Ausgewählte Kapitel der mathematischen Optimierung

Mitschrift zur Vorlesung von Prof. Guddat im WS 2001/2002

8. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

2 Elementare Polyedertheorie und lineare Optimierung [1] 2

2.1 Das Lineare Optimierungsproblem und seine geometrische Interpretation 2

2.2 Darstellungssätze 4

2.3 Charakterisierung der Optimalpunkte eines LO-Problems 6

3 Die Simplexmethode 8

3.1 Theoretische Grundlagen der Simplexmethode 8

3.2 Der Fall der Entartung (ausführlich siehe [1]) 11

4 Dualitätstheorie der Linearen Optimierung (LO) und Anwendungen 12

4.1 Dualitätstheorie der LO (siehe auch [1]) 12

4.2 Einige Anwendungen der Dualitätstheorie 13

5 Parametrische Optimierung: Singularitäten ([4, 5]) 14

5.1 Einführung und einige Anwendungen der parametrischen Optimierung 14

5.2 Generische Singularitäten - die Klasse von Jougen-Jonker-Twilt ([4, 5, 6, 7]) 15

5.3 Der Generizitätssatz und der Störungssatz (ohne Beweis) 19

6 Kurvenverfolgung und Sprünge 20

7 Strafmethoden / Strafeinbettungen 21

2 Elementare Polyedertheorie und lineare Optimierung [1]

2.1 Das Lineare Optimierungsproblem und seine geometrische Interpretation

Def.: $\mathrm{E}_p^k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = p + W^k \right\}$, W^k ist ein beliebiger linearer Unterraum im $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{E}^{n-1}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T x = \alpha \right\}$, $c \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.1:

1. $\left\{ \mathrm{E}^{n-1}(\alpha) \big| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Schar paralleler Hyperebenen, die den ganzen $\mathbb{R}^n$ überdecken.
2. Der Vektor c steht senkrecht auf jeder Hyperebene.
3. Der Wert der Zielfunktion $c^T x$ wächst streng monoton in Richtung des Vektors c und fällt streng monoton in Richtung $-c$.

Bew.:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ bel. fest. Dann ist $\mathrm{E}^{n-1}(\alpha)$ eine Hyperebene (Lsg.menge des inhom. Gl.sys. $c^T x = \alpha$). $c^T x = \alpha$ ist wegen $c \neq 0$ ein affiner Unterraum der Dimension $n-1$, da der Rang der Koeffizientenmatrix 1 ist.
   Wir betrachten $p^1, p^2 \in \mathbb{R}^n$ beliebig fest und berechnen $\alpha_1 := c^T p^1$, $\alpha_2 := c^T p^2$.
   $\rightarrow$ $\mathrm{E}^{n-1}(\alpha_1), \mathrm{E}^{n-1}(\alpha_2)$ sind Hyperebenen und es gilt:
   $$\begin{aligned} \mathrm{E}^{n-1}(\alpha_i) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = p^i + W^{n-1} \right\}, i = 1, 2 \\ W^{n-1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T x = 0 \right\} \end{aligned}$$
2. $\mathrm{E}^{n-1}(\alpha_1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T x = c^T p^1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T \left(x - p^1 \right) = 0 \right\} \rightarrow c \bot x - p^1$.
3. $L := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = p^1 + t \cdot c, \, t \in \mathbb{R} \right\}$. Dann gilt:
   (a) $L \perp \mathrm{E}^{n-1}(\alpha)$
   (b) $\forall x \in L: \; c^T x = x^T p^1 + t \cdot \underbrace{c^T c}_{>0} \rightarrow c^T p^1 + t_1 c^T c < c^T p^1 + t_2 c^T c$, falls $t_1 < t_2$.

Def. 2.1: $d+1$ Punkte $x^0, \ldots, x^{d+1} \in \mathbb{R}^n$ heißen affin unabhängig (sind in allg. Lage), wenn die Vektoren $x^i - x^0$ linear unabhängig sind.
Ansonsten heißen sie affin abhängig.

Def. 2.2: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn mit zwei bel. Punkten $x^1, x^2 \in C$ auch die Verbindungsstrecke $[x_1, x_2]$ in C liegt, d.h.

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in C \, \forall x^1, x^2 \in C, \lambda \in [0, 1].$$

Einelementige Mengen und die leere Menge sind ebenfalls konvex.

