, \qquad F(J) = (-\infty, 0) \\ \rightsquigarrow F^{-1}(y) &= -\ln(-y) \\ \rightsquigarrow x(t) &= -\ln(-t + t_0), \qquad t \in t_0 + (-\infty, 0) = (-\infty, t_0) \end{aligned}$$

Andere Lösungen existieren nicht.



$x(t) = -\ln(-t + 1)$

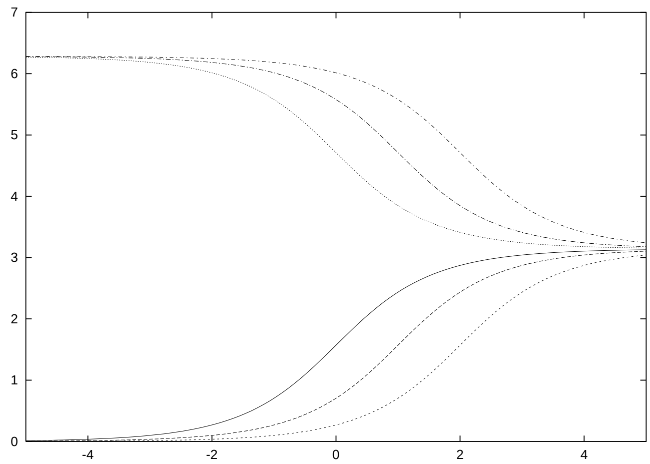
Bemerkung. Sei $\tilde{F} := F + c$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{-1}(y) &= F^{-1}(y-c) \\ \rightsquigarrow \tilde{x}(t) &= \tilde{F}^{-1}(t-t_0) = F^{-1}(t-t_0-c) \quad \text{für } t \in t_0 + \tilde{F}(J) = t_0 + c + F(J) \end{aligned}$$

Also hebt sich der Parameter weg. Mit anderer Stammfunktion bekommt man die gleiche Lösung.

Beispiel. $x' = \sin x,\ f(x) = \sin x,\ J = (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\sin x} \\ \rightsquigarrow F(x) &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad F(J) = \mathbb{R} \\ t - t_0 &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \\ e^{t-t_0} &= \left|\tan\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \tan\frac{x}{2} & k \text{ gerade} \\ -\tan\frac{x}{2} & k \text{ ungerade} \end{cases} \\ x(t) &= \begin{cases} 2\arctan\left(e^{t-t_0}\right) + k\pi & k \text{ gerade} \\ 2\arctan\left(-e^{t-t_0}\right) + (k+1)\pi & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



$x(t)$ für $k \in \{0,1\}$ und $t_0 \in \{0,1,2\}$

Die stationäre Lösung $x(t) = \pi$ ist asymptotisch stabil (mit Einzugsbereich $(0, 2\pi)$):

$$\begin{array}{llll} k=0: & t \to -\infty: \ x(t) \searrow 0 & & t \to \infty: \ x(t) \nearrow \pi \\ k=1: & t \to -\infty: \ x(t) \nearrow 2\pi & & t \to \infty: \ x(t) \searrow \pi \end{array}$$

<u>Lösungsalgorithmus für $x' = f(x)$</u>:

(1) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f und zerlege ihn in disjunkte Intervalle $J_1, J_2, \ldots$

(2) Bestimme die Nullstellen von f und zerlege $\{x \in J_k \,|\, f(x) \neq 0\}$ in Intervalle $J_{k,1}, J_{k,2}, \ldots$

(3) Bestimme F mit $F' = \frac{1}{f}$ auf jedem $J_{k,l}$.

(4) Berechne $x(t) = F^{-1}(t-t_0)$ für $t \in t_0 + F(J_{k,l})$.

2.2. Gleichung mit getrennten Variablen.

28.04.03

getrennte Variablen

Definition 2.2. Eine Gleichung

$$\boxed{x'(t) = f(x) \cdot g(t)}$$

heißt Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

$$\frac{x'}{f} = g \quad \rightsquigarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(y)} dy = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

Satz 2.3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $I_x, I_\xi \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle.*

Seien $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $\xi : I_\xi \to U$ differenzierbar mit $\xi'(\tau) = f(\xi(\tau))\ \forall \tau \in I_\xi$.

Sei $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $G : I_x \to \tau_0 + I_\xi$ differenzierbar, $G'(t) =: g(t)\ \forall t \in I_x$.

Sei $x : I_x \to U$ mit

$$\boxed{x(t) := \xi(G(t) - \tau_0)}$$

Dann gilt $x'(t) = f(x(t)) \cdot g(t)\ \forall t \in I_x$.

Beweis.

$$\frac{d}{dt}\xi(G(t) - \tau_0) = \xi'(G(t) - \tau_0)\, G'(t) = f(\xi(G(t) - \tau_0))\, g(t) = f(x(t))\, g(t)$$

$\square$

Bemerkung.

(1) $x'(t) = f(x(t))\, g(t)$ wurde ersetzt durch $\xi'(\tau) = f(\xi(\tau))$, $G'(t) = g(t)$.

(2) Bei fixiertem I_ξ muß τ_0 geeignet und das I_x geeignet klein gewählt werden.

Spezialfall $n = 1$: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle.

$f : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g : I \to \mathbb{R}$ stetig.

$F : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $F' = \frac{1}{f}$.

$\tau_0 \in \mathbb{R}$, $G : I \to \tau_0 + F(J)$, $G' = g$

$x(t) := F^{-1}(G(t) - \tau_0)$

Dann ist $x'(t) = f(x(t)) \cdot g(t)\ \forall t \in I$.

$I = I_x$, $J = U$, $F(I) \subseteq I_\xi$, $F^{-1} = \xi$, $\left(F^{-1}\right)'(\tau) = \frac{1}{F'(F^{-1}(\tau))} = f\left(F^{-1}(\tau)\right)$.

Algorithmus ($n = 1$):

(1) Wähle J, so daß f auf J definiert ist und ungleich Null.

(2) Wähle F mit $F' = \frac{1}{f}$ auf J.

(3) Wähle G mit $G' = g$ auf I.

(4) Wähle τ_0 und verkleinere I gegebenenfalls, so daß $G(I) \subseteq \tau_0 + F(J)$.

(5) Berechne $x(t) = F^{-1}(G(t) - \tau_0)$.

Beispiel.

$$x'(t) = -\frac{t}{2x(t)} = f(x(t)) \cdot g(t) \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(t) = -\frac{t}{2}$$

$J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$F(J_1) = F(J_2) = (0, \infty)$.

Sei zunächst $I = \mathbb{R}$,

$$G(t) = -\frac{t^2}{4}$$

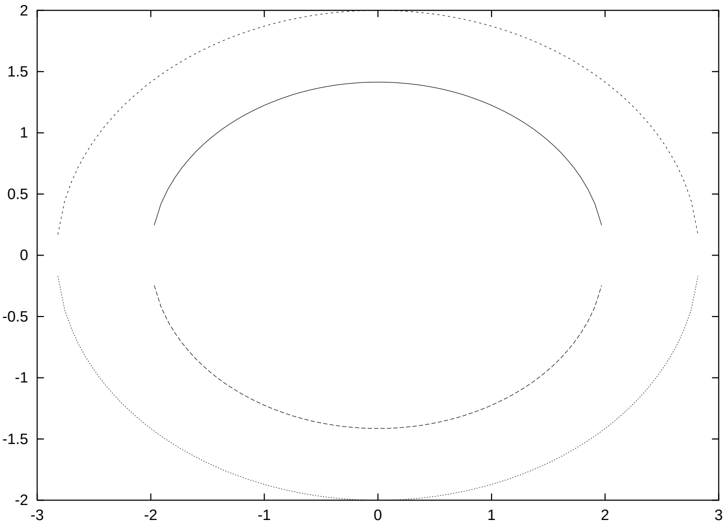
$G(I) = (-\infty, 0) \overset{?}{\subseteq} \tau_0 + F(J) = (\tau_0, \infty)$.

Wir wählen I und τ_0 so, daß $\forall t \in I$: $-\frac{t^2}{4} \in (\tau_0, \infty)$, d.h. $t^2 < -4\tau_0$.

$\rightsquigarrow \tau_0 < 0$ und $t \in (-2\sqrt{-\tau_0}, 2\sqrt{-\tau_0}) =: I$.

$$F(x) = y = \frac{x^2}{2} \quad \rightsquigarrow x(y) = \begin{cases} \sqrt{2y} & y \in J_2 = (0, \infty) \\ \sqrt{-2y} & y \in J_1 = (-\infty, 0) \end{cases} \qquad y \in (0, \infty)$$

$$\rightsquigarrow x(t) = \pm\sqrt{2\left(-\frac{t^2}{4} - \tau_0\right)} \quad \text{für } |t| < 2\sqrt{-\tau_0}$$



$\pm x(t)$ für $\tau_0 = -1, -2$

Beispiel.

$$x'(t) = \frac{t}{x^2 + 1} = f(x) \cdot g(t) \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(t) = t, \quad J = \mathbb{R}$$

$F'(x) = x^2 + 1 \rightsquigarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$, $F(J) = \mathbb{R}$

$G'(t) = t \rightsquigarrow G(t) = \frac{1}{2}t^2$: $\frac{t^2}{2} \in \tau_0 + \mathbb{R} = \mathbb{R}\ \forall t \in I$

$$x(t) = F^{-1}\left(\frac{t^2}{2} - \tau_0\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tau_0 \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

2.3. **Koordinatentransformationen (Substitutionen).**

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t) &= \varphi(t, y(t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow f(t, \varphi(t, y(t))) = x'(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(t, y(t)) = \partial_t \varphi(t, y(t)) + \partial_y \varphi(t, y(t)) \cdot y'(t) \\ \rightsquigarrow y'(t) &= [\partial_y \varphi(t, y(t))]^{-1} (f(t, \varphi(t, y(t))) - \partial_t \varphi(t, y(t))) \end{aligned}$$

30.04.03

Satz 2.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.*

Sei $\varphi : I \times V \to U$ differenzierbar, $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Sei $\det \partial_y \varphi(t, y) \neq 0 \ \forall t \in I,\ y \in V$.

Dann ist $x : I \to U$ Lösung von $x'(t) = f(t, x(t))$ genau dann, wenn $y : I \to V$ mit

$$\boxed{x(t) = \varphi(t, y(t))}$$

Lösung ist von

$$\boxed{y'(t) = [\partial_y \varphi(t, y(t))]^{-1} [f(t, \varphi(t, y(t))) - \partial_t \varphi(t, y(t))]}$$

Euler-homogene DGL

2.3.1. *Beispielklasse: homogene Gleichungen.*

$$\boxed{x'(t) = F\left(\frac{x}{t}\right) \qquad x = ty}$$

$$f(t, x) = F\left(\frac{x}{t}\right) \quad \rightsquigarrow \quad f(\lambda t, \lambda x) = F\left(\frac{\lambda x}{\lambda t}\right) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Substitution

$$\boxed{\varphi(t, y) := ty}$$

führt mit

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi(t, y) &= t \cdot I_n \qquad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}(t, y_1, \ldots, y_n) = t \cdot \delta_{j,k} \\ \partial_t \varphi(t, y) &= y \end{aligned}$$

auf eine Gleichung mit getrennten Variablen:

$$\boxed{y'(t) = \frac{1}{t}(F(y) - y(t))}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} \\ y'(t) &= \frac{1}{t}\left(y + y^2 - y\right) = \frac{y^2}{t} \\ -\frac{1}{y} &= \ln|t| + C \\ y &= -\frac{1}{\ln|t| + C} \\ \rightsquigarrow x(t) &= \varphi(t, y(t)) = -\frac{t}{\ln|t| + C} \end{aligned}$$

2.3.2. *Beispielklasse* $\boxed{x' = F(at + bx + c)}$.

$x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}^n$. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Substitution

$$\boxed{y := at + bx + c}$$

führt mit

$$\begin{aligned}
\varphi(t, y) &= x = \frac{y - at - c}{b} \\
\partial_y \varphi(t, y) &= \frac{1}{b} I_n \\
\partial_t \varphi(t, y) &= -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

auf ein autonomes Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(t) = b\left[F(y) + \frac{a}{b}\right] = bF(y) + a}$$

3. Die Anfangswertaufgabe und ihre Lösungseigenschaften

Anfangswertaufgabe

Definition 3.1. Die Aufgaben

geg.: $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$.

ges.: $\varepsilon > 0$, $x \in C^1\left((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \mathbb{R}^n\right)$ mit

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \tag{3.1}$$

$$\text{und } x(t_0) = x_0 \quad \text{(Anfangsbedingung)} \tag{3.2}$$

bzw.

geg.: $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$.

ges.: $\varepsilon > 0$, $x \in C^n\left((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \mathbb{R}\right)$ mit

$$x^{(n)}(t) = f\underbrace{\left(t, x(t), x'(t) \ldots, x^{(n-1)}(t)\right)}_{\in U} \tag{3.3}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \quad \text{(Anfangsbedingungen)} \tag{3.4}$$

heißen <u>Anfangswertaufgaben</u>.

Beispiel 3.2. Pendelbewegung:

$$x'' = -\frac{g}{l} \sin x$$
$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_1$$

Beispiel 3.3. Räuber-Beute-Modell

$$x' = ax - bxy$$
$$y' = cxy - dx$$
$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0$$

Beispiel 3.4. elektrischer Schwingkreis

$$I' = \frac{1}{L}\left(U(t) - \frac{I}{C} - RI'\right)$$

Beispiel 3.5. Eulerscher Knickstab

$$x''(s) = -\frac{p}{c} \sin x(s) \quad 0 \le s \le l$$

Dirichlet-Randwertaufgabe: $x(0) = x(l) = 0$

Naumann-Randwertaufgabe: $x'(0) = x'(l) = 0$

Bemerkung. Wenn (3.3) in (3.1) transformiert wird durch $x_1 := x$, $x_2 := x'$, …, $x_n := x^{(n-1)}$, dann geht (3.4) in (3.2) über.

3.1. Transformation von (3.1), (3.2) in einer Volterra'sche Integralgleichung.

Lemma 3.6. *Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, x_0) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $x : I \to \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *und*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Volterra-Integralgleichung

(2) $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ *und*

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall t \in I}$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds &= \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\\ \text{und } \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds &= x(t)-x(t_0)=x(t)-x_0\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): x ist differenzierbar und $x'(t)=f(t,x(t))$ und folglich ist x' stetig, $x(t_0)=x_0$.

□

3.1.1. *Iterationsverfahren zur Lösung der Volterra-Integralgleichung.*

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds \quad \forall t\in I$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1(t) &:= x_0\\ x_{j+1}(t) &:= x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_j(s))\,ds\end{aligned}}$$

Beispiel. $x'=x$, $n=1$, $f(t,x)=x$, $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0\\ x_2(t) &= x_0+\int_{t_0}^{t} x_0ds=x_0+x_0(t-t_0)=x_0(1+t-t_0)\\ x_3(t) &= x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_2(s))\,ds\\ &= x_0+\int_{t_0}^{t}(x_0(1-t_0)+x_0s)\,ds\\ &= x_0+\left[x_0(1-t_0)s+x_0\frac{s^2}{2}\right]_{t_0}^{t}\\ &= x_0+x_0(1-t_0)(t-t_0)+\frac{x_0}{2}\left(t^2-t_0^2\right)\end{aligned}$$

Setzen $t_0=0$:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_0\\ x_2(t) &= x_0(1+t)\\ x_3(t) &= x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\\ x_4(t) &= x_0+x_0\int_0^t\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds=x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)\\ x_j(t) &= x_0\sum_{k=0}^{j}\frac{t^k}{k!}\xrightarrow{j\to\infty}x_0e^t\\ \frac{d}{dt}x_0e^t &= x_0e^t\\ x_0e^t|_{t=0} &= x_0\end{aligned}$$

05.05.03

3.2. Der Satz von Picard-Lindelöf.

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U offen. $(t_0, x_0) \in U$. Wir betrachten die Anfangswertaufgabe:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3.5}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.6}$$

Satz 3.7 (Picard-Lindelöf)**.** [Arnold] *Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist, so existiert genau eine Lösung von* (3.5), (3.6).

Picard-Lindelöf

Satz 3.8 (Picard-Lindelöf)**.** [Amann] *Sei f stetig. Gelte*

$$\begin{aligned} &\forall (t_*, x_*) \in U \quad \exists \delta > 0, L > 0 : \\ &\forall (t, x_1) \in U, |t - t_*| + \|x_1 - x_*\| \le \delta, \quad (t, x_2) \in U, |t - t_*| + \|x_2 - x_*\| \le \delta : \\ &\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| < L \cdot \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

und seien $a, b > 0$ so gewählt, daß

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \, | \, |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\} \subseteq U,$$

$$\varepsilon := \min \left\{ a, \frac{b}{\max\limits_{\substack{|t - t_0| \le a \\ \|x - x_0\| \le b}} \|f(t, x)\|} \right\}.$$

Dann <u>existiert genau eine Lösung</u> $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ von (3.5), (3.6).

Erinnerung: Lipschitz-Stetigkeit:

(1) $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u>, wenn ein $L > 0$ existiert, so daß

$$\boxed{\|f(x_1) - f(x_2)\| \le L \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X}$$

(a) Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt gleichmäßige Stetigkeit ($\varepsilon = L \cdot \delta$)

(b) $n = 1$, $X = [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig, denn es ex. kein $L < \infty$ mit

$$\frac{\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|}{|x_1 - x_2|} = \frac{1}{\left|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right|} \le L \quad \forall x_1, x_2 \in X = [0, 1]$$

(c) $n = 1$, $X = [a, b]$, f stetig differenzierbar $\rightsquigarrow$ f ist Lipschitz-stetig

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\theta)| \cdot |x_1 - x_2| \le \max_{\theta \in [a, b]} |f'(\theta)| \cdot |x_1 - x_2|$$

(d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig differenzierbar, aber ebenso nicht Lipschitz-stetig ($(0, 1)$ ist nicht abgeschlossen)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$:

$$\frac{\left|x_1^2 - x_2^2\right|}{|x_1 - x_2|} = |x_1 + x_2| \le L?$$

(2) $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>lokal Lipschitz-stetig</u>, wenn für alle $x_0 \in X$ ein $r > 0$ existiert, so daß $f\big|_{K(x_0, r) \cap X}$ Lipschitz-stetig ist.

(a) lokal Lipschitz-stetig $\rightsquigarrow$ stetig

(b) X offen, f stetig differenzierbar $\rightsquigarrow$ f ist lokal Lipschitz-stetig

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &\le \max_{0 \le \theta \le 1} \|f'(\theta x_1 + (1 - \theta) x_2)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &\le \underbrace{\max_{x \in K(x_1, \|x_1 - x_2\|) \cap X} \|f'(x)\|}_{=: L(x_0, r)} \cdot \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

$L(x_0, r)$ ist die lokale Lipschitz-Konstante

(c) Operatornorm: $A \in M(m \times n)$: $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ $(\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \; \forall x \in \mathbb{R}^n)$

(3) $f : X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz-stetig bzgl. der 2. Variable, wenn

$$\begin{aligned} &\forall (t_*, x_*) \in X \quad \exists \delta > 0, L > 0 : \\ &\forall (t, x_1) \in X, |t - t_*| + \|x_1 - x_*\| \leq \delta, \quad (t, x_2) \in X, |t - t_*| + \|x_2 - x_*\| \leq \delta : \\ &\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| < L \cdot \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Beweisidee: Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes auf die Volterra-Integralgleichung.

Satz 3.9 (Banach'scher Fixpunktsatz)**.** *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ abgeschlossen, $F : M \to M$ strikt kontraktiv, d.h.* Banach-scher Fixpunktsatz

$$\exists L \in [0, 1) : \quad \forall x_1, x_2 \in M : \quad \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\| .$$

Dann existiert genau ein $x_0 \in M$ mit

$$\boxed{F(x_0) = x_0}$$

Definition 3.10. Ein normierter Vektorraum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert, d.h. für jede Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ mit $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$ gilt: $\exists x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|x_n - x_0\| < \varepsilon$. vollständig

- Jeder endlich-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist vollständig.
- $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit Supremumsnorm ist vollständig: Sei $x_1, x_2, \ldots \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : \quad \max_{t \in [a,b]} \|x_n(t) - x_m(t)\| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Dann ist $x_1(t), x_2(t), \ldots$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ (vollständig) und wir definieren

$$x(t) := \lim_{j \to \infty} x_j(t)$$

Mit $m \to \infty$ in (3.7) erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall t \in [a, b] : \quad \|x(t) - x_n(t)\| \leq \varepsilon$$

Also konvergiert x_j gleichmäßig gegen x. Dann ist x stetig. Bilden wir nun noch das Maximum über alle t, so erhalten wir

$$\max_{t \in [a,b]} \|x(t) - x_n(t)\| \leq \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad \|x - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Beweis von Satz 3.8 von Picard-Lindelöf. 7.5.03

$$X := C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n), \quad \|x\| = \max_{|t - t_0| \leq \varepsilon} \|x(t)\|$$

ist vollständig.

$$M := \{x \in X \,|\, \|x(s) - x_0\| \leq b \quad \forall s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\} = K_X(x_0, b)$$

ist abgeschlossen: Sei $x_1, x_2, \ldots \in M$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} \|x_j - x\| = 0$ $(x_j(t) \to x(t)$ glm. auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$

$$\begin{aligned} & \|x_j(t) - x_0\| \leq b \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ \rightsquigarrow \quad & \|x(t) - x_0\| \leq b \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ \rightsquigarrow \quad & x \in M \end{aligned}$$

Sei

$$F : M \to M \quad [F(x)](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \text{für } |t - t_0| \leq \varepsilon \leq a$$

z.z.: $F(x) \in M \ \forall x \in M$. (also $F : M \to M$)

$$\begin{aligned}
\|F(x) - x_0\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - x_0 \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \right| \\
&\leq |t - t_0| \max_{|s-t_0| \leq \varepsilon} \|f(s, x(s))\| \\
&\leq \frac{b}{\max\limits_{|s-t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b} \|f(s, x(s))\|} \cdot \max_{|s-t_0| \leq \varepsilon} \|f(s, x(s))\| \\
&\leq b
\end{aligned}$$

Jetzt noch zu zeigen: F ist strikt kontraktiv.

Bemerkung. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, wenn $c_1, c_2 > 0$ existieren, so daß

$$\boxed{c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \ \forall x}$$

Einführung der neuen äquivalenten Norm in $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$:

$$|||x||| \quad := \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} \|x(t)\| \cdot e^{-Lt},$$

L sei die Lipschitzkonstante zu $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$.

$$\|x(t)\| \, e^{-L(t_0+\varepsilon)} \leq \underbrace{\|x(t)\| \, e^{-Lt}}_{|||x(t)|||} \leq \|x(t)\| \, e^{-L(t_0-\varepsilon)},$$

also sind $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent.

$$\begin{aligned}
|||F(x) - F(y)||| &= \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} \|F(x) - F(y)\| \, e^{-Lt} \\
&= \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right\| e^{-Lt} \\
&\leq \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds \cdot e^{-Lt} \\
&\leq L \cdot \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} e^{-Lt} \cdot \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| \, e^{-Ls} \cdot e^{Ls} ds \\
&\leq L \cdot \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} e^{-Lt} \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{\max_{|s-t_0| \leq \varepsilon} \|x(s) - y(s)\| \, e^{-Ls}}_{=|||x-y|||} \cdot e^{Ls} ds \\
&\leq L \cdot |||x - y||| \cdot \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} e^{-Lt} \cdot \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{Ls} ds}_{\frac{1}{L}\left(e^{Lt} - e^{Lt_0}\right)} \\
&= L \cdot |||x - y||| \cdot \max_{|t-t_0| \leq \varepsilon} \frac{1}{L} \left(1 - e^{L(t_0 - t)}\right) \\
&= |||x - y||| \cdot \left(1 - e^{-L\varepsilon}\right) \\
&< |||x - y|||
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Kontraktivität bzgl. der alten Norm:

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\| &= \max_{|t-t_0|\le\varepsilon}\left\|\int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds-\int_{t_0}^t f(s,y(s))\,dy\right\|\\ &\le L\cdot\max_{|t-t_0|\le\varepsilon}\int_{t_0}^t\|x(s)-y(s)\|\,ds\\ &\le L\cdot\|x-y\|\cdot\max_{|t-t_0|\le\varepsilon}\int_{t_0}^t 1ds\\ &= L\cdot\varepsilon\cdot\|x-y\|\end{aligned}$$

Wähle nun ε so klein, daß $\varepsilon<\frac{1}{L}$ gilt.

3.3. Der Satz von Peano.

Satz 3.11 (Peano)**.** *Sei f stetig. Dann existiert ein $\varepsilon>0$ und eine Lösung $x:[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}^n$ von* (3.5),(3.6). Peano

Beweis. Fixpunktsatz von Schauder □

Beispiel. $n=1$, $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(t,x)=\sqrt{|x|}$ ist stetig, $(t_0,x_0)=(0,0)$, also

$$x'(t)=\sqrt{|x(t)|},\quad x(0)=0$$

Die Lösungen sind nicht eindeutig:

$$\begin{aligned}1.\qquad x(t)&\equiv 0\\ 2.\qquad x(t)&=\begin{cases}\frac{1}{4}t^2 & t\ge 0\\ -\frac{1}{4}t^2 & t<0\end{cases}\end{aligned}$$

3.4. Fortsetzungen von Lösungen, maximale, unbeschränkt fortsetzbare Lösungen. 11.05.2003

$$\begin{aligned}x'(t)&=f(t,x(t))\\ x(t_0)&=x_0\end{aligned}$$

$f:U\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, U offen, $(t_0,x_0)\in U$.

Lösung: $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall, $t_0\in I$; $x\in C^1(I,\mathbb{R}^n)$; $x(t_0)=x_0$; $\forall t\in I$: $(t,x(t))\in U$, $x'(t)=f(t,x(t))$

Lemma 3.12 (lokale Eindeutigkeit impliziert globale Eindeutigkeit)**.** *Seien $x:I\to\mathbb{R}^n$ und $y:J\to\mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des AWP. Dann gilt* globale Eindeutigkeit

$$\boxed{x(t)=y(t)\quad\forall t\in I\cap J}$$

Beweis. Sei

$$t_*:=\sup\{t\in I\cap J\,|x(s)=y(s)\ \forall s\in[t_0,t]\}$$

Annahme: $t_*<\sup I\cap J$. Dann ist $x(t_*)=y(t_*)$ wegen Stetigkeit. Betrachte die AWA

$$\begin{aligned}z'(t)&=f(t,z(t))\\ z(t_*)&=x(t_*)=y(t_*)\end{aligned}\tag{3.8}$$

x und y sind Lösungen von (3.8), (3.8) ist eindeutig lösbar in $[t_*-\delta,t_*+\delta]$. Dann ist $x(t)=y(t)$ $\forall t\in[t_*-\delta,t_*+\delta]$. Widerspruch zur Definition von t_*. □

Definition 3.13.

(1) Seien $x:I\to\mathbb{R}^n$ und $y:J\to\mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der AWA mit $I\subsetneq J$. Dann heißt y Fortsetzung von x.

(2) Eine Lösung der AWA, die eine (bzw. keine) Fortsetzung besitzt, heißt fortsetzbar (bzw. nicht fortsetzbar oder maximal).

(3) Eine Lösung der AWA mit dem Definitionbereich $\mathbb{R}$ heißt unbeschränkt fortsetzbar.

Beispiel.

(1) $x'(t) = x(t)$, $x(t_0) = x_0 \rightsquigarrow x(t) = x_0 \cdot e^{t-t_0}$, $t \in \mathbb{R}$

(2) $x'(t) = x^2(t)$, $x(t_0) = x_0 \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0}+t_0-t}$, $t < \frac{1}{x_0} + t_0$

Lemma 3.14. *Der Definitionsbereich einer maximalen Lösung ist offen.*

Beweis. Sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung.

Annahme: I ist nicht offen. $t_1 := \max I \in I$. Betrachte

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_1) &= x(t_1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sei $y : [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (3.9). Dann ist

$$z(t) := \begin{cases} x(t) & t \in I \\ y(t) & t \in [t_1, t_1 + \varepsilon] \end{cases}$$

Fortsetzung von x. Widerspruch.

□

Lemma 3.15. *Die Anfangswertaufgabe besitzt <u>genau eine maximale Lösung</u>.*

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $x : I \to \mathbb{R}^n$, $y : J \to \mathbb{R}^n$ zwei maximale Lösungen, $I \neq J$. Dann ist

$$z(t) := \begin{cases} x(t) & t \in I \\ y(t) & t \in J \end{cases}$$

eine Fortsetzung von x und von y. Widerspruch

Existenz: Sei M die Menge aller Lösungen der AWA. Für $x \in M$ sei $t_-(x)$ bzw. $t_+(x)$ die linke bzw. rechte Intervallgrenze des Definitionsbereiches von x.

$$t_- := \inf_{x \in M} t_-(x) \quad t_+ := \sup_{x \in M} t_+(x).$$

Wir definieren eine Lösung $\tilde{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ der AWA:

Sei $t_* \in (t_-, t_+)$, dann existiert ein $x_1 \in M$ mit Definitionsbereich $I_1 \supseteq [t_0, t_* + \varepsilon]$. Setze

$$\tilde{x}(t) := x_1(t) \text{ für } t \in I_1.$$

Wegen Lemma 3.12 ist $\tilde{x}(t_*)$ eindeutig bestimmt (unabhängig von der Wahl des x_1).

$\tilde{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ ist korrekt definiert und ist Lösung nach Definition. $\tilde{x}$ ist nicht fortsetzbar nach Definition von t_- und t_+. Also ist $\tilde{x}$ die maximale Lösung.

□

max. Lsg. verläßt jedes Kompaktum nach endl. Zeit

Satz 3.16 (Verhalten nicht unbeschränkt fortsetzbarer Lösungen)**.** *Sei $U = I \times V$, $I \subseteq \mathbb{R}$, ein offenes Intervall, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $x : (t_-, t_+) \to V$ maximale Lösung der AWA, $t_+ < \sup I$.*

Dann gilt:

$$\boxed{\forall K \subset V \text{ abg., beschr.} \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [t_+ - \varepsilon, t_+) : x(t) \notin K}$$

Insbesondere: Wenn $V = \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\lim_{t \nearrow t_+} \|x(t)\| = \infty.$$

Beweis. Annahme: $\exists K \subset V$ abg., beschr.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_\varepsilon \in [t_+ - \varepsilon, t_+)$: $x(t) \in K$.

Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, und erhalten eine Folge $t_j \nearrow t_+$ mit $x(t_j) \in K$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ex. eine Teilfolge, so daß $x(t_{j_k}) \xrightarrow{k\to\infty} x_+ \in K$.

Wir betrachten die AWA:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_{j_k}) &= x(t_{j_k}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Der Satz von Picard-Lindelöf besagt: $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, so daß $\forall k \geq k_0$ die Lösung von (3.10) existiert und eindeutig bestimmt ist in $[t_{j_k} - \varepsilon, t_{j_k} + \varepsilon]$.

$t_{j_k} + \varepsilon > t_+$ für großes k. Dann läßt sich die Lösung x mit der Lösung von (3.10) über t_+ hinaus fortsetzen. Widerspruch.

□

Strategie, um unbeschränkt fortsetzbare Lösungen zu finden: Kontrolliere das Wachstum so, daß x nicht in endlicher Zeit gegen Unendlich streben kann.