Def. 2.3: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann ist $\dim C := \dim\mathrm{aff} C$

Lemma 2.2: Die konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt die Dimension d, gdw. es $d+1$ affin unabhängige Punkte in C gibt und mehr als $d+1$ Punkte affin abhängig sind.

Eigenschaften konvexer Mengen: $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex

$$\rightarrow C_1 \pm C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = y^1 \pm y^2, y^1 \in C_1, y^2 \in C_2 \right\}$$

ist ebenfalls konvex.

Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist ebenfalls konvex.

Def. 2.5: $A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, a^T x = k \right\}, a \neq 0$ ist Hyperebene der Dimension n-1.

$H^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, a^T x > k \right\}$ heißt pos. Halbraum zur Hyperebene.

$\bar{H}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, a^T x \geq k \right\}$ heißt pos. abg. Halbraum zur Hyperebene.
$H^-, \bar{H}^-$ analog $(<, \leq)$.

Lemma 2.3:

1. $H^+ \cup H^- \cup A = \mathbb{R}^n$, $H^+ \cap H^- = \emptyset$ (man sagt: H^+, H^-, A bilden eine Zerlegung des $\mathbb{R}^n$)
2. H^+, H^- sind konvex.
3. H^+, H^- sind offen.
4. $\bar{H}^+, \bar{H}^-$ sind abgeschlossen.
5. $\dim H^+ = \dim H^- = n$.

Def. 2.6: Der Durschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen heißt konvexer Polyeder.

Def. 2.7: Es seien $x^1, \ldots, x^N \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

für festgewählte $\lambda_i, i = 1, \ldots, N$ eine Konvexkombination der Punkte $x^1, \ldots, x^N$.

Vermutung I: Jedes beschränkte konvexe Polyeder P der $\dim P \geq 1$ hat endlich viele "Ecken" $x^1, \ldots, x^N$ und läßt sich als Menge aller Konvexkombinationen seiner Ecken darstellen, d.h.

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}$$

Def. 2.5.: Sei $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha \leq b_r, r = 1, \ldots, m,\ \tilde{A}x = b \right\}$.

$$S_I := \left\{ x \in M \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} = b_r, r \in I \right\}, \mathrm{I} \subseteq \{1, \ldots, m\}.$$

1. Wenn $S_I \neq \emptyset$ und $S_I \neq M$, so heißt S_I abgeschlossene Seite des konvexen Polyeders M.
2. Wenn $\dim S_I = 1$, so heißt S_I Kante.
3. Wenn $\dim S_I = 0$, so heißt S_I Ecke.

Bem. 2.5: Andere Defintion von Ecken und Seiten: [2]

Def. 2.6:

1. Eine Hyperebene $\mathrm{E}(\hat{\alpha})$ heißt Berührungsebene an das Polyeder M, wenn $\mathrm{E}(\hat{\alpha}) \cap \partial M \neq \emptyset$ und $\mathrm{E}(\hat{\alpha}) \cap \mathrm{relint} M = \emptyset$.
2. $\hat{x} \in \mathrm{E}(\hat{\alpha}) \cap M$ heißt Berührungspunkt der Hyperebene $\mathrm{E}(\hat{\alpha})$ an den Polyeder M.

Vermutung II: Sei

$$M_{opt} := \left\{ \hat{x} \in M \,|\, c^T \hat{x} \geq c^T x \,\forall x \in M \right\}$$

Opt.menge für $(\mathrm{LOP})_{\max}$. Dann ist M_{opt} leer, M oder eine abgeschlossene Seite von M :

1. $M_{opt} = \emptyset$: $M = \emptyset$ oder $c^T x$ ist auf M nach oben unbeschränkt, d.h.

$$\begin{aligned} \exists \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = x^0 + t \cdot c, t \geq 0 \right\} &\subseteq M \\ \text{und } \lim_{t \to \infty} c^T \left(x^0 + tc \right) &= +\infty \end{aligned}$$

2. $M_{opt} = M$
3. M_{opt} ist eine abgeschlossene Seite von M.

Vermutung III: Wenn M Ecken besitzt und $M_{opt} \neq \emptyset$, dann wird das Maximum von $c^T x$ bzgl. M immer in einer Ecke angenommen.

Vermutung IV: Jeder lokale Optimalpunkt ist globaler Optimalpunkt.