Lemma 3.17 (Gronwall). *Sei* $z : [a,b] \to [0,\infty)$ *stetig,* $z_0, L \geq 0$, Gronwall

$$z(s) \leq z_0 + L \cdot \int_a^s z(t)\,dt \quad \forall s \in [a,b]$$

Dann gilt

$$\boxed{z(s) \leq z_0 \cdot e^{L(s-a)} \quad \forall s \in [a,b]}$$

Satz 3.18 (Lösungen von linearen DGLen sind unbeschränkt fortsetzbar). *: Sei* $A : \mathbb{R} \to M_n$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig. Dann ist jede Lösung von* $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ *unbeschränkt fortsetzbar.*

Beweis. Sei $x : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ maximale Lösung. Annahme: $t_+ < \infty$.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\,x(s) + b(s)]\,ds \\ \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t [\|A(s)\|\,\|x(s)\| + \|b(s)\|]\,ds \\ &\leq \|x_0\| + \underbrace{\max_{t_0 \leq s \leq t_+} \|A(s)\| \cdot}_{L} \int_{t_0}^t \|x(s)\|\,ds + \max_{t_0 \leq s \leq t_+} \|b(s)\| \cdot (t_+ - t_0) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.17 von Gronwall:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \underbrace{\left(\|x_0\| + \max_{t_0 \leq s \leq t_+} \|b(s)\|\,(t_+ - t_0)\right)}_{=:C} \cdot e^{L\cdot(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_+] \\ \rightsquigarrow\ x(t) &\in K\left(0, c \cdot e^{L\cdot(t_+ - t_0)}\right) \end{aligned}$$

Widerspruch zu Satz 3.16. □

3.5. Stetige (bzw. glatte) Abhängigkeit der Lösungen des AWP von den Daten. 14.05.03

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), \lambda) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig, U offen.

$$\begin{aligned} &\forall (t_*, x_*, \lambda_*) \in U \quad \exists \delta > 0, L > 0 : \\ &\forall (t, x_1, \lambda) \in U, |t - t_*| + \|x_1 - x_*\| + \|\lambda - \lambda_*\| < \delta, \\ &\forall (t, x_2, \lambda) \in U, |t - t_*| + \|x_2 - x_*\| + \|\lambda - \lambda_*\| < \delta : \\ &\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \le L \cdot \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Maximale Lösung von (3.11):

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}(t, t_0, x_0, \lambda) \text{ für } t \in (t_-(t_0, x_0, \lambda), t_+(t_0, x_0, \lambda)), \quad (t_0, x_0, \lambda) \in U \\ D &:= \{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,|(t_0, x_0, \lambda) \in U, t \in (t_-(t_0, x_0, \lambda), t_+(t_0, x_0, \lambda))\} \\ &= (t_-(t_0, x_0, \lambda), t_+(t_0, x_0, \lambda)) \times U \end{aligned}$$

Satz 3.19.

(1) $\hat{x}$ *ist stetig.*

(2) D *ist offen.*

(3) *Ist f k-fach stetig differenzierbar, so ist auch $\hat{x}$ k-fach stetig differenzierbar.*

Beispiel. $n = 1$, $m = 0$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(t, x) &= |x|^{\frac{3}{2}} \qquad f \in C^1, f \notin C^2 \\ x'(t) &= |x(t)|^{\frac{3}{2}}, \qquad x(t_0) = x_0 \\ \hat{x}(t, t_0, x_0) &= \begin{cases} \left(-\frac{t}{2} + \frac{t_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)^{-2} & \text{für } x_0 > 0, \quad t < t_0 + \frac{2}{\sqrt{x_0}} \\ 0 & \text{für } x_0 = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ -\left(-\frac{t}{2} + \frac{t_0}{2} - \frac{1}{\sqrt{-x_0}}\right)^{-2} & \text{für } x_0 < 0, \quad t > t_0 - \frac{2}{\sqrt{x_0}} \end{cases} \\ &\hat{x} \in C^1, \hat{x} \notin C^2. \end{aligned}$$

Beweis zu (1).

$$\begin{aligned} \left\|\hat{x}(t, t_0, x_0, \lambda) - \hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{\lambda}\right)\right\| \le\ & \left\|\hat{x}(t, t_0, x_0, \lambda) - \hat{x}\left(\tilde{t}, t_0, x_0, \lambda\right)\right\| \\ &+ \left\|\hat{x}\left(\tilde{t}, t_0, x_0, \lambda\right) - \hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, x_0, \lambda\right)\right\| \\ &+ \left\|\hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, x_0, \lambda\right) - \hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \lambda\right)\right\| \\ &+ \left\|\hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \lambda\right) - \hat{x}\left(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{\lambda}\right)\right\| \end{aligned}$$

Jeweils abschätzen:

Mittels $\left\|x(t) - x\left(\tilde{t}\right)\right\| \le \sup_\vartheta \|x'(\vartheta)\| \left|t - \tilde{t}\right|$:

$$\left\|\hat{x}(t, t_0, x_0, \lambda) - \hat{x}\left(\tilde{t}, t_0, x_0, \lambda\right)\right\| \le \sup_{\vartheta \in [t, \tilde{t}]} \|f(\vartheta, \hat{x}(\vartheta, t_0, x_0, \lambda), \lambda)\| \left|\tilde{t} - t\right| \le M \cdot \left|\tilde{t} - t\right| \xrightarrow{\tilde{t} \to t} 0$$

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)\right\| &= \left\|x_0-\tilde{x}_0+\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)-f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right),\lambda\right)ds\right\| \\
&\le \left\|x_0-\tilde{x}_0\right\|+\left|\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \left\|f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)-f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right),\lambda\right)\right\|ds\right| \\
&\le \left\|x_0-\tilde{x}_0\right\|+L\cdot\left|\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \left\|\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)\right\|ds\right|
\end{aligned}$$

Und mittels Lemma 3.17 von Gronwall:

$$\left\|\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)\right\| \le \left\|x_0-\tilde{x}_0\right\|\cdot e^{L\left|\tilde{t}_0-\tilde{t}\right|} \xrightarrow{\tilde{x}_0\to x_0} 0$$

Mittels $\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)=\hat{x}\left(\tilde{t},t_0,\hat{x}\left(t_0,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)$ für alle $\tilde{t},t_0\in\left(t_-\left(\tilde{t}_0\right),t_+\left(\tilde{t}_0\right)\right)$ und Lemma 3.17 von Gronwall

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{x}\left(\tilde{t},t_0,x_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)\right\| &= \left\|\hat{x}\left(\tilde{t},t_0,x_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},t_0,\hat{x}\left(t_0,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)\right\| \\
&\le \left\|x_0-\hat{x}\left(t_0,\tilde{t}_0,x_0,\lambda\right)\right\|\cdot e^{L\left|\tilde{t}-t_0\right|} \xrightarrow{\tilde{t}_0\to t_0} 0 \\
\left\|\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right)\right\| &= \left\|\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right),\lambda\right)ds-\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right),\tilde{\lambda}\right)ds\right\| \\
&\le \left|\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \left\|f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right),\lambda\right)-f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right),\lambda\right)\right\|ds\right| \\
&+ \left|\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \left\|f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right),\lambda\right)-f\left(s,\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right),\tilde{\lambda}\right)\right\|ds\right| \\
&\le L\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \left\|\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(s,\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right)\right\|ds+\varepsilon
\end{aligned}$$

Und mittels Lemma 3.17 von Gronwall:

$$\left\|\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\lambda\right)-\hat{x}\left(\tilde{t},\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\lambda}\right)\right\| \le \varepsilon\cdot e^{L\left|\tilde{t}_0-\tilde{t}\right|}$$

Bemerkungen zu (3):

$$\left.\begin{array}{rcl}
\partial_t\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right) &=& f\left(t,\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right) \\
\hat{x}\left(t_0,t_0,x_0,\lambda\right) &=& x_0
\end{array}\right\}$$

AWP für eine lineare inhomogene DGL für $\partial_\lambda\hat{x}\left(\cdot,t_0,x_0,\lambda\right)$:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\partial_t\partial_\lambda\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right) &=& \partial_\lambda f\left(t,\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)+\partial_x f\left(t,\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)\partial_\lambda\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right) \\
\partial_\lambda\hat{x}\left(t_0,t_0,x_0,\lambda\right) &=& 0
\end{array}\right\}$$

AWP für eine lineare homogene DGL für $\partial_{x_0}\hat{x}\left(\cdot,t_0,x_0,\lambda\right)$:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\partial_t\partial_{x_0}\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right) &=& \partial_x f\left(t,\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right),\lambda\right)\partial_{x_0}\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right) \\
\partial_{x_0}\hat{x}\left(t_0,t_0,x_0,\lambda\right) &=& I
\end{array}\right\}$$

Entwicklung nach λ:

$$\hat{x}\left(t,t_0,x_0,\lambda\right)=\sum_{j=0}^{k}\frac{\partial^j\hat{x}}{\partial\lambda^j}\left(t,t_0,x_0,\lambda_0\right)\left(\lambda-\lambda_0\right)^j+o\left(\lambda\right)$$

$\square$

3.6. Vektorfelder, autonome DGL-systeme, Flüsse (dynamische Systeme). 19.05.03

(3.12)
$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lischitzstetig, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sprachregelungen:

Vektorfeld
Phasenraum
Orbit, Trajektorie, Phasenkurve

- f heißt Vektorfeld zu (3.12)
- U heißt Phasenraum
- Sei $x : I \to U$ maximale Lösung von (3.12)

  $\{x(t) \,|t \in I\}$ heißt Orbit oder Trajektorie oder Phasenkurve

Bemerkung. Jeder Punkt von U liegt auf genau einem Orbit. Die Orbits sind die Äquivalenzklassen bzgl. der folgenden Äquivalenzrelation auf U:
$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists$ Lösung $x : I \to U$ von (3.12) mit $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ für $t_1, t_2 \in I$.

Sei $\hat{x}(t, t_0, x_0)$ max. Lsg. von (3.12) für $t \in (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) =: I(t_0, x_0)$.

$$\begin{aligned} y(s) &:= \hat{x}(t+s, t_0, x_0) \\ y'(s) &= \partial_t \hat{x}(t+s, t_0, x_0) = f(\hat{x}(t+s, t_0, x_0)) = f(y(s)) \\ y(s_0) &= \hat{x}(t+s_0, t_0, x_0) \quad \text{für } t+s_0 \in I(t_0, x_0) \\ \rightsquigarrow \hat{x}(t+s, t_0, x_0) &= \hat{x}(s, s_0, \hat{x}(t+s_0, t_0, x_0)) \\ t = t_0 - s_0 : \hat{x}(t_0 - s_0 + s, t_0, x_0) &= \hat{x}(s, s_0, \hat{x}(t_0, t_0, x_0)) = \hat{x}(s, s_0, x_0) \\ s_0 = 0, t = t_0 : \hat{x}(t+s, t_0, x_0) &= \hat{x}(s, 0, \hat{x}(t, 0, x_0)) \\ \varphi_t(x_0) &:= \hat{x}(t, 0, x_0) \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)) = \varphi_t \circ \varphi_s(x_0) \\ \varphi_0 &= \mathrm{id} = \varphi_{-s} \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_{-s} \\ \rightsquigarrow \varphi_{-s} &= \varphi_s^{-1} \end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn z.B. f global Lipschitz-stetig ist, dann sind alle Lösungen von (3.12) unbeschränkt fortsetzbar, und $\varphi_t : U \to U$ ist Homöomorphismus, d.h. $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t \in \mathrm{Hom}(U)$ ist ein Gruppen-Isomorphismus von $(\mathbb{R}, t)$ auf die Gruppe der $\mathrm{Hom}(U)$.
φ_t ist eine einparametrische Homöomorphismen-Gruppe.

dynamisches System

Definition 3.20. Eine stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times U \to U$ mit
$$\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \qquad \varphi(0, x) = x$$
für alle $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in U$, heißt dynamisches System.

Wenn φ differenzierbar ist, dann folgt
$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(t+s, x) &= \partial_2 \varphi(t, \varphi(s, x)) \cdot \partial_1 \varphi(s, x) \\ \partial_1 \varphi(t+s, x) &= \partial_1 \varphi(t, \varphi(s, x)) \\ \text{Setze } t = 0 : \partial_1 \varphi(s, x) &= \partial_1 \varphi(0, \varphi(s, x)) = f(\varphi(s, x)) \end{aligned}$$

Orbit-Typen:

- stationäre Lösungen (singulärer Punkt)
$$x(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
- periodische Lösungen
$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
- homocline Orbits
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} x(t)$$
- heterocline Orbits
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) \neq \lim_{t \to \infty} x(t)$$

3.7. Richtungsfelder, nicht-autonome DGLsysteme, Evolationsoperator.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3.13}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.14}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig bzgl. x, glm. bzgl. t. $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.

Sprachregelungen:

- f heißt Richtungsfeld Richtungsfeld
- U heißt erweiterter Phasenraum erweiterter Phasenraum

  (Ist (3.13) autonom, so ist der erweiterte Phasenraum = $\mathbb{R}\times$Phasenraum)
- Ist $x : I \to \mathbb{R}^n$ maximale Lösung von (3.13), so heißt $\{(t, x(t)) \in U \,|t \in I\}$ Integralkurve. Integral-kurve

Bemerkung. Durch jeden Punkt des erweiterten Phasenraumes läuft genau eine Integralkurve.

Sei $\hat{x} : (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) \to \mathbb{R}^n$ maximale Lösung von (3.13), (3.14).

Definition 3.21. Eine Abbildung $\hat{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V \to V$ mit Evolations-operator

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, t_0, x_0) &= \hat{x}(t, s_0, \hat{x}(s_0, t_0, x_0)) \\ \hat{x}(t_0, t_0, x_0) &= x_0 \end{aligned}$$

für alle $t, t_0, s_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in V$ heißt Evolationsoperator.

Beispiel. $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x'(t) = -tx(t)^2$, $x(t_0) = x_0$

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \quad &: \quad x(t) \equiv 0 \\ x_0 < 0 \quad &: \quad x(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + \frac{1}{x_0}} \end{aligned}$$

21.05.03

4. Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

$$\boxed{x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)}$$

$A : \mathbb{R} \to M_n$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\,x(t) = b(t)}$$

$a_j, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

4.1. Lineare homogene Differentialgleichungssysteme.

$$x'(t) = A(t)\,x(t) \tag{4.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.2}$$

$A : \mathbb{R} \to M_n$ stetig

max. Lsg. $\hat{x}(t, t_0, x_0)$ für $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Elementare Eigenschaften:

(1) Die Menge der Lösungen von (4.1) ist ein Vektorraum

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)\,x(t) \\ y'(t) &= A(t)\,y(t) \\ \rightsquigarrow\ (\lambda x(t) + \mu y(t))' &= \lambda x'(t) + \mu y'(t) \\ &= \lambda A(t)\,x(t) + \mu A(t)\,y(t) \\ &= A(t)\,(\lambda x(t) + \mu y(t)) \end{aligned}$$

(2) $\hat{x}(t, t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist linear:

$$\begin{array}{lll} x'(t) = A(t)\,x(t) & y'(t) = A(t)\,y(t) & z'(t) = A(t)\,z(t) \\ x(t_0) = x_0 & y(t_0) = y_0 & z(t_0) = \lambda x_0 + \mu y_0 \end{array}$$

$\lambda x(t) + \mu y(t)$ ist Lösung von (4.1) und erfüllt die Anfangswertbedingung von z.
$\rightsquigarrow \lambda x(t) + \mu y(t) = z(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Definition 4.1. Sei

$$\boxed{X(t, t_0)\,x_0 := \hat{x}(t, t_0, x_0)}$$

Evolutionsparameter Fundamentalmatrix

$X(t, t_0) \in M_n$ heißt Evolutionsparameter zu (4.1), $X(t, 0)$ Fundamentalmatrix zu (4.1).

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t, t_0)\,x_0 \\ X(t_0, t_0) &= I \\ X(t, t_1) &= X(t, t_0)\,X(t_0, t_1) \end{aligned}$$

(3) Differentialgleichungssystem der Ordnung n^2 in Normalform:

$$\begin{aligned} \partial_t X(t, t_0) &= A(t) \circ X(t, t_0) \\ X(t_0, t_0) &= I \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$\partial_t \hat{x}(t, t_0, x_0) = \partial_t\left[X(t, t_0)\,x_0\right] = \left[\partial_t X(t, t_0)\right] x_0 = A(t)\,\hat{x}(t, t_0, x_0) = A(t)\,X(t, t_0)\,x_0$$

$$\hat{x}(t_0, t_0, x_0) = x_0 = X(t_0, t_0)\,x_0$$

(4) Der Vektorraum der Lösungen von (4.1) besitzt die Dimension n.

Definition 4.2. Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sind linear abhängig, gdw. $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{R}$, $l_1^2 + \ldots + l_n^2 > 0$, existieren, so daß

$$l_1 f_1(t) + \ldots + l_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$(\Rightarrow)$ $\forall t \in \mathbb{R}$: $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ sind linear abhängig (als Vektoren in $\mathbb{R}^n$)

$(\Leftrightarrow)$ $\forall t \in \mathbb{R}$: $\det(f_1(t), \ldots, f_n(t)) \equiv 0$

$\exists t \in \mathbb{R}$: $\det(f_1(t), \ldots, f_n(t)) \neq 0 \rightsquigarrow f_1, \ldots, f_n$ sind linear unabhängig.

Behauptung. *Es existieren n linear unabhängig Lösungen von* (4.1).

Beweis. Wir betrachten $x(t, t_0, e_j)$, $j = 1, \ldots, n$. $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis.