Vermutung V: Geometrische Idee der Simplexmethode:

- Start mit einer bekannten bzw. zu konstruierenden Ecke $x^0 \in M$.
- Übergang zu einer benachbarten Ecke mit größer werdenden Zielfunktionswert.

Def. 2.7: Es seien $C = \left\{ x^0, \ldots, x^d \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Dann heißt die konvexe Hülle

$$\text{conv}C := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i x^i,\, \lambda_i \geq 0 \,\forall i,\, \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \right\}$$

d-dimensionales Simplex.

Satz 2.1: Es sei M ein konvexes Polyeder. M hat einen d-dimensionalen affinen Unterraum mit $0 \leq d < \dim M$ als Seite, gdw. M eine Seite der Dimension d aber keine Seite einer kleineren Dimension besitzt.

Bew.: [1]

Cor. 2.1: M hat eine Gerade als Seite, gdw. M eine Kante aber keine Ecke besitzt.

2.2 Darstellungssätze

Satz 2.2 (Vermutung I): Jedes beschränkte konvexe Polyeder M mit $\dim M \geq 1$ läßt sich als Konvexkombination seiner (endl. vielen) "Ecken" $x^1, \ldots, x^N$ darstellen:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i,\, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots N,\, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}$$

Bew.: M hat mind. eine Ecke. Andernfalls würde nach Satz 2.1 M eine Gerade enthalten. (Wid. zu M beschränkt).
M hat endlich viele Ecken, da M nur endlich viele Seiten besitzt.
Vollständige Induktion über $k = \dim M$:
IA: $k = 1 \Rightarrow M = \left[x^1, x^2 \right]$ Verbindungsstrecke.
IS: IV: Aussage sei $\forall$ Polyeder der Dim. $\leq k$ richtig.
IBew.: Sei M ein beschränkter Polyeder mit $\dim = k + 1$, $x^0 \in M$ bel. fest

1. Fall: x^0 liegt auf einer Seite von M, d.h. $x^0 \in S_I$.
Da $S_I \neq M, S_I \neq \emptyset \Rightarrow \dim S_I < \dim M = k + 1. \Rightarrow \dim S_I \leq k$.
Wir wissen: S_I konvexer Polyeder. Außerdem sind die Ecken von S_I auch Ecken von M.
IV $\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 : x^0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$, x^i Ecken

2. Fall: x^0 liegt auf keiner Seite von M, d.h. $x^0 \in M \setminus \partial M$.
Sei $z \in \mathbb{R}^n, z \neq x^0$. Wir betrachten die Gerade $g := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = t \cdot x_0 + (1-t) \cdot z, t \in \mathbb{R}\}$.
Wir betrachten die Schnittpunkte x^1, x^2 mit ∂M. Es sind genau 2, da M beschränkt. Man kann x^1, x^2 wie folgt angeben: $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} x^i &= t_i x^0 + (1-t_i)\, z \\ t_1 &= \min\left\{t \,|\, t x^0 + (1-t)\, z \in M\right\} \\ t_2 &= \max\left\{t \,|\, t x^0 + (1-t)\, z \in M\right\} \end{aligned}$$

x^i läßt sich als Konvexkombinationen der Ecken von $S_{I_i}, i = 1, 2$, schreiben (IV) und es gilt $S_{I_1} \neq S_{I_2}$, d.h.

$$\begin{aligned} x^1 &= \sum_{i \in \tilde{I}_1} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geq 0, i \in \tilde{I}_1,\ \sum_{i \in \tilde{I}_1} \alpha_i = 1 \\ x^2 &= \sum_{i \in \tilde{I}_2} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geq 0, i \in \tilde{I}_2,\ \sum_{i \in \tilde{I}_2} \alpha_i = 1 \\ x^0 &= \delta x^1 + (1-\delta)\, x^2,\ \delta \in (0,1) \\ \to x^0 &= \delta \sum_{i \in \tilde{I}_1} \alpha_i x^i + (1-\delta) \sum_{i \in \tilde{I}_2} \alpha_i x^i = 1,\ \delta \sum_{i \in \tilde{I}_1} \alpha_i + (1-\delta) \sum_{i \in \tilde{I}_2} \alpha_i = 1 \end{aligned}$$

Def. 2.8:

1. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest: $x^0, x \in K \Rightarrow x^0 + \alpha x \in K\, \forall \alpha \geq 0$. Dann heißt K Kegel mit Scheitelpunkt x^0.
2. Sei K ein Kegel mit einem Scheitelpunkt x^0 und konvexes Polyeder, so heißt K polyedrischer Kegel mit einem Scheitelpunkt x^0.

Satz 2.3(Darstellungssatz für polyedrische Kegel): Sei $K_p = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq 0\} \neq \{0\}$. Dann existieren Vektoren $y^1, \ldots, y^r \in K_p$ derart, daß

$$K_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^r \beta_i y^i,\ \beta_i \geq 0, i = 1, \ldots, r \right\}.$$

Bew.: Sei $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$ $n-\dim$. Einheitswürfel. $K_Q = K_p \cap Q$ beschr. konvexer Polyeder. S.2.2

$$\Rightarrow K_Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,|\, y = \sum_{i=1}^r \lambda_i y^i, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\},$$

wobei $y^1, \ldots, y^r$ Ecken von K_Q sind.
Sei $x \in K_p$ bel., $x \neq 0$. Da K_p ein polyedrischer Kegel mit einem Scheitelpunkt in 0 ist, gilt $\alpha x \in K_p\, \forall \alpha \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\|x\|} \in K_p$. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in K_Q \quad &\to \quad y = \sum_{i=1}^r \lambda_i y^i,\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \\ &\to \quad x = \sum_{i=1}^r \beta_i y^i,\ \beta_i = \|x\| \cdot \lambda_i,\ i = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Satz 2.5(Darstellungssatz für konvexe Polyeder):

1. Jedes konvexe Polyeder M, das mind. eine Ecke besitzt, hat eine Darstellung der folgenden Form:

$$(*)\ M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j y^j,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0 \right\},\ k \geq 1$$

D.h. $M = P + K$ mit

$$\begin{aligned} P &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\} \\ K &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{j=1}^{l} \beta_j x^j,\ \beta \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

2. Jede Menge, die sich in der Form $(*)$ darstellen läßt, ist ein konvexes Polyeder.

Bew.:

1. o.B.d.A.: $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\} \neq \{0\}$. Es gilt

$$x \in M \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \tilde{M} := \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \begin{pmatrix} A & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \leq 0,\ \xi \geq 0 \right\}$$

$\tilde{M}$ ist ein polyedrischer Pegel. Nach S. 2.3 läßt sich jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \tilde{M}$ als nichtnegative Linearkomb. von endl. vielen Vektoren $\tilde{a}^i \in \mathbb{R}^{n+1}, i \in I$ mit $\tilde{a}^i = \begin{pmatrix} a^i \\ \tilde{a}^i_{n+1} \end{pmatrix}$ darstellen.
Wir betrachten $I_1 := \left\{ i \in I \,|\, \tilde{a}^i_{n+1} \neq 0 \right\}$, $I_2 := \left\{ i \in I \,|\, \tilde{a}^i_{n+1} = 0 \right\}$.
o.B.d.A. $\tilde{a}^i_{n+1} = 1$, falls $\tilde{a}^i_{n+1} \neq 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow x &\in M \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &\in \tilde{M} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &= \sum_{i \in I_1} \alpha_i \begin{pmatrix} a^i \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j \in I_2} \beta_j \begin{pmatrix} a^j \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_i, \beta_j \geq 0 \\ \leftrightarrow x &= \sum_{i \in I_1} \alpha_i a^i + \sum_{j \in I_2} \beta_j a^j,\ \sum_{i \in I_1} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0, i \in I_1,\ \beta_j \geq 0, j \in I_2. \end{aligned}$$

2. analog

2.3 Charakterisierung der Optimalpunkte eines LO-Problems

$(P)\ \max \left\{ c^T x \,\middle|\, x \in M \right\},\ M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b,\ x \geq 0\}$

Satz 2.6: Wenn $\dim M \geq 1$, so hat M mind. eine Ecke.

Bew.: Ann.: M hat keine Ecke $\overset{\text{Cor. 2.1}}{\rightarrow}$ M enthält eine Gerade als Seite.
Sei $g := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = x^1 + \lambda \left(x^2 - x^1\right),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\},\ x^1 \neq x^2$.
$g \subseteq M \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq 0\}$, d.h. $x^1_\alpha + \lambda \left(x^2_\alpha - x^1_\alpha\right) \geq 0,\ \alpha = 1, \ldots, n \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $\exists \alpha^*$ mit $x^2_{\alpha^*} - x^1_{\alpha^*} > 0 \Rightarrow \forall \lambda$ gilt: $\lambda \geq -\frac{x^1_{\alpha^*}}{x^2_{\alpha^*} - x^1_{\alpha^*}}$ Wid. zu g Gerade.
2. Fall: $\exists \alpha^*$ mit $x^2_{\alpha^*} - x^1_{\alpha^*} < 0 \Rightarrow \forall \lambda$ gilt: $\lambda < -\frac{x^1_{\alpha^*}}{x^2_{\alpha^*} - x^1_{\alpha^*}}$ Wid. zu g Gerade.