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & \lambda_1 \hat{x}(t, t_0, e_1) + \ldots + \lambda_n \hat{x}(t, t_0, e_n) & \forall t \in \mathbb{R} \\ & = & \lambda_1 X(t, t_0) e_1 + \ldots + \lambda_n X(t, t_0) e_n & \\ & = & X(t, t_0)(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) & \\ t = t_0: \quad 0 & = & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n & \\ & \rightsquigarrow & \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 & \end{array}$$

□

Behauptung. *Beliebige $n+1$ Lösungen von* (4.1) *sind linear abhängig:*

Beweis. Seien $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ die Anfangswerte der $n+1$ Lösungen, d.h. die Lösungen sind

$$x_j(t) = X(t, t_0) v_j \qquad j = 1, \ldots, n+1$$

$$\lambda_1 x_1(t) + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1}(t) = X(t, t_0)(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1})$$

Wählen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$ und $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$. □

Definition 4.3. Eine Basis im Vektorraum der Lösungen von (4.1) heißt Fundamentalsystem von Lösungen von (4.1). Fundamental-system

Lemma 4.4. *Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ von* (4.1) *sind linear unabhängig (und folglich ein Fundamentalsystem von Lösungen von* (4.1)*), gdw.*

$$\det[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \neq 0$$

für ein $t \in \mathbb{R}$ (und folglich alle t).

Beweis. $(\Rightarrow)$: Seien $x_1, \ldots, x_n$ Lösungen von (4.1), linear unabhängig.

$$x_j(t) = X(t, t_0) x_j(t_0)$$

Angenommen, $\det[x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)] = 0$ für ein $t_1 \in \mathbb{R}$.

Wir wählen $t_0 = t_1$. Dann ex. $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$ und $\lambda_1 x_1(t_0) + \ldots + \lambda_n x_n(t_0) = 0$.

$$\rightsquigarrow \lambda_1 x_1(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = X(t, t_0) \underbrace{[\lambda_1 x_1(t_0) + \ldots + \lambda_n x_n(t_0)]}_{=0} \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Widerspruch.

□

$\exists t \in \mathbb{R}$: $\det(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \neq 0 \Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n$ lin. unabh. $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$: $\det(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \neq 0$

$\exists t \in \mathbb{R}$: $\det(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0 \Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n$ lin. abh. (weil Lsg.) $\Leftrightarrow \det(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv 0$

Satz 4.5 (Liouville). 26.05.03 Liouville

$$\boxed{\det(X(t, t_0)) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{sp} A(s) ds}}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\partial_t \det X(t,t_0) &= \partial_t \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \epsilon_{j_1\dots j_n} \cdot x_{1,j_1}(t,t_0)\cdots x_{n,j_n}(t,t_0) \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{j_1\dots j_n} \cdot x_{1,j_1}(t,t_0)\cdots \partial_t x_{k,j_k}(t,t_0)\cdots x_{n,j_n}(t,t_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det \left[x_1(t,t_0),\dots,x_{k-1}(t,t_0), \underbrace{\partial_t x_k(t,t_0)}_{A(t)x_k(t,t_0)}, x_{k+1}(t,t_0),\dots,x_n(t,t_0) \right] \\
\left[A(t)\,x_k(t,t_0)\right]_{t=t_0} &= A(t_0)\,e_k = \begin{bmatrix} a_{1,k}(t_0) \\ \vdots \\ a_{n,k}(t_0) \end{bmatrix} \\
\left[\partial_t \det X(t,t_0)\right]_{t=t_0} &= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_{1,k}(t_0) & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & a_{2,k}(t_0) & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{n,k}(t_0) & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}(t_0) = \mathrm{sp}A(t_0) \\
\left[\partial_t \det X(t,t_0)\right]_{t=t_1} &= \left[\partial_t \det\left(X(t,t_1)\,X(t_1,t_0)\right)\right]_{t=t_1} \\
&= \left\{\partial_t \left[\det X(t,t_1)\cdot \det X(t_1,t_0)\right]\right\}_{t=t_1} \\
&= \left\{\partial_t \det X(t,t_1)\cdot \det X(t_1,t_0)\right\}_{t=t_1} \\
&= \mathrm{sp}A(t_1)\cdot \det X(t_1,t_0)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also das lineare Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
\partial_t \det X(t,t_0) &= \mathrm{sp}A(t)\det X(t,t_0) \\
\det X(t_0,t_0) &= 1
\end{aligned}
$$

mit der Lösung

$$\det X(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{sp}A(s)\,ds}$$

□

4.2. **Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung.**

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\,x(t) = 0 \tag{4.3}$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \tag{4.4}$$

$a_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &:= x(t) \\
&\vdots \\
x_n(t) &:= x^{(n-1)}(t) \\
\rightsquigarrow x_1'(t) &= x_2(t) \\
&\vdots \\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\
x_n'(t) &= -a_0(t)\,x_1(t) - \ldots - a_{n-1}(t)\,x_n(t) \\
x_1(t_0) = x_0 \quad &\ldots \quad x_n(t_0) = x_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Satz 4.6.

(1) Die Menge der Lösungen von (4.3) ist ein n-dim. Vektorraum.

(2) Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ von (4.3) sind linear unabhängig, gdw. $\exists t \in \mathbb{R}$ (und folglich $\forall t \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{\det \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \neq 0}$$

(Diese Determinante heißt Wronski-Determinante, oder Wronskian) Wronski-Determinante

Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind linear abhängig

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$ und $\lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$ und $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \lambda_n f_n^{(n-1)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \det \begin{bmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

4.3. Lineare homogene autonome Differentialgleichungssysteme.

$$x'(t) = Ax(t) \tag{4.5}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.6}$$

$A \in M_n$

$n = 1$: $A \in \mathbb{R}$: $x(t) = e^{At} x_0$

4.3.1. *Die Exponentialfunktion für Matrizen.*

Definition 4.7. Sei $A \in M_n$. e^A, $A \in M_n$

$$\boxed{e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}}$$

Lemma 4.8. *Sei $M \subset M_n$ eine beschränkte Menge (bzgl. einer Operatornorm in M_n, d.h. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$). Dann konvergieren*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad \textit{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!}$$

gleichmäßig bzgl. $A \in M$.

Beweis.

$$\left\| \sum_{j=l}^{m} \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=l}^{m} \frac{\|A\|^j}{j!} \leq \varepsilon$$

wenn $l \geq l_0(\varepsilon)$ glm. bzgl. $A \in M$. □

Folgerung.

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{A^j}{j!} \xrightarrow{m\to\infty} e^A \quad \text{glm. bzgl. } A \in M \qquad \text{und} \qquad \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right\| = \left\| e^A \right\| \leq e^{\|A\|}$$

Lemma 4.9.

(1) $\det B \neq 0 \rightsquigarrow e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$

(2) $AB = BA \rightsquigarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

(3) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

28.05.03 *Beweis.*

$$\begin{aligned} B^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}B &= \sum_{j=0}^{\infty} B^{-1}\frac{A^j}{j!}B = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(B^{-1}AB\cdot B^{-1}AB\cdots B^{-1}AB\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(B^{-1}AB\right)^j}{j!} \\ &= e^{B^{-1}AB} \end{aligned}$$

Für $AB = BA$ gilt die binomische Formel $(A+B)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j} A^k B^{j-k}$.

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{A^m}{m!}\cdot\frac{B^{l-m}}{(l-m)!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{m=0}^{l} l!\frac{A^m}{m!}\frac{B^{l-m}}{(l-m)!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\underbrace{\sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}A^m\cdot B^{l-m}}_{(A+B)^l} \\ &= e^{A+B} \end{aligned}$$

□

Beispiel. $n = 2$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} = aI + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \\ e^A &= e^{aI}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\cdot\left(I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ be^a & e^a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel. $n = 2$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = aI + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \\ e^A &= e^{aI}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\cdot\left(I + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2!}b^2 I - \frac{1}{3!}b^2\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!}b^4 I + \dots\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!} - \dots & -b + \frac{1}{3!}b^3 - \dots \\ b - \frac{1}{3!}b^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b \\ e^a\sin b & e^a\cos b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lemma 4.10.

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(At)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{A^j t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{jt^{j-1}A^j}{j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}A^j = A\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(At)^{j-1}}{(j-1)!} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}$$

□

4.3.2. *Der Fall $n = 2$.* 28.05.03

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\
x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
\det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{sp}A}\lambda + \underbrace{ad - bc}_{\det A} \\
\lambda_{1,2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sp}A \pm \sqrt{(\mathrm{sp}A)^2 - 4\det A}\right]
\end{aligned}$$

geometrische Vielfachheit $:= \dim\ker(A - \lambda I) = 2 - \mathrm{rang}\,(A - \lambda I)$

Sei $(\mathrm{sp}A)^2 = 4\det A \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2}\mathrm{sp}A$:

$$\begin{aligned}
\text{geom. Vielfachheit} &= \begin{cases} 1 & \mathrm{rang}\begin{bmatrix} a - \frac{1}{2}(a+d) & b \\ c & a - \frac{1}{2}(a+d) \end{bmatrix} = 1 \\ 2 & \mathrm{rang}\begin{bmatrix} a - \frac{1}{2}(a+d) & b \\ c & a - \frac{1}{2}(a+d) \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{sonst (unter der gegebenen Vorauss. } (\mathrm{sp}A)^2 = 4\det A) \\ 2 & \text{wenn } b = c = \frac{1}{2}(a-d) = 0, \text{ d.h. } b = c = 0,\ a = d \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei die algebraische Vielfachheit = geometrischer Vielfachheit = 2, also $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

Dann ist jeder Vektor $\neq 0$ in $\mathbb{R}^2$ Eigenvektor zu $\lambda = a$.

$\rightsquigarrow e^{At}v = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} v = e^{\lambda t}v.$

(1) $\mathrm{spec}A = \{\lambda, \mu\}$, $\lambda < \mu$

Sei $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

$$\begin{aligned}
A &= B^{-1}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} B \qquad Bv = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Bw = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
e^{tA} &= B^{-1}\begin{bmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{bmatrix} B
\end{aligned}$$

(2) $\text{spec}A = \{\alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$, $\beta \neq 0$. $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A(v+iw) &= (\alpha+i\beta)(v+iw) \\ A(v-iw) &= (\alpha-i\beta)(v-iw) \\ \rightsquigarrow Av &= \alpha v - \beta w \\ Aw &= \beta v + \alpha w \end{aligned}$$

$$A = B^{-1}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} B \qquad Bv = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Bw = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = B^{-1}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = B^{-1}\left(\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \alpha v - \beta w$$

$$e^{At}v = B^{-1}e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{\alpha t}B^{-1}\begin{bmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{bmatrix} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\, v - \sin(\beta t)\, w\right)$$

$$e^{At}w = e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\, v + \cos(\beta t)\, w\right)$$

(3) $\text{spec}A = \{\lambda\}$

geometrische Vielfachheit $= 1$: $Av = \lambda v$, $Aw = \lambda w + v$

$$\begin{aligned} A &= B^{-1}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} B \\ e^{At}v &= B^{-1}e^{\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}v \\ e^{At}w &= B^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t}(tv + w) \end{aligned}$$

geometrische Vielfachheit $= 2$: wie Fall (1) mit $\mu = \lambda$

4.3.3. *Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$.*

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ mit $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$, $1 \leq m \leq n$.

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{a_1} (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{a_m}, \quad 1 \leq a_m \leq n$$

a_j :=algebraische Vielfachheit von λ_j, $a_1 + \ldots + a_m = n$

g_j :=geometrische Vielfachheit von λ_j; $g_j = \dim\ker(A - \lambda_j I)$

In $\mathbb{C}^n$ existiert eine Basis

$$\boxed{\{\mathfrak{n}_{j,k,l}\}_{j=1,\ldots,m;k=1,\ldots,g_j;l=1,\ldots,b_{jk}}} \tag{4.7}$$

mit

$$\begin{aligned} b_{j1} + \ldots + b_{jg_j} &= a_j \\ A\mathfrak{n}_{jk1} &= \lambda_j \mathfrak{n}_{jk1} \\ A\mathfrak{n}_{jkl} &= \lambda_j \mathfrak{n}_{jkl} + \mathfrak{n}_{jk,l-1} \quad l \geq 2 \end{aligned}$$

$\mathfrak{n}_{j11}, \ldots, \mathfrak{n}_{jg_j1}$ ist eine Basis von $\ker(A - \lambda_j I)$

Die Matrixdarstellung von A in der Basis (4.7) ist ($g_1 + \ldots + g_m$ Kästchen) $BAB^{-1} =$

$$\left[\begin{array}{cccc}
\left.\left[\begin{array}{cccc}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{array}\right]\right\} b_{11} & & & \\
& \left.\left[\begin{array}{cccc}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{array}\right]\right\} b_{12} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \left.\left[\begin{array}{cccc}\lambda_m & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_m\end{array}\right]\right\} b_{mg_m}
\end{array}\right]$$

Beispiel. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \overset{!}{=} 0 \\
\operatorname{spec}(A) &= \{-1\}
\end{aligned}$$

$n = 2$, $m = 1$, $b = a = 2$,

$$g = \dim\ker(A + I) = 2 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = 1$$

$\mathfrak{n}_1$ Eigenvektor, $\mathfrak{n}_2$ beigeordneter Eigenvektor

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 - v_2 \\ 4v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ z.B. } v_1 = 1, v_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - w_2 \\ 4w_1 - 2w_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ z.B. } w_1 = w_2 = 1$$

$\mathfrak{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathfrak{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jordanmatrix:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Satz 4.11. *Sei* 04.06.03

$$\boxed{\xi = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \mathfrak{n}_{jkl} \in \mathbb{C}^n, \quad \xi_{jkl} \in \mathbb{C}}$$

Dann gilt

$$\boxed{e^{At}\xi = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jkl-r}}$$

Substitution $s := l - r$, $1 \le s \le b_{j,k}$:

$$e^{At}\xi = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{s=1}^{b_{jk}} \mathfrak{n}_{jks} \sum_{r=0}^{b_{jk}-s} \frac{t^r}{r!} \xi_{jkr+s}$$

Beweis. $N_j := A - \lambda_j I$:

$$\begin{aligned} N_j \mathfrak{n}_{jk1} &= 0 \\ N_j \mathfrak{n}_{jkl} &= \mathfrak{n}_{jkl-1} \quad l = 2, \ldots, b_{jk} \\ N_j^l \mathfrak{n}_{jkl} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= N_j + \lambda_j I \\ \rightsquigarrow e^{At} &= e^{\lambda_j t I} e^{N_j t} = e^{\lambda_j t} e^{N_j t} = e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{(N_j t)^r}{r!} \\ \rightsquigarrow e^{At}\xi &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} e^{At} \mathfrak{n}_{jkl} = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jkl-r} \end{aligned}$$

□

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$: m_0 komplex konjugierte Paare von Eigenwerten $(2m_0 \leq m)$

$\lambda_j = \overline{\lambda_{m_0+j}} \notin \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m_0$; $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 2m_0 + 1, \ldots, m$

$\rightsquigarrow$ Basis in $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl}, \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl}$, $j = 1, \ldots, m_0$; $\mathfrak{n}_{jkl}$, $j = 2m_0+1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, g_j$, $l = 1, \ldots, b_{jk}$

Satz 4.12. *Sei*

$$\xi = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \mathfrak{n}_{jkl} \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. $\xi_{jkl} = \overline{\xi_{m_0+j,k,l}}$ *für* $j = 1, \ldots, m_0$. $\xi_{jkl} \in \mathbb{R}$ *für* $j = 2m_0 + 1, \ldots, m$. *Dann gilt:*

$$\boxed{\xi = \mathrm{Re}\xi = 2 \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \left(\mathrm{Re}\xi_{jkl} \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl} - \mathrm{Im}\xi_{jkl} \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl}\right) + \sum_{j=2m_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \mathfrak{n}_{jkl}}$$

$$\boxed{e^{At}\xi = 2 \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \mathrm{Re}\left\{ e^{\lambda_j t} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jk,l-r} \right\} + \sum_{j=2m_0+1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jk,l-r}}$$