Satz 2.7: Das Problem

$$(P') \max \left\{ c^T \left(x^+ - x^-\right) \middle| A\left(x^+ - x^-\right) + u = b, \tilde{A}\left(x^+ - x^-\right) = \tilde{b},\, x^+, x^-, u \geq 0 \right\}$$

ist äquivalent zu

$$(P'') \max \left\{ c^T x \middle| Ax \leq b, \tilde{A}x = \tilde{b} \right\}$$

im folgenden Sinne:

1. Wenn $\left(\hat{x}^{+^T}, \hat{x}^{-^T}, \hat{u}^T\right)^T$ ein Optimalpunkt von (P'), so ist $\hat{x} = \hat{x}^+ - \hat{x}^-$ eine Lösung von (P'').
2. Wenn $\hat{x}$ eine Lsg. von (P'') ist, ex. $\hat{x}^+, \hat{x}^-, \hat{u}$ derart, daß
   (a) $\left(\hat{x}^{+^T}, \hat{x}^{-^T}, \hat{u}^T\right)^T$ Lsg. von (P')
   (b) $\hat{x} = \hat{x}^+ - \hat{x}^-$.

Def. 2.9: $u_r, r = 1, \ldots, m$ heißen Schlupfvariablen.

Satz 2.8(Existenzsatz): Wenn $\sup_{x \in M} c^T x < \infty$, so wird das Supremum angenommen.

Bew.: Genügt für den Fall, daß M mindestens eine Ecke hat (S.2.6). Darstellungssatz $\Rightarrow$

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j y^j,\, \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0 \right\}.$$

Sei $x \in M$,

$$c^T x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^T x^i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \underbrace{c^T y^j}_{\leq 0,\text{ da } \sup_{x\in M} c^T x < \infty} \quad \forall \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1.$$

Sei $c^T x^{i^*} = \max\left\{c^T x^1, \ldots, c^T x^k\right\}$ (x^{i^*} nicht notwendig eindeutig).

$$\Rightarrow c^T x \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}_{1} c^T x^{i^*}\, \forall x \in M.$$

Korollar 2.2.: Wenn $\sup_{x \in M} c^T x < \infty$ und M eine Ecke hat, wird das Maximum in einer Ecke angenommen.

Satz 2.9: Jeder lokale Max.pkt. (Min.pkt.) von $(\text{LOP})_{\max(\min)}$ ist globaler Max.pkt. (Min.pkt.).

Bew.: Sei $\bar{x}$ lokaler Min.pkt. Ann.: $\bar{x}$ ist kein globaler Min.pkt. $\Rightarrow \exists y \in M : c^T y < c^T \bar{x}$.
Da M konvex, gilt

$$\lambda y + (1-\lambda)\bar{x} \in M\, \forall \lambda \in [0,1].$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\lambda \in (0,1)$ mit

$$x(\lambda) := \lambda y + (1-\lambda)\bar{x} \in M \cap U_\varepsilon(\bar{x}).$$

Zielfkt.

$$c^T x(\lambda) = c^T(\lambda y + (1-\lambda)\bar{x}) = \lambda c^T y + (1-\lambda) c^T \bar{x} < \lambda c^T \bar{x} + (1-\lambda) c^T \bar{x} = c^T \bar{x}.$$

Wid. zu $\bar{x}$ lok. Min.pkt.

Satz 2.10: Es sei $M_{opt} \neq \emptyset$. Dann gilt:

1. M_{opt} ist eine abg. Seite von M oder M selbst.
2. Es ex. eine Indexmenge $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$ derart, daß $M_{opt} = \{x \in M | \sum_\alpha a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\, r \in I\}$.