$\lambda_j = \overline{\lambda_{m_0+j}} \rightsquigarrow e^{\lambda_j t} = \overline{e^{\lambda_{m_0+j} t}}$, $e^{\lambda_j t} = e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t + i \sin \mathrm{Im}\lambda_j t\right)$

$$\begin{aligned} e^{At}\xi &= 2 \sum_{j=1}^{m_0} e^{\mathrm{Re}\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \left\{ \cos \mathrm{Im}\lambda_j t \left(\mathrm{Re}\xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r} - \mathrm{Im}\xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \left(\mathrm{Re}\xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} + \mathrm{Im}\xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r} \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=2m_0+1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jkl-r} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{m_0} e^{\mathrm{Re}\lambda_j t} \left\{ \cos \mathrm{Im}\lambda_j t \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \left(\mathrm{Re}\xi_{jkl} \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r} - \mathrm{Im}\xi_{jkl} \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \left(\mathrm{Re}\xi_{jkl} \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} + \mathrm{Im}\xi_{jkl} \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r} \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=2m_0+1}^{m} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{g_j} \sum_{l=1}^{b_{jk}} \xi_{jkl} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \mathfrak{n}_{jkl-r} \end{aligned}$$

Folgerung. Ein Fundamentalsystem von Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ ist

$$\boxed{e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r} - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r}\right)} \qquad j = 1,\dots,m_0$$

$$\boxed{e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} + \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r}\right)} \qquad j = 1,\dots,m_0$$

$$\boxed{e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\mathfrak{n}_{jkl-r}} \qquad j = 2m_0+1,\dots,m$$

$$k = 1,\dots,g_j;\ l = 1,\dots,b_{jk}$$

Lösungsalgorithmus für die AWA $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$:

(1) Löse die charakteristische Gleichung zu $A \rightsquigarrow \lambda_1,\dots,\lambda_m$ mit alg. Vielfachheiten $a_1,\dots,a_m$

(2) Bestimme die geometrische Vielfachheit $g_j = \dim\ker(A-\lambda_j I) = n - \mathrm{rang}(A-\lambda_j I)$

(3) Bestimmung von Eigenvektoren $\mathfrak{n}_{jk1}$, $k = 1,\dots,g_j$

(4) Bestimmung von beigeordneten Eigenvektoren $\mathfrak{n}_{jkl}$, $l = 2,\dots,b_{jk}$

(5) Einsetzen einer Linearkombination des Fundamentalsystems in die Anfangsbedingung $\rightsquigarrow$ Koeffizienten der Linearkombination

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t)\\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 3x_2(t)\\ \text{Anfangsbedingung:}\quad x_1(0) &= 0\\ x_2(0) &= 1\end{aligned}$$

(1) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1\\ 4 & -3-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 \rightsquigarrow \lambda = -1,\ a = 2,\ m = 1,\ m_0 = 0$

(2) $g = 2 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix} = 1$

(3) $\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 0\\ 4v_1 - 2v_2 &= 0\end{aligned} \rightsquigarrow$ z.B. $v_1 = 1,\ v_2 = 2 \rightsquigarrow \mathfrak{n}_{111} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} 2w_1 - w_2 &= 1\\ 4w_1 - 2w_2 &= 2\end{aligned} \rightsquigarrow \mathfrak{n}_{112} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(5) Fundamentalsystem:

$l = 1$: $e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$l = 2$: $e^{-t}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

Anfangsbedingung:

$$\left[ae^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + be^{-t}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)\right]_{t=0} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$a + b = 0$, $2a + b = 1 \rightsquigarrow a = 1$, $b = -1$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}(1-1-t) = -te^{-t}\\ x_2(t) &= e^{-t}(2-1-2t) = e^{-t}(1-2t)\end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) \end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$, $\lambda_3 = 1$

also: $n = 3$, $m_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

(2) $g_1 = g_2 = g_3 = 1$

(3)

$$\lambda_1 = 2+3i : \begin{pmatrix} -1-3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ 1 & 3 & -3i \end{pmatrix} \mathfrak{n}_{111} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{n}_{111} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathfrak{n}_{211} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{n}_{311} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{n}_{311} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) beigeordnete Eigenvektoren existieren nicht $(a_j = g_j)$

(5) Fundamentalsystem:

$$e^{2t}\left(\cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad e^{2t}\left(\cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad e^{t} \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anfangswerte:

$$\left[ae^{2t}\left(\cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + be^{2t}\left(\cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + ce^{t} \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{t=0}$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow c = -1$, $b = 4$, $a = 2$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 10e^t \\ x_2(t) &= -2e^{2t}\sin 3t + 4e^{2t}\cos 3t - 3e^t \\ x_3(t) &= 2e^{2t}\cos 3t - 4e^{2t}\sin 3t - e^t \end{aligned}$$

11.06.03 4.4. **Lineare homogene autonome Gleichungen höherer Ordnung.**

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0 \qquad a_j \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & := & x(t) \\ x_2(t) & := & x'(t) \\ & \vdots & \\ x_n(t) & := & x^{(n-1)}(t) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) \\ & \vdots & \\ x_n'(t) & = & -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \ldots - a_{n-1}x_n(t) \end{array}\right\} x'(t) = Ax(t)$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}$$

Lemma 4.13.

(1) $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right)$

(2) *Alle Eigenwerte von A besitzen die geometrische Vielfachheit Eins.*

(3) *Sei $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A. Dann gilt $v_1 \neq 0$.*

Beweis.

(1)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+2}(-a_1) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ (-1)^{2n}(-a_{n-1} - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \left\{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right\}$$

(2) Sei λ Eigenwert. Dann ist $\dim\ker(A - \lambda I) = n - \dim \operatorname{Im}(A - \lambda I) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I) = 1$, gdw. $\operatorname{rang}(A - \lambda I) = n - 1$ (sieht man sofort).

(3) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Eigenvektor von A zu Eigenwert λ, d.h. $Av = \lambda v$, d.h.

$$\begin{array}{rcl} v_2 & = & \lambda v_1 \\ v_3 & = & \lambda v_2 \\ & \vdots & \\ v_n & = & \lambda v_{n-1} \\ -a_0v_1 - a_1v_2 - \ldots - a_{n-1}v_n & = & \lambda v_n \end{array}$$

Annahme: $v_1 = 0 \rightsquigarrow v_2 = 0 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow v_n = 0$. Widerspruch

□

charakteristische Gleichung

Definition 4.14. Die Gleichung

$$\boxed{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0}$$

heißt <u>charakteristische Gleichung</u> zu (4.8).

Satz 4.15. *Die folgenden n Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von* (4.8)*:*

- *Für reelle Nullstellen λ der charakteristischen Gleichung zu* (4.8) *der Vielfachheit a:*

$$\boxed{t^k e^{\lambda t} \qquad k = 0, \ldots, a-1}$$

- *Für komplexe Nullstellen $\alpha + i\beta$, $\beta > 0$, der charakteristischen Gleichung zu* (4.8) *der Vielfachheit a:*

$$\boxed{t^k e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad t^k e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad k = 0, \ldots, a-1}$$

Beweis. $\mathrm{spec}A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$

$\lambda_j = \overline{\lambda_{m_0+j}} \notin \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, m_0$; $\lambda_j \in \mathbb{R}$ für $j = 2m_0+1, \ldots, m$

Sei $\mathfrak{n}_j$ Eigenvektor zu λ_j mit erster Komponente 1.

Die ersten Komponenten des Fundamentalsystems aus Abschnitt 4.3.3 sind:

$$e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \cdot \mathrm{Re}\mathfrak{n}^1_{jkl-r} - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \cdot \mathrm{Im}\mathfrak{n}^1_{jkl-r}\right) \qquad j = 1, \ldots, m_0, k = 1, l = 1, \ldots, b_{jk}$$

$$e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \cdot \mathrm{Im}\mathfrak{n}_{jkl-r} + \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \cdot \mathrm{Re}\mathfrak{n}_{jkl-r}\right) \qquad j = 1, \ldots, m_0, k = 1, l = 1, \ldots, b_{jk}$$

$$e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\mathfrak{n}^1_{jkl-r} \qquad j = 2m_0+1, \ldots, m, k = 1, l = 1, \ldots, b_{j,k}$$

$1 \leq j \leq m_0$:

$$\begin{aligned}
l = 1 \quad &: \quad e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \\
& \quad e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sin \mathrm{Im}\lambda_j t \\
l = 2 \quad &: \quad e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\left(\underbrace{\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Re}\mathfrak{n}^1_{j12} - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Im}\mathfrak{n}^1_{j12}}_{r=0} + \underbrace{t\cos \mathrm{Im}\lambda_j t}_{r=1}\right) \\
& \quad e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\left(\underbrace{\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Im}\mathfrak{n}^1_{j12} + \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Re}\mathfrak{n}^1_{j12}}_{r=0} + \underbrace{t\sin \mathrm{Im}\lambda_j t}_{r=1}\right) \\
l = 3, \ldots, b_{j1} \quad &: \quad \text{analog} \\
l = b_{j1} \quad &: \quad e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\left(\cos \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Re}\mathfrak{n}^1_{j1l-r} - \sin \mathrm{Im}\lambda_j t \mathrm{Im}\mathfrak{n}^1_{j1l-r}\right)
\end{aligned}$$

$2m_0 + 1 \leq j \leq m$:

$$\begin{aligned}
l = 1 \quad &: \quad e^{\lambda_j t} \\
l = 2 \quad &: \quad e^{\lambda_j t}\left(\underbrace{\mathfrak{n}^1_{j12}}_{r=0} + \underbrace{t}_{r=1}\right)
\end{aligned}$$

□

Lösungsalgorithmus für das AWP

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) &= 0 \qquad a_j \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) &= x_n \end{aligned} \tag{4.9}$$

(1) Bestimme alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung mit ihren Vielfachheiten.

(2) Einsetzen einer Linearkombination der Funktionen des Fundamentalsystems in (4.9).

Beispiel. $n = 4$, $m = 2$, $m_0 = 1$

$$\begin{aligned} x^{(4)}(t) + 2x^{(2)}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) = x''(0) = x'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

(1) $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$: $a = 2$

(2) Fundamentalsystem: $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\begin{aligned} k = 0 &: \cos t, \sin t \\ k = 1 &: t\cos t, t\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t \\ x'(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t - c_3 \cos t - c_3 t \sin t + c_4 \sin t + c_4 t \cos t \\ x''(t) &= -c_1 \cos t - c_2 \sin t - 2c_3 \sin t - c_3 t \cos t + 2c_4 \cos t - c_4 t \sin t \\ x'''(t) &= c_1 \sin t - c_2 \cos t - 3c_3 \cos t + c_3 t \sin t - 3c_4 \sin t - c_4 t \cos t \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x(0) = c_1 &= 1 \\ x'(0) = c_2 + c_3 &= 0 \\ x''(0) = -c_1 + 2c_4 &= 0 \\ x'''(0) = -c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow c_1 = 1$, $c_4 = \frac{1}{2}$, $c_2 = c_3 = 0$

Lösung:

$$x(t) = \cos t + \frac{t}{2} \sin t$$

speziell $n = 2$: $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

a heißt Dämpfungsparameter

4.5. **Lineare inhomogene Systeme von Differentialgleichungen.**

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \tag{4.10}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.11}$$

$A : \mathbb{R} \to M(n \times n, \mathbb{R})$ stetig, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ($\mathcal{L}(A, b)$: affiner Unterraum in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$) ist die Summe aus einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems (x_*) und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems ($\mathcal{L}(A, 0)$: Unterraum in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$).

$$\mathcal{L}(A, b) = x_* + \mathcal{L}(A, 0)$$

- Wie bestimmt man $\mathcal{L}(A, 0)$? Falls $A(t)$ zeitunabhängig $\Rightarrow$ Kap. 4.3
- Wie bestimmt man x_*?

$$x'(t) = A(t)\,x(t) \tag{4.12}$$

Lösung von (4.12), (4.11): $x(t) = X(t,t_0)\,x_0$

$$\partial_t X(t,t_0) = A(t)\,X(t,t_0) \tag{4.13}$$

$$X(t_0,t_0) = I \tag{4.14}$$

Satz 4.16. *Die Lösung von* (4.10), (4.11) *ist*

$$\boxed{x(t) = X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\,b(s)\,ds}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\left[X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\,b(s)\,ds\right]\\
&= \underbrace{\partial_t X(t,t_0)}_{A(t)X(t,t_0)}x_0 + \underbrace{X(t,t)}_{I}b(t) + \int_{t_0}^{t}\underbrace{\partial_t X(t,s)}_{A(t)X(t,s)}b(s)\,ds\\
&= A(t)\,X(t,t_0)\,x_0 + b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\,X(t,s)\,b(s)\,ds\\
&= A(t)\left[X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\,b(s)\,ds\right] + b(t)\\
&= A(t)\,x(t) + b(t)\\
x(t_0) &= \left[X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\,b(s)\,ds\right]_{t=t_0} = X(t_0,t_0)\,x_0 + 0 = x_0
\end{aligned}$$

□

Spezialfälle:

(1) $A(t) = A$ zeitunabhängig:

$$\begin{aligned}
X(t,t_0) &= e^{A(t-t_0)}\\
x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\,ds
\end{aligned}$$

(2) $n = 1$:

$$\begin{aligned}
X(t,t_0) &= e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\\
\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} &= e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}A(t) = A(t)\,e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\\
e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\Big|_{t=t_0} &= e^0 = 1 = I\\
x(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t}^{s} A(\tau)d\tau}b(s)\,ds
\end{aligned}$$

Vorsicht: Im Fall $n > 1$ ist dies eine sinnvolle Formel, aber i.a. nicht mehr die Lösung von (4.10), (4.11).

- $X(t,t_0) = [x_1(t,t_0),\ldots,x_n(t,t_0)]$, $x_j(t,t_0) \in \mathbb{R}^n$

$$X(t,t_0)\,e_j = \begin{bmatrix} x_{11}(t,t_0) & \cdots & x_{1n}(t,t_0)\\ \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t,t_0) & \cdots & x_{nn}(t,t_0)\end{bmatrix} e_j = \begin{bmatrix} x_{1j}(t,t_0)\\ \vdots\\ x_{nj}(t,t_0)\end{bmatrix} = x_j(t,t_0)$$

$\rightsquigarrow$ Die j-te Spalte von $X(t,t_0)$ ist die Lösung von (4.12) mit Anfangsbedingung $x(t_0) = e_j$.

- Sei $y_1(t), \dots, y_n(t)$ ein Fundamentalsystem von (4.12)

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= [y_1(t), \dots, y_n(t)] \\
\rightsquigarrow Y(t)\, Y(t_0)^{-1} &= X(t, t_0)\,, \text{ denn} \\
\frac{d}{dt}\left[Y(t)\, Y(t_0)^{-1}\right] &= Y'(t)\, Y(t_0)^{-1} \\
&= [y_1'(t), \dots, y_n'(t)]\, Y(t_0)^{-1} \\
&= A\,[y_1(t), \dots, y_n(t)]\, Y(t_0)^{-1} \\
&= AY(t)\, Y(t_0)^{-1} \\
x(t) &= Y(t)\, Y(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)\, Y(s)^{-1}\, b(s)\, ds \\
&= Y(t) \underbrace{\left[Y(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} Y(s)^{-1}\, b(s)\, ds\right]}_{=:c(t)} \\
&= Y(t)\, c(t) \\
&= c_1(t)\, y_1(t) + \ldots + c_n(t)\, y_n(t)
\end{aligned}
$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung ist dargestellt als Linearkombination von Lösungen der homogenen Gleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten.

Lösungsalgorithmus:

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \tag{4.15}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.16}$$

$$x'(t) = A(t)\, x(t) \tag{4.17}$$

(1) Bestimme ein Fundamentalsystem $y_1(t), \dots, y_n(t)$ von Lösungen von (4.17)

(2) Ansatz: Variation der Konstanten

$$x(t) = c_1(t)\, y_1(t) + \ldots + c_n(t)\, y_n(t)$$

in (4.15), (4.16):

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, y_j(t) && = \frac{d}{dt} Y(t)\, c(t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\, y_j(t) + c_j(t) \underbrace{y_j'(t)}_{A(t) y_j(t)} && = Y(t)\, c'(t) + \underbrace{A(t)\, c(t)}_{A(t) Y(t)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(c_j'(t) + c_j(t)\, A(t)\right) y_j(t) && = A(t)\, Y(t)\, c(t) + Y(t)\, c'(t) \\
&\overset{!}{=} A(t) \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, y_j(t) + b(t) && = A(t)\, Y(t)\, c(t) + b(t) \\
\rightsquigarrow b(t) &= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\, y_j(t) && = Y(t)\, c'(t)
\end{aligned}
$$

Für fixiertes t ist dies ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ mit regulärer Koeffizientenmatrix $Y(t)$.

$$x(t_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, y_j(t_0) = Y(t_0)\, c(t_0) = x_0$$

(3) Bestimme $c_1(t),\ldots,c_n(t)$: Löse das lineare inhomogene algebraische Gleichungssystem für $c_1'(t),\ldots,c_n'(t)$.

Bestimme aus der Anfangsbedingung die Integrationskonstante.

18.06.03 **Beispiel.** $A(t)=A$ (zeitunabhängig) $\rightsquigarrow X(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t)+b_1(t)\\
x_2'(t) &= 2x_1(t)+x_2(t)+b_2(t)\\
A &= \begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}\\
X(t,t_0) &= (y_1(t-t_0),y_2(t-t_0))\\
y_1'(t) &= Ay_1(t) \qquad y_1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
y_2'(t) &= Ay_2(t) \qquad y_2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\2&1-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=0$$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$

$$\lambda_1=2:\quad \begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2v_1+v_2\\2v_1-v_2\end{pmatrix}=0 \quad\rightsquigarrow\quad \text{z.B. } v_1=1,v_2=2$$

$$\lambda_2=-1:\quad \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+v_2\\2v_1+2v_2\end{pmatrix}=0 \quad\rightsquigarrow\quad \text{z.B. } v_1=1,v_2=-1$$

$$y_1(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad c_1=\frac{1}{3},c_2=\frac{2}{3}$$

$$\text{für } y_2(t) \text{ analog:}\quad c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad c_1=\frac{1}{3},c_2=-\frac{1}{3}$$

$$\rightsquigarrow X(t,t_0)=\begin{pmatrix}\frac13 e^{2(t-t_0)}+\frac23 e^{-(t-t_0)} & \frac13 e^{2(t-t_0)}-\frac13 e^{-(t-t_0)}\\ \frac23 e^{2(t-t_0)}-\frac23 e^{-(t-t_0)} & \frac23 e^{2(t-t_0)}+\frac13 e^{-(t-t_0)}\end{pmatrix}$$

Lösung von (4.15), (4.16):

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{2(t-t_0)}+2e^{-t+t_0} & e^{2(t-t_0)}-e^{-t+t_0}\\ 2e^{2(t-t_0)}-2e^{-t+t_0} & 2e^{2(t-t_0)}+e^{-t+t_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{3}\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}e^{2(t-s)}+2e^{-t+s} & e^{2(t-s)}-e^{-t+s}\\ 2e^{2(t-s)}-2e^{-t+s} & 2e^{2(t-s)}+e^{-t+s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(s)\\b_2(s)\end{pmatrix}ds
\end{aligned}$$

Anderer Weg: Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad y_2(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem von Lösungen von (4.17).

Ansatz der Lösungen für (4.15), (4.16):

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1(t)e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}b_1(t)\\b_2(t)\end{pmatrix} &= c_1'(t)e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2'(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

also es ist

$$\begin{aligned}
e^{2t}c_1'(t)+e^{-t}c_2'(t) &= b_1(t)\\
2e^{2t}c_1'(t)-e^{-t}c_2'(t) &= b_2(t)\\
\rightsquigarrow c_1'(t) &= \frac{b_1(t)+b_2(t)}{3e^{2t}}\\
c_2'(t) &= \frac{2b_1(t)-b_2(t)}{3e^{-t}}\\
x(t_0) &= c_1(t_0)e^{2t_0}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2(t_0)e^{-t_0}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{pmatrix}\\
\rightsquigarrow c_1(t) &= c_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{b_1(s)+b_2(s)}{3e^{2s}}ds\\
c_2(t) &= c_2(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{2b_1(s)-b_2(s)}{3e^{-s}}ds
\end{aligned}$$

Beispiel. $A(t)$ zeitabhängig

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \frac{x_1(t)}{t}-x_2(t)+t\\
x_2'(t) &= \frac{x_1(t)}{t^2}+\frac{2x_2(t)}{t}-1\\
A(t) &= \begin{pmatrix}t^{-1}&-1\\t^{-2}&2t^{-1}\end{pmatrix}\\
b(t) &= \begin{pmatrix}t\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fundamentalsystem von Lösungen von (4.17): $\begin{pmatrix}t^2\\-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t^2\ln t\\-t-t\ln t\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_1(t)t^2+c_2(t)t^2\ln t\\
x_2(t) &= -c_1(t)t-c_2(t)(t+t\ln t)\\
\rightsquigarrow t &= c_1'(t)t^2+c_2'(t)t^2\ln t\\
-1 &= -c_1'(t)t-c_2'(t)t(1+\ln t)\\
\rightsquigarrow c_1'(t) &= \frac{1}{t}\\
c_2'(t) &= 0\\
\rightsquigarrow c_1(t) &= \ln t\\
c_2(t) &= 1
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (4.15) = partikuläre Lösung von (4.15) + allgemeine Lösung von (4.17):

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= t^2\ln t+t^2\ln t+c_1t^2+c_2t^2\ln t\\
x_2(t) &= -t\ln t-t(1+\ln t)-c_1t-c_2t(1+\ln t)
\end{aligned}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

4.6. **Lineare inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung.**

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0(t)x(t) = b(t) \tag{4.18}$$

$$x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_1,\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=x_n \tag{4.19}$$

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0(t)x(t) = 0 \tag{4.20}$$

Satz 4.17.

(1) *Sei* x_* *eine Lösung von* (4.18)*,* V *der Vektorraum der Lösungen von* (4.20)*, dann ist* x_*+V *die Menge der Lösungen von* (4.18)*.*

(2) *Sei* $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ *Fundamentalsystem von* (4.20)*, dann ist*

$$\boxed{x(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} y_j(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)(s)}{W(y_1, \ldots, y_n)(s)} b(s)\, ds}$$

eine Lösung von (4.18)*.*

Wronski-Determinante:

$$\boxed{W(f_1, \ldots, f_k)(t) := \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_k(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & & f_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(t) & f_2^{(k-1)}(t) & \cdots & f_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}}$$

Beweis von (2). Wir betrachten das zu (4.18) gehörige lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ($x_0 := x$, $x_1 := x'$, …, $x_{n-1} := x^{(n-1)}$):

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= x_1(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= b(t) - a_{n-1}(t)\, x_{n-1} - \ldots - a_0(t)\, x_0(t) \end{aligned}$$

Dann ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem des entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichungssytem.

Ansatz: Variation der Konstanten:

$$x(t) = c_1(t)\, y_1(t) + \ldots + c_n(t)\, y_n(t)$$

ergibt analog zum letzten Abschnitt das lineare inhomogene algebraische Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = Y(t) \cdot c'(t).$$

Mittels Cramerscher Regel folgt nun

$$\begin{aligned} c_j'(t) &= \frac{1}{\det(Y(t))} \cdot \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_{j-1}(t) & 0 & y_{j+1}(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_{j-1}'(t) & 0 & y_{j+1}'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_{j-1}^{(n-1)}(t) & b(t) & y_{j+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+j} \cdot \frac{W(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)(t)}{W(y_1, \ldots, y_n)(t)} b(t) \end{aligned}$$

□

Beispiel. $n = 2$

$$x''(t) + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) = b(t) \tag{4.21}$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad x'(t_0) = x_1 \tag{4.22}$$

$$x''(t) + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) = 0 \tag{4.23}$$

Fundamentalsystem von Lösungen von (4.23): $y_1(t)$, $y_2(t)$

$$\begin{aligned} W(y_i)(t) &= \det(y_i(t)) = y_i(t) \qquad i = 1,2 \\ W(y_1, y_2)(t) &= \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = y_1(t)\,y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t) \end{aligned}$$

Eine Lösung von (4.21):

$$x(t) = -y_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)}{y_1(s)\,y_2'(s) - y_1'(s)\,y_2(s)} b(s)\,ds + y_2(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)}{y_1(s)\,y_2'(s) - y_1'(s)\,y_2(s)} b(s)\,ds$$

Beispiel. Freier Fall mit Reibung 23.06.03

$a > 0$ Reibungskoeffizient, $b = -g < 0$ negative Gravitationskonstante

$$x''(t) + ax'(t) = b$$

$\lambda^2 + a\lambda = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a \rightsquigarrow$ Fundamentalsystem

$$y_1(t) = 1 \qquad y_2(t) = e^{-at}$$

Allgemeine Lösung von (4.21):

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + c_2 e^{-at} - \int_0^t \frac{e^{-as}}{-ae^{-as}} b\,ds + e^{-at} \int_0^t \frac{1}{-ae^{-as}} b\,ds \\ &= c_1 + c_2 e^{-at} + \frac{b}{a} t - e^{-at}\, \frac{1}{a} \frac{b}{a} e^{as} \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= c_1 - \frac{b}{a^2} + e^{-at}\left(c_2 + \frac{b}{a^2}\right) + \frac{b}{a} t \\ x'(t) &= -ae^{-at}\left(c_2 + \frac{b}{a^2}\right) + \frac{b}{a} \\ &= -e^{-at}\left(ac_2 + \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \\ \rightsquigarrow \lim_{t\to\infty} x'(t) &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Anfangswerte (4.22):

$$\begin{aligned} x_1 = x'(0) &= -\left(ac_2 + \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} = -ac_2 \quad \rightsquigarrow c_2 = -\frac{x_1}{a} \\ x_0 = x(0) &= c_1 - \frac{b}{a^2} + c_2 + \frac{b}{a^2} = c_1 - \frac{x_1}{a} \quad \rightsquigarrow c_1 = x_0 + \frac{x_1}{a} \\ \rightsquigarrow x(t) &= x_0 + \frac{x_1}{a} - \frac{b}{a^2} + \left(\frac{b}{a^2} - \frac{x_1}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a} t \\ x'(t) &= -e^{-at}\left(-x_1 + \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \\ x'(t) \overset{!}{=} 0 &\rightsquigarrow t_* = \frac{1}{a} \ln \frac{b - ax_1}{b} \end{aligned}$$

Beispiel. $x''(t) + x(t) = b(t)$

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$

Eine Lösung von (4.21):

$$\begin{aligned} x(t) &= -\cos t \cdot \int_0^t \frac{\sin s}{\cos^2 s + \sin^2 s} b(s)\, ds + \sin t \cdot \int_0^t \frac{\cos s}{1} b(s)\, ds \\ &= -\cos t \cdot \int_0^t \sin s \cdot b(s)\, ds + \sin t \cdot \int_0^t \cos s \cdot b(s)\, ds \end{aligned}$$

Sei $b(t) = \cos \omega t$.

Allgemeine Lösung von (4.21):

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t)\left(c_1 - \int_0^t \sin s \cdot \cos \omega s ds\right) + \sin t \left(c_2 + \int_0^t \cos s \cdot \cos \omega s ds\right) \\ &= \cos(t)\left(c_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \sin((1+\omega)s) + \sin((1-\omega)s)\, ds\right) \\ &\quad + \sin(t)\left(c_2 + \frac{1}{2}\int_0^t \cos((1+\omega)s) + \cos((1-\omega)s)\, ds\right) \end{aligned}$$

$\omega = 1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t)\left(c_1 - \frac{1}{4}\cos 2s\Big|_{s=0}^{s=t}\right) + \sin(t)\left(c_2 + \frac{1}{4}\sin 2s\Big|_{s=0}^{s=t} + \frac{t}{2}\right) \\ &= \cos(t)\left(c_1 - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\right) + \sin(t)\left(c_2 + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}\right) \\ x\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) &= 0 + (-1)^k\left(c_2 - \frac{1}{4} + \frac{2k+1}{4}\right) \\ \rightsquigarrow \left|x\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)\right| &\xrightarrow{k\to\infty} \infty \quad \rightsquigarrow \quad \text{Resonanz-Katastrophe} \end{aligned}$$

Vorsicht: Bei großen Amplituden x ist die lineare Gleichung meistens <u>kein</u> gutes Modell, besser ist eine nichtlineare Gleichung

$$\omega \approx 1: \quad \hat{x}\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \omega\right) \xrightarrow{\omega\to 1} x\left(\frac{2k+1}{2}\pi, 1\right) \approx \infty \qquad \text{bei } k \approx \infty.$$

5. Stabilität von stationären Lösungen

$$x'(t) = f(x) \tag{5.1}$$
$$x(0) = x_0 \tag{5.2}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

maximale Lösung von (5.1)/(5.2): $\hat{x}(t, x_0)$ für $t \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$

Definition 5.1. Sei $x_* \in U$ mit $f(x_*) = 0$ stationäre Lösung. (in)stabil, asymptotisch stabil

(1) x_* heißt stabil (Liapunov-stabil), gdw.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in U, \|x_0 - x_*\| < \delta : \quad t_+(x_0) = +\infty \text{ und } \|\hat{x}(t, x_0) - x_*\| < \varepsilon \forall t \geq 0}$$

(2) x_* heißt instabil, wenn x_* nicht stabil ist.

(3) x_* heißt asymptotisch stabil, wenn x_* stabil ist und für $\|x_0 - x_*\| < \delta$ gilt

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t, x_0) = x_*}$$

Beispiel. $n = 2$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1 - x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ x_2'(t) &= x_1 + x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{aligned}$$

Die stationäre Lösung $x_1 = x_2 = 0$ ist instabil.
Die stationäre Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ ist instabil, aber $\hat{x}(t, x_0) \xrightarrow{t\to\infty} (1,0)$ für $(x_1, x_2) \approx (1,0)$

5.1. Verhältnis von Stabilität und stetiger Abhängigkeit der Lösung von dem Anfangswert.

Sei $t_+(x_0) = \infty$ für alle $x_0 \approx x_*$.

$\hat{x}(t, x_0)$ ist stetig vom Anfangswert abhängig, d.h.

$\forall t_0 \geq 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$: $|t - t_0| + \|x_0 - x_*\| < \delta \Rightarrow \|\hat{x}(t, x_0) - \hat{x}(t, x_*)\| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow \forall c > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(c, \varepsilon) > 0$: $0 \leq t \leq c$, $\|x_0 - x_*\| < \delta \Rightarrow \|\hat{x}(t, x_0) - x_*\| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow \hat{x}(t, x_0) \xrightarrow{x_0 \to x_*} x_*$ lokal glm. bzgl. t

Stabilität heißt aber: $\hat{x}(t, x_0) \xrightarrow{x_0 \to x_*} x_*$ glm. auf $[0, \infty)$.

Beispiel. $n = 1$

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \hat{x}(t, x_0) &= e^{\lambda t} x_0 \end{aligned}$$

$\lambda > 0$: $e^{\lambda t} x_0 \xrightarrow{x_0 \to 0} 0$ lokal gleichmäßig; Aber $x = 0$ ist nicht stabil.

Satz 5.2 (Prinzip der linearisierten Stabilität). *Sei $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ und $x_* \in U$ mit $f(x_*) = 0$, dann gilt:* linearisierte Stabilität

(1) *Wenn* $\mathrm{Re}\lambda < 0$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{spec} f'(x_*)$, *dann ist* x_* *asymptotisch stabil.*

(2) *Wenn* $\mathrm{Re}\lambda > 0$ *für ein* $\lambda \in \mathrm{spec} f'(x_*)$, *dann ist* x_* *instabil.*

Beispiel. $n = 1$, 25.06.03

$$x' = \alpha x + \beta x^3$$

$x_* = 0$ ist eine stationäre Lösung:

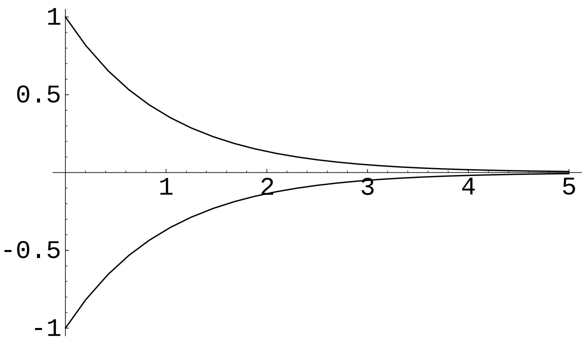
$$f'(x_*) = \frac{d}{dx}\left(\alpha x + \beta x^3\right)\bigg|_{x=0} = \alpha$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha < 0 & \text{asymptotisch stabil} \\ \alpha > 0 & \text{instabil} \end{cases}$$

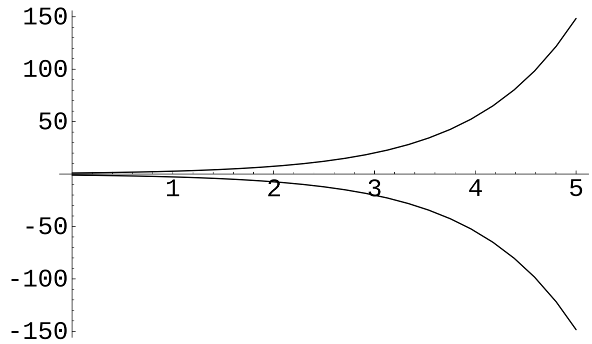
Für $\alpha < 0$: $\alpha x + \beta x^3 = 0$, $x \neq 0 \rightsquigarrow \alpha + \beta x^2 = 0 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ sind weitere stationäre Lösungen.