Bew.: Es sei $\bar{x} \in M_{opt}$. Wir wissen aus der geom. Interpretation $M \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T x \leq c^T \bar{x}\}$ und $\bar{x} \in M$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b, \tilde{A}x = \tilde{b}, c^T x \leq c^T \bar{x} \right\} \\ M_{opt} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b, \tilde{A}x = \tilde{b}, c^T x = c^T \bar{x} \right\} \end{aligned}$$

3 Die Simplexmethode

3.1 Theoretische Grundlagen der Simplexmethode

(P) $\max\left\{ c^T x \middle| x \in M \right\}$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$, $A = \left(a^1, \ldots, a^n\right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Voraussetzungen:

(V1) $m < n$

(V2) $\mathrm{rang} A = m$

(V3) $b \geq 0$

(V4) $\dim M \geq 1$

Def. 3.1: $x^0 \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässiger Basispunkt von M, wenn gilt:

1. $x^0 \in M$
2. $a^j, j \in I^0$ mit $I^0 = \left\{ \alpha \in 1, \ldots, m | x^0_\alpha > 0 \right\}$ linear unabhängig.
   (a) $0 \leq \left|I^0\right| \leq m$
   (b) Wenn $\left|I^0\right| < m$, so ex. wegen (V2) eine Indexmenge $I \supset I_0$ mit $|I| = m$ und $a^j, j \in I$ lin. unabh., d.h. Basis im $\mathbb{R}^m$.

Satz 3.1: x^0 ist Ecke von $M \leftrightarrow x^0$ zulässiger Basispunkt von M.

Bew.idee: x^0 ist Durchschnitt von mind. n Hyperebenen, das zugehörige Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

Def. 3.2: Sei x^0 eine Ecke von M. Dann heißt x^0 nichtentartet, wenn $\left|I^0\right| = m$, andernfalls entartet.

Bem. 3.3: Für eine entartete Ecke ist die zugehörige Basis im $\mathbb{R}^m$ nicht eindeutig.

Def. 3.3: $x_j, j \in I$ heißen Basisvariablen (BV), $x_j, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ heißen Nichtbasisvariablen (NBV)

$$x_B := \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \qquad I = \{j_1, \dots, j_m\} \qquad =: J_B(x)$$

$$x_N := \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \qquad \{1, \dots, n\} \setminus I = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \qquad =: J_N(x)$$

$A_B := \begin{pmatrix} a^{j_1} & \cdots & a^{j_m} \end{pmatrix}$, $A_N := \begin{pmatrix} a^{j_{m+1}} & \cdots & a^{j_n} \end{pmatrix}$

Satz 3.2: Wenn $c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T \geq 0 \ (\leq 0)$, so ist x^0 optimal für $\max(\min) \left\{ c^T x \middle| A^T x = b, x \geq 0 \right\}$

Bew.: $\forall x \in M$:

1. $b = A^T x = A_B^T x_B + A_N^T x_N \ \leftrightarrow \ x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$
   $x \geq 0 \ \leftrightarrow \ x_B \geq 0, x_N \geq 0$
2. $c^T x = c_B^T A_B^{-1} b - \left(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T\right) x_N$
3. $c^T x^0 = c_B^T \left(x_B^0\right)^T$

$\rightarrow \ c^T x = c^T x_0 - \underbrace{\left(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T\right)}_{\geq 0} x_N \ \rightarrow \ c^T x \leq c^T x^0 \ \forall x \in M$

Satz 3.3: Wenn ein Index $i_0 \in J_N\left(x^0\right)$ mit $\left(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T\right)_{i_0} < 0 \ (> 0)$ und $\left(A_B^{-1} A_N\right)_{i_0} \leq 0$ ex., so ist $c^T x$ auf M nach oben (unten) unbeschränkt.

Bew.: Idee: Konstruieren einer von x^0 ausgehenden Halbgeraden h, die ganz in M liegt und auf der $c^T x$ nach oben unbeschränkt ist. Sei

$$h \ := \ \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_B = x_B^0 - t \cdot A_B^{-1} A_N e_{i_0}, \, x_N = t \cdot e_{i_0}, t \geq 0 \right\}$$

Beh. 1: $h \subseteq M = \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0 \}$.

$$x_B = x_B^0 - t \cdot A_B^{-1} A_N e_{i_0} \ \Rightarrow \ h \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b \},$$

d.h. geom. die Halbgerade liegt in dem aff. UR $\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b \}$.