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha x + \beta x^3\right)\bigg|_{x=\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}} = \alpha + 3\beta\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = -2\alpha > 0 \text{ wegen } \alpha < 0,$$

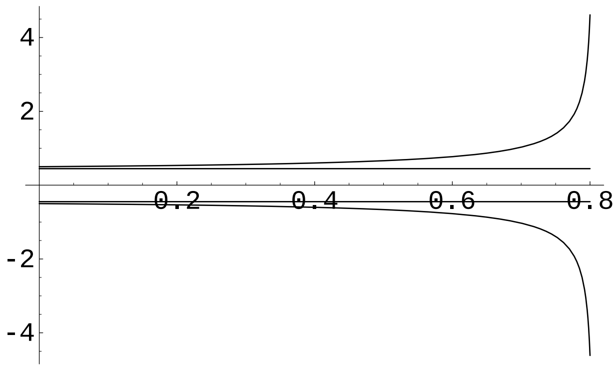
d.h. $\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ sind instabil.



$\alpha = -1$, $\beta = 0$, $x(0) = \pm 1$: $x(t) = \pm e^{-t}$
$x_* = 0$ ist asymptotisch stabil, da $\alpha < 0$



$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $x(0) = \pm\varepsilon$: $x(t) = \pm e^{t}$
$x_* = 0$ ist instabil, da $\alpha > 0$



$\alpha = -1$, $\beta = 5$, $x(0) = \pm\frac{1}{2}$:

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{5 - e^{2t}}}$$

$x_* = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ sind instabil, da $\alpha < 0$

Beispiel. $n = 2$

$$\begin{aligned} x' = f(x,y) &= x^2 - y^2 - 5 \\ y' = g(x,y) &= x^2 + y^2 - 13 \end{aligned}$$

stationäre Lösungen:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 13 \\ \rightsquigarrow 2x^2 - 18 &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = \pm 3 \\ y^2 &= 4 \quad \rightsquigarrow \quad y = \pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\
\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(3,2)-\lambda I\right) &= \lambda^2-10\lambda+48 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_{1,2}=5\pm\sqrt{25-48} \quad \rightsquigarrow \text{ instabil} \\
\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(-3,-2)-\lambda I\right) &= \lambda^2+10\lambda+48 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_{1,2}=-5\pm\sqrt{25-48} \quad \rightsquigarrow \text{ as. stabil}
\end{aligned}$$

Die Punkte $(3,-2)$ und $(-3,2)$ sind auch instabil.

Beweis von Satz 5.2, Teil (1). Sei

$$\lambda_0 := \max\{\mathrm{Re}\lambda \mid \lambda\in \mathrm{spec} f'(x_*)\} < 0 \quad \text{(nach Vor.)}$$

(1) Behauptung: $\exists c>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall t\geq 0$:

$$\|\exp[tf'(x_*)]x\| \leq c\cdot e^{\frac{\lambda_0}{2}t}\|x\| \qquad (tf'(x_*)\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$$

Annahme: Gegenteil: $\forall c>0\ \exists x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$:

$$\|\exp[tf'(x_*)x]\| > c\cdot e^{\frac{\lambda_0}{2}t}\|x\|$$

$c=i\in\mathbb{N}$ liefert $x_i\in\mathbb{R}^n$, $\|x_i\|=1$, und $t_i\geq 0$, so daß

$$\|\exp[t_i f'(x_*)]x_i\|e^{-\frac{\lambda_0}{2}t_i} > i \xrightarrow{i\to\infty} \infty,$$

aber

$$e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}\exp[tf'(x_*)]x = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{e^{\overbrace{\left[\mathrm{Re}\lambda_j-\frac{\lambda_0}{2}\right]}^{<0}t}}_{\xrightarrow{t\to\infty}0} \sum_{k=1}^{g_j}\sum_{l=1}^{b_{jk}} x_{jkl}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}\mathfrak{n}_{j,k,l-r} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Widerspruch zu $\|\exp[t_i f'(x_*)]x_i\|e^{-\frac{\lambda_0}{2}t_i} \xrightarrow{i\to\infty} \infty$.

(2) Sei $\hat{x}(t,x_0)$ maximale Lösung von (5.1), (5.2), $t\in(t_-(x_0),t_+(x_0))$.

$$\begin{aligned}
\partial_t[\hat{x}(t,x_0)-x_*] &= f(\hat{x}(t,x_0)) \\
&= \underbrace{f(x_*)}_{=0}+f'(x_*)(\hat{x}(t,x_0)-x_*)+R(\hat{x}(t,x_0)) \quad \text{mit } \frac{\|R(\xi)\|}{\|\xi\|} \xrightarrow{\xi\to x_*} 0
\end{aligned}$$

$\xi(t) := \hat{x}(t,x_0)$: inhomogene lineare DGL:

$$\partial_t[\xi(t)-x_*] = f'(x_*)(\xi(t)-x_*)+R(\xi(t))$$

Variation der Konstanten: Für $0\leq t<t_+(x_0)$ ist

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t,x_0)-x_* &= \exp[tf'(x_*)](x_0-x_*)+\int_0^t \exp[(t-s)f'(x_*)]R(\hat{x}(s,x_0))\,ds \\
\|\hat{x}(t,x_0)-x_*\| &\leq c\cdot e^{\frac{\lambda_0}{2}t}\|x_0-x_*\|+\int_0^t c\cdot e^{\frac{\lambda_0}{2}(t-s)}\cdot\|R(\hat{x}(s,x_0))\|\,ds
\end{aligned}$$

(3) $\exists\alpha>0\ \forall\xi\in U$: $\|\xi-x_*\|<\alpha \Rightarrow \|R(\xi)\|\leq -\frac{\lambda_0}{4c}\|\xi-x_*\|$

$$t_*(x_0) := \begin{cases} \infty & \text{falls } \|\hat{x}(t,x_0)-x_*\|<\alpha \quad \forall 0\leq t<t_+(x_0) \\ \inf\{t\geq 0 \mid \|\hat{x}(t,x_0)-x_\infty\|\geq\alpha\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}\|\hat{x}(t,x_0)-x_*\| &\leq c\|x_0-x_*\|+c\int_0^t e^{-\frac{\lambda_0}{2}s}\|R(\hat{x}(s,x_0))\|\,ds \quad 0\leq t<t_+(x_0) \\
&\leq c\|x_0-x_*\|+c\int_0^t e^{-\frac{\lambda_0}{2}s}\cdot\left(-\frac{\lambda_0}{4c}\|\hat{x}(s,x_0)-x_*\|\right)ds,
\end{aligned}$$

wenn $\|\hat{x}(s,x_0)-x_*\|<\alpha$ für $0\leq s<t$, also wenn $0\leq s<t<t_*(x_0)$.

Anwendung Gronwall-Lemma 3.17 mit $z(t) = e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}\|\hat{x}(t,x_0) - x_*\|$, $z_0 = c\|x_0 - x_*\|$, $L = -\frac{\lambda_0}{4}$, $a = 0$, $b = t_*$:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}\|\hat{x}(t,x_0) - x_*\| &\leq c\|x_0 - x_*\|\, e^{-\frac{\lambda_0}{4}t} \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_*(x_0) \\ \Leftrightarrow \|\hat{x}(t,x_0) - x_*\| &\leq c\|x_0 - x_*\|\, e^{\frac{\lambda_0}{4}t} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$.

(a) Ist $t_*(x_0) = \infty$, so ist für $\|x_0 - x_*\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{c}, \alpha\right\} =: \delta(\varepsilon)$:

$$\|\hat{x}(t,x_0) - x_*\| < c \cdot \|x_0 - x_*\| \cdot e^{\frac{\lambda_0}{4}t} < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} \cdot \underbrace{e^{\frac{\lambda_0}{4}t}}_{<1} < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq t < \infty$$

und es gilt $\hat{x}(t,x_0) \xrightarrow{t\to\infty} x_*$.

(b) Ist $t_*(x_0) < \infty$, so ergibt

$$\alpha = \|\hat{x}(t_*,x_0) - x_*\| \leq c\|x_0 - x_*\| \underbrace{e^{\frac{\lambda_0}{4}t_*}}_{\leq 1} \leq c\|x_0 - x_*\|$$

einen Widerspruch bei $x_0 \to x_*$.

Also tritt immer der Fall $t_*(x_0) = \infty$ auf.

□

Satz 5.3 (Prinzip der linearen Stabilität für Gleichungen höherer Ordnung)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ C^n-glatt. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$x^{(n)}(t) = f\left(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right).$$

Sei $(x_*, 0, \ldots, 0) \in U$ mit $f(x_*, 0, \ldots, 0) = 0$, d.h. x_* ist stationäre Lösung. Dann gilt:

Wenn $\mathrm{Re}\lambda < 0$ *für alle*

$$\lambda \in \operatorname{spec}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}(x_*, 0, \ldots, 0),$$

dann ist $(x_*, 0, \ldots, 0)$ asymptotisch stabil, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$:

$$\|(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - (x_*, 0, \ldots, 0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left\|\left(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) - (x_*, 0, \ldots, 0)\right\| < \varepsilon$$

und

$$\left\|\left(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) - (x_*, 0, \ldots, 0)\right\| \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

d.h. ist $x(0) \approx x_*$, $x'(0) \approx 0$, …, $x^{(n-1)}(0) \approx 0$, dann ist $x(t) \approx x_*$, $x'(t) \approx 0$, …, $x^{(n-1)}(t) \approx 0$ $\forall t \geq 0$.

Für $n = 2$: $\|x(0) - x_*\| + \|x'(0)\| < \delta \rightsquigarrow \|x(t) - x_*\| + \|x'(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$.

02.07.03

5.2. Liapunov-Funktionen und erste Integrale.

max. Lösung von (5.1), (5.2): $\hat{x}(t, x_0)$, $t \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$

Liapunov-Funktion, erstes Integral

Definition 5.4. Sei $U_0 \subseteq U$, $V : U_0 \to \mathbb{R}$. Gelte

$$\boxed{V(\hat{x}(t, x_0)) \geq V(\hat{x}(s, x_0))} \tag{5.3}$$

für alle $t_-(x_0) < t \leq s < t_+(x_0)$ mit $\hat{x}(t, x_0), \hat{x}(s, x_0) \in U_0$. Dann heißt V Liapunov-Funktion zu (5.1) auf U_0.

Gilt zudem

$$\boxed{V(\hat{x}(t, x_0)) = V(\hat{x}(s, x_0))}$$

für alle $t, s \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$ mit $\hat{x}(t, x_0), \hat{x}(s, x_0) \in U_0$, so heißt V erstes Integral zu (5.1) auf U_0.

Bemerkung.

- erstes Integral: $V(x(t)) = \text{const.}$: eine algebraische Gleichung für n unbekannte Funktionen
  $$\rightsquigarrow \; x_1(t) = \phi(x_2(t), \ldots, x_n(t), \text{const.})$$
  $n = 2$: Reduktion auf eine skalare Differentialgleichung $\rightsquigarrow$ getrennte Variablen
- $V \in C^1(U_0, \mathbb{R})$, U_0 offen:
  $$(5.3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} V(\hat{x}(t, x_0)) \leq 0 \quad \forall t \in (t_-(x_0), t_+(x_0)) \text{ mit } \hat{x}(t, x_0) \in U_0$$
  $$\frac{d}{dt} V(\hat{x}(t, x_0)) = V'(\hat{x}(t, x_0)) \cdot \partial_t \hat{x}(t, x_0) = \langle \nabla V(\hat{x}(t, x_0)), f(\hat{x}(t, x_0)) \rangle$$
- V ist erstes Integral $\Leftrightarrow \langle \nabla V(\hat{x}(t, x_0)), f(\hat{x}(t, x_0)) \rangle = 0$

  $\Leftrightarrow$ Niveaumenge $M_c := \{\xi \in U_0 \,|\, V(\xi) = c\}$ ist "invariant" bzgl. dem Fluß von (5.1), d.h. $x_0 \in M_c \Rightarrow \hat{x}(t, x_0) \in M_c$ $\forall t \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$ mit $\hat{x}(t, x_0) \in U_0$.

Beispiel. konservative Systeme mit Reibung:

$$m_i x_i'' = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) - \beta_i x_i'$$

$U \in C^2(U; \mathbb{R})$, $m_i > 0$, $\beta_i \geq 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} q_i &:=& x_i \\ p_i &:=& m_i x_i' \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} q_i' &=& \frac{p_i}{m_i} \\ p_i' &=& -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n) - \frac{\beta_i}{m_i} p_i \end{array}\right\}$$

System von $2n$ nichtlinearen Differentialgleichungen in Normalform.

$$\begin{aligned}
\underbrace{V(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}_{\text{mech. Energie}} &:= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{m_i}}_{\text{kinet. Energie}} + \underbrace{U(q_1, \ldots, q_n)}_{\text{pot. Energie}} \\
\frac{d}{dt} V(q_1, \ldots, p_n) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{m_i} + U(q_1, \ldots, q_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i p_i'}{m_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n) q_i' \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_i}{m_i} \left(-\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n) - \frac{\beta_i}{m_i} p_i \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n) \frac{p_i}{m_i} \right] \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{m_i^2} p_i^2 \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{Energieverlust durch Reibung} \\ = 0, \text{ falls } \beta_i = 0 & \text{keine Reibung } \rightsquigarrow \text{ Energie konstant} \end{cases}
\end{aligned}$$

Beispiel. Gradientensysteme:

$$x_i' = -\frac{dV}{dx_i}(x_1,\ldots,x_n) \qquad i=1,\ldots,n$$

d.h. $f(x) = -\nabla V(x)$

$$\frac{d}{dt}V(x) = V'(x)\,x' = \langle \nabla V(x), f(x)\rangle = \langle \nabla V(x), -\nabla V(x)\rangle = -\|V(x)\| \le 0$$

Beispiel. Elektrischer Schwingkreis mit nichtlinearer Kennlinie

$$I'' = \frac{1}{L}\left[U'(t) - \frac{I}{C} - R(I)\,I'\right], \quad U(0)=0$$

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{1}{L}\left[U'(t) - \frac{I}{C} - R(I)\,I'\right], \quad U(0)=0 \\ V(I,I') &:= \frac{1}{2}I'^2 + \frac{1}{2LC}I^2 \\ \frac{d}{dt}V(I,I') &= I'I'' + \frac{1}{LC}II' = I'\left(\frac{U'}{L} - \frac{I}{LC} - \frac{R(I)\,I'}{L}\right) + \frac{1}{LC}II' = \frac{U'I'}{L} - \frac{I'^2}{LC}R(I) \end{aligned}$$

1. Liapunov-Kriterium

Satz 5.5 (1. Liapunov'sches Stabilitätskriterium)**.** *Sei $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $U_0 \subseteq U$, $V: U_0 \to \mathbb{R}$ stetig. Sei*

(5.4) $$x_* \in U_0 \text{ mit } f(x_*) = 0$$

eine stationäre Lösung und

(5.5) $$x_* \text{ strenges lokales Minimum von } V \text{ auf } U_0.$$

Dann ist x_* stabil.

Bemerkung. $V \in C^1(U_0;\mathbb{R})$, $\nabla V(x_*) = 0$, $\nabla^2 V(x_*) = [\partial_i\partial_j V(x_*)]_{i,j=1}^n$ positiv definit $\rightsquigarrow$ x_* ist streng lokales Minimum von V.

Beweis.

(1) Beh.: $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$: $\inf\{V(x)\,|\,x \in U_0, \|x - x_0\| = \varepsilon\} > V(x_*)$

Annahme: $\exists \varepsilon_j \searrow 0$: $\inf\{V(x)\,|\,x \in U_0, \|x - x_0\| = \varepsilon_j\} \le V(x_*)$

Dies liefert eine Folge $x_j \in U_0$ mit $\|x_j - x_*\| = \varepsilon_j$, $V(x_j) \le V(x_*)$

$j \to \infty$: Widerspruch zur Voraussetzung, daß x_* streng lokales Minimum ist.

(2) Annahme: x_* ist nicht stabil, d.h. es gilt nicht:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in U$, $\|x_0 - x_*\| < \delta$: $t_+(x_0) = \infty$, $\|\hat{x}(t,x_0) - x_*\| < \varepsilon\ \forall t \in (0,\infty)$

D.h.: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in U$, $\|x_\delta - x_*\| < \delta$: $t_+(x_\delta) < \infty$ oder $\|\hat{x}(t_\delta, x_\delta) - x_*\| \ge \varepsilon$ für ein $t_\delta \ge 0$.

Ist $t_+(x_\delta) < \infty$, so folgt $\|\hat{x}(t_\delta,x_\delta) - x_*\| \ge \varepsilon$ für ein t_δ nach dem Satz über das Verhalten nicht unbeschränkt fortsetzbarer Lösungen. Und nach dem Mittelwertsatz existiert (für $\delta \le \varepsilon$) ein t_δ mit

$$\|\hat{x}(t_\delta,x_\delta) - x_*\| = \varepsilon.$$

O.B.d.A. sei ε so klein, daß

$$m := \inf\{V(x)\,|\,\|x - x_*\| = \varepsilon\} > V(x_*)$$

$$\rightsquigarrow V(\hat{x}(t_\delta,x_\delta)) \ge m > V(x_*)$$

$\delta \searrow 0$ liefert $x_\delta \to x_*$, also $V(x_\delta) \to V(x_*)$: Mit (5.5) und da V Liapunov-Funktion ist:

$$0 \le V(\hat{x}(t_\delta,x_\delta)) - V(x_*) \le V(x_\delta) - V(x_*) \to 0 \quad \text{bei } \delta \to 0.$$

Widerspruch zu $V(\hat{x}(t_\delta,x_\delta)) \ge m > V(x_*)$.

□

Satz 5.6. *Seien* (5.3), (5.4) *und* (5.5) *erfüllt. Sei* $V(\hat{x}(\cdot, x_0))$ *konstant, gdw.* $x_0 = x_* \ \forall x_0 \in U_0$. 07.07.03
Dann ist x_* *asymptotisch stabil. Genauer gilt folgende Abschätzung des Einzugsbereiches von* x_**:*

(5.6) $\forall c \in \mathbb{R}$ *mit* $M_c := \{x \in U_0 | V(x) \leq c\}$ *abgeschlossen und beschränkt*

(5.7) *und* $\forall x_0 \in M_c$ *mit* $x_0 \neq x_* \ \exists t_0 \in (0, t_+(x_0)) : V(x_0) > V(\hat{x}(t_0, x_0))$, *so gilt*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t, x_0) = x_* \quad \forall x_0 \in M_c}$$

Bemerkung. Für $c \approx V(x_*)$ mit $c > V(x_*)$ sind (5.6) und (5.7) erfüllt.

M_c ist abgeschlossen: Sei $x_j \in M_c$ Folge mit $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$. $V(x_j) \leq c \rightsquigarrow V(x) \leq c \rightsquigarrow x \in M_c$.

Beweis.

$$\begin{array}{lll} & \text{Annahme:} & \exists x_0 \in M_c : \neg(\forall \varepsilon > 0 \exists a \in \mathbb{R} \forall t > a : \|\hat{x}(t, x_0) - x_*\| < \varepsilon) \\ & \rightsquigarrow & \exists x_0 \in M_c \exists \varepsilon > 0 \forall a \in \mathbb{R} \exists t_a > a : \|\hat{x}(t_a, x_0) - x_*\| \geq \varepsilon \\ (5.8)\ a = n \in \mathbb{N} : t_n \to \infty & \rightsquigarrow & \exists x_0 \in M_c \exists \varepsilon > 0 \exists t_1 < t_2 < \ldots \to \infty : \|\hat{x}(t_n, x_0) - x_*\| \geq \varepsilon \end{array}$$

M_c ist nach (5.6) abgeschlossen und beschränkt und $\hat{x}(t_n, x_0) \in M_c$ nach (5.3). Dann existiert eine konvergente Teilfolge von $\hat{x}(t_n, x_0)$: Sei o.B.d.A. $\hat{x}(t_n, x_0) \to \tilde{x} \in M_c$,

$$V(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} V(\hat{x}(t_n, x_0)) = \inf_{t\geq 0} V(\hat{x}(t, x_0))$$

$$\begin{array}{rcll} V(\hat{x}(s, \hat{x}(t_j, x_0))) & = & V(\hat{x}(s + t_j, x_0)) & \\ \downarrow j \to \infty & & \downarrow j \to \infty & \\ V(\hat{x}(s, \tilde{x})) & = & \inf_{t\geq s} V(\hat{x}(t, x_0)) = V(\tilde{x}) & \forall s \end{array}$$

Mit (5.7) folgt $\tilde{x} = x_* \rightsquigarrow$ Widerspruch zu (5.8). □

Folgerung (2. Liapunov'sches Kriterium). Sei $V : U_0 \to \mathbb{R}$ Liapunov-Funktion zu (5.1), $U_0 \subseteq U$, V stetig. Sei $x_* \in U_0$, $f(x_*) = 0$, x_* streng lokales Minimum von V. 2. Liapunov-Kriterium

Gelte $\forall x_0 \in U_0$: $t \in [0, t_+(x_0)) \mapsto V(\hat{x}(t, x_0)) \in \mathbb{R}$ konstant $\Rightarrow x_0 = x_*$.

Dann ist x_* asymptotisch stabil.

Genauer gesagt gilt:

Ist $M_c := \{x \in U_0 | V(x) \leq c\}$ abgeschlosssen, beschränkt, und gilt

$\forall x_0 \in M_c$ mit $x_0 \neq x_* \ \exists t_0 \in (0, t_+(x_0))$: $\hat{x}(t_0, x_0) \in U_0$ und $V(\hat{x}(t_0, x_0)) < V(x_0)$, so gilt

$$\boxed{\hat{x}(t, x_0) \xrightarrow{t\to\infty} x_* \quad \forall x_0 \in M_c}$$

Beispiel. math. Pendel mit Reibung: $U = \mathbb{R}^2$, $\beta \geq 0$

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \beta x'(t) \quad \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - \beta x_2(t) \end{array} \right.$$

$$V(x_1(t), x_2(t)) = V(x(t), x'(t)) := \frac{1}{2} |x'(t)|^2 - \frac{g}{l} \cos x(t)$$

$\beta = 0$: V ist erstes Integral (Energieerhaltungssatz), stationäre Lösung: $x_1 = x_2 = 0$, d.h. $x = x' = 0$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil

$$\begin{array}{rcl} \beta > 0: \quad \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2} x'(t)^2 - \dfrac{g}{l} \cos x(t)\right] & = & x'(t) x''(t) + \dfrac{g}{l} \sin x(t) x'(t) \\ & = & x'(t) \left[-\dfrac{g}{l} \sin x(t) - \beta x'(t)\right] + \dfrac{g}{l} \sin x(t) x'(t) \\ & = & -\beta x'(t)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow x'(t) = 0 \\ V(0,0) & = & -\dfrac{g}{l} < c \quad \rightsquigarrow \quad M_c = \left\{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \left| \dfrac{1}{2} x'^2 - \dfrac{g}{l} \cos x \leq c \right.\right\} \end{array}$$

6. Der Wiederkehrsatz von Poincare

konservative Systeme:

$$m_i x_i''(t) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \quad i=1,\ldots,n$$

Hamilton-Systeme:

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(p_1(t),\ldots,p_n(t),q_1(t),\ldots,q_n(t)) \quad i=1,\ldots,n \\ q_i'(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(p_1(t),\ldots,p_n(t),q_1(t),\ldots,q_n(t)) \quad i=1,\ldots,n \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}$ ist erstes Integral

$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

n-dimensionales Analogon: Gauß-Integralsatz

$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f(x)=(f_1(x_1,x_2,x_3),f_2(x_1,x_2,x_3),f_3(x_1,x_2,x_3))$

$$\underbrace{\int_\Omega \underbrace{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\right]}_{\mathrm{div} f(x)} dx}_{\text{Menge pro Zeiteinheit, die in } \Omega \text{ erzeugt wird}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega}\langle f(x),\nu(x)\rangle\,dx}_{\substack{\text{Menge pro Zeiteinheit,} \\ \text{die aus } \Omega \text{ fließt}}}$$

$\mathrm{div} f:\Omega\to\mathbb{R}$ Quellen (bzw. Senken-) Dichte

divergenz-freie Vektorfelder: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{div} f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}^n$

Lemma 6.1. *Die rechte Seite eines Hamilton-Systems ist divergenzfrei.*

Beweis. $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} f(p_1,\ldots,q_n) &= \left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_1}(p_1,\ldots,q_n),\ldots,-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_n}(p_1,\ldots,q_n),\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_1}(p_1,\ldots,q_n),\ldots,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_n}(p_1,\ldots,q_n)\right) \\ \mathrm{div} f &= \frac{\partial}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial p_n}\left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_n}\right)=0 \end{aligned}$$

□

Lemma 6.2. *Sei $A\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{M}(n\times n,\mathbb{R}))$, $A(0)=I$. Dann ist*

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\det A(t)\right|_{t=0}=\mathrm{sp}A'(0)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det[a_1(t),\ldots,a_n(t)] &= \sum_{j=1}^n \det\left[a_1(t),\ldots,a_{j-1}(t),a_j'(t),a_{j+1}(t),\ldots,a_n(t)\right]_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_{1j}'(0) & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & a_{2j}'(0) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj}'(0) & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{a_{jj}'(0)} \\ &= \mathrm{sp}A'(0) \end{aligned}$$

□

(6.1) $$x'(t) = f(x(t))$$
(6.2) $$x(0) = x_0$$

$x(t) = \hat{x}(t, x_0)$, $t \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$

Lemma 6.3. *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\frac{d}{dt} \det \underbrace{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}(t, x_0)}_{\in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})} \Bigg|_{t=0} = \mathrm{sp} f'(x_0) = \mathrm{sp} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{i,j=1}^n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_0) = \mathrm{div} f(x_0)$$

Beweis.

$$\frac{d}{dt} \det \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}(t, x_0)\Big|_{t=0} = \mathrm{sp} \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial t \partial x_0}(t, x_0)\Big|_{t=0} = \mathrm{sp} \frac{\partial}{\partial x_0} f(\hat{x}(t, x_0))\Big|_{t=0} = \mathrm{sp} f'(x_0)$$

□

Satz 6.4 (Liouville)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar.* Liouville

$$\Omega_t := \{\hat{x}(t, x_0) \,|\, x_0 \in \Omega\} \text{ für } t \in (\sup\{t_-(x_0) \,|\, x_0 \in \Omega\}, \inf\{t_+(x_0) \,|\, x_0 \in \Omega\})$$

Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{vol}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathrm{div} f(x)\, dx}$$

Insbesondere, wenn f divergenzfrei ist, dann ist $\mathrm{vol}\Omega_t = \mathrm{const}$.

Beweis.

$$\Omega_{s+t} = \left\{ \underbrace{\hat{x}(s+t, x_0)}_{\hat{x}(s, \hat{x}(t, x_0))} \,\middle|\, x_0 \in \Omega \right\} = \{\hat{x}(s, y) \,|\, y \in \Omega_t\} = \hat{x}(s, \Omega_t)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\Omega_t &= \int_{\Omega_t} dx \\
\frac{d}{ds} \mathrm{vol}\Omega_{s+t} \,|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \int_{\Omega_{s+t}} dx \,|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \int_{\Omega_t} \left|\det \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}(s, y)\right| dy \,|_{s=0} \\
&= \int_{\Omega_t} \frac{d}{ds} \det \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0}(s, y) \,|_{s=0}\, dy \\
&= \int_{\Omega_t} \mathrm{sp} f'(y)\, dy \\
&= \int_{\Omega_t} \mathrm{div} f(y)\, dy
\end{aligned}$$

□

Spezialfall: $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t &= \int_{\Omega_t} \mathrm{sp} A dx = \mathrm{sp} A \mathrm{vol}\Omega_t \\
\rightsquigarrow \mathrm{vol}\Omega_t &= e^{\mathrm{sp} At} \mathrm{vol}\Omega_{t=0}
\end{aligned}$$

Satz 6.5 (Poincare)**.** *Sei* $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$, $t_+(x_0) = \infty$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* Poincare
$\forall U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ *meßbar,* $\forall T > 0$ $\exists M \subset U_0$, $\operatorname{vol} M = 0$ $\forall x_0 \in U_0 \setminus M$: $\exists (n_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty} n_j = \infty$ *und*

$$\boxed{\hat{x}(n_j T, x_0) \in U_0 \qquad \forall j}$$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Nullmenge</u> ($\operatorname{vol} M = 0$), wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$Quader $Q_1, \dots, Q_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \supseteq \bigcup_{j=1}^m Q_j$ und $\sum_{j=1}^m \operatorname{vol} Q_j < \varepsilon$. D.h. $x \notin M$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Beweis. Sei $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $T > 0$ fixiert, zu zeigen ist

$$\operatorname{vol} \underbrace{\{x_0 \in U_0 \,|\, \hat{x}(nT, x_0) \notin U_0 \text{ für unendl. viele } n \in \mathbb{N}\}}_{M} = 0$$

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\{x_0 \in U_0 \,|\, \hat{x}(nT, x_0) \notin U_0 \text{ für } n > j\}}_{M_j}$$

$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\Phi(x_0) := \hat{x}(T, x_0)$ Diffeomorphismus
$x_0 \in M_j \rightsquigarrow \Phi^{jk}(x_0) \notin M_j$ $\forall j, k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \Phi^{jk}(M_j) \cap M_j = \emptyset$
$\Phi^{jk}(M_j) \cap \Phi^{jl}(M_j) = \Phi^{jl}\left(\Phi^{j(k-l)}(M_j) \cap M_j\right) = \emptyset$ falls $k > l$.
zu zeigen ist: $\operatorname{vol} M_j = 0$.
$\operatorname{vol} M_j = \operatorname{vol} \Phi(M_j)$ nach Satz von Liouville ($\hat{x}(T, \cdot) = \Phi$ ist volumenerhaltend), da $\operatorname{div} f = 0$.
Angenommen, es ex. ein j_0 mit $\Phi^{j_0}(M_{j_0}) > 0$. Dann ist

$$\infty > \operatorname{vol} U_0 \geq \operatorname{vol} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi^{j_0 k}(M_{j_0}) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{vol} \Phi^{j_0 k}(M_{j_0})}_{\operatorname{vol} M_{j_0}} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{vol} M_{j_0}}_{>0} = \infty$$

Widerspruch.

$\square$

Anhang A. Übersicht

Begriffe.

- DGL, DGL-System, Ordnung, Normalform
- lin. und nichtlin. DGL und DGLsystem, autonom und nichtautonom
- homogene und nichthomogene lineare DGLen und DGLsysteme
- Vektorfeld, Richtungsfeld, Phasenraum, erweiterter Phasenraum, Fluß, Trajektorie, Phasenkurve

Lösungsmethoden.

- Gleichung mit getrennten Variablen, Koordinatentransformation
- maximaler Definitionsbereich, Langzeitverhalten

Die Anfangswertaufgabe.

- Satz von Picard-Lindelöf (Banachscher Fixpunktsatz auf Volterra'sche Integralgleichung)
- vollständiger metrischer Raum, vollständiger normierter Raum (Banachraum), kontraktive Abbildung, $C\left([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\,; \mathbb{R}^n\right)$
- maximale Lösung, unbeschränkte Fortsetzbarkeit, Satz über das Verhalten nicht unbeschränkt fortsetzbarer Lösungen
- Gronwall'sches Lemma, unbeschränkte Fortsetzbarkeit von Lösungen von linearen DGLen und DGLsystemen

Lineare DGL und DGLsysteme.

- homogene DGL und DGLsystem: Fundamentalsystem, allgemeine Lösung
- inhomogene DGL und DGLsystem: allgemeine Lösung des inhomogenes Systems = partikuläre Lösung des inhomogenen Systems + allgemeine Lösung des homogenen Systems

  Variation der Konstanten
- autonome homogene DGL und DGLsystem: Exponentialfunktion für Matrizen, Eigenwerte und ihre Vielfachheiten, Eigenvektoren und beigeordnete Eigenvektoren, Jordan-Ketten

  $n = 2$: Phasenportraits

Stabilität stationärer Lösungen.

- stabil, asymptotisch stabil (Unterschied zur stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten)
- Prinzip der linearisierten Stabilität, zwei Liapunov-Kriterien (Liapunov-Funktion, erstes Integral)

Literatur

[Arnold] V. Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen
[Amann] H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen

INDEX