$$x_B = x_B^0 - t \cdot \underbrace{A_B^{-1} A_N e_{i_0}}_{\leq 0} \geq 0 \ \forall t \geq 0 \ \Rightarrow \ h \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq 0 \}$$

Beh. 2: $c^T x$ auf h nach oben unbeschränkt.

$$c^T x = c_B^T A_B^{-1} b - \left(c_B^T A_B^{-1} A_N^T - c_N^T\right) x_N \ \forall x \in M \,\text{insb.}\, \forall x \in h$$

$$x \in h \ \Rightarrow \ c^T x = c_B^T A_B^{-1} b - \underbrace{\left(c_B^T A_B^{-1} A_N^T - c_N^T\right) \cdot t \cdot e_{i_0}}_{\leq 0} \overset{t \to \infty}{\rightarrow} +\infty$$

Def. 3.4: Zwei Ecken eines konvexen Polyeders M heißen benachbart, wenn sie verschiedene Randpunkte einer Kante von M sind.

Satz 3.4: Es sei x^0 eine nichtentartete Ecke von M mit $x_B^0 > 0, x_N = 0$. Wenn $i_0 \in J_N\left(x^0\right)$ mit

$$\begin{aligned} \left(c_N - A_B^{-1} A_N^T c_B\right)_{i_0} \quad &< \quad 0 \ (> 0) \\ I_{i_0} \quad &:= \quad \left\{ j \middle| \left(A_B^{-1} A_N\right)_{i_0, j} \geq 0 \right\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

ex., so gibt es eine Ecke x^1 von M mit $c^T x^1 > c^T x^0$.

Bew.: Idee: Wir betrachten eine Halbgerade h wie beim Bew. von S. 3.3 und bestimmen x^1 als $h \cap M$ und erhalten die Kante $\left[x^0, x^1\right]$, die das Verlangte leistet. Es sei

$$h := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_B = x_B^0 - A_B^{-1} A_N^T e_{i_0} \cdot t,\, x_N = t \cdot e_{i_0}, t \geq 0 \right\}.$$

Wir wissen $h \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b \}$.

Frage: Für welche $x \in h$ gilt $x \geq 0$? D.h. für welche t gilt $x_B^0 - A_B^{-1} A_N^T e_{i_0} \cdot t \geq 0$?

1. $\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_{i_0} \rightarrow \left(A_B^{-1} A_N\right)_{i_0, \alpha} \leq 0 \rightarrow x_\alpha = x_\alpha^0 - \left(A_B^{-1} A_N^T e^{i_0}\right)_\alpha \cdot t > 0 \, \forall t \geq 0$
2. $\alpha \in I_{i_0}$:

$$\begin{aligned} x_\alpha = x_\alpha^0 - \left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_\alpha \cdot t &\geq 0 \\ \leftrightarrow 0 \leq t &\leq \frac{x_\alpha^0}{\left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_\alpha} \forall \alpha \in I_{i_0} \\ \leftrightarrow 0 \leq t &\leq \min_{\alpha \in I_{i_0}} \frac{x_\alpha^0}{\left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_\alpha} =: t_1 \end{aligned}$$

Es gilt $t_1 > 0$, da $x_\alpha^0, \left(A_B^{-1} A_N e_{i_0}\right)_\alpha > 0 \, \forall \alpha \in I_{i_0}$.

Sei $x^1 = x\left(t_1\right)$. Dann gilt

$$[x_0, x_1] \in \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_B = x_B^0 - A_B^{-1} A_N^T e_{i_0} \cdot t, x_N = t \cdot e_{i_0}, t \in [0, t_1] \right\},$$

d.h. x^0 und x^1 sind benachbart.

$\forall x \in M$ gilt: $c^T x = c^T x^0 - A_B^{-1} A_N^T x_N$

$\forall x \in h$ gilt: $c^T x = c^T x^0 - A_B^{-1} A_N^T e_{i_0} \cdot t, t \geq 0$

$$c^T x^1 = c^T x^0 - \underbrace{A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}}_{<0} \cdot \underbrace{t_1}_{>0} \rightarrow c^T x^1 > c^T x^0.$$

Austauschschritt (Simplexschritt, Pivotschritt):

1. Fall: $c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B \geq 0 \Rightarrow x^0$ optimale Ecke
2. Fall: $\exists i_o \in J_N(\bar{x}),\, \left(c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B\right)_{i_0} < 0,\, A_B^{-1} A_N e_{i_0} \leq 0 \Rightarrow c^T x$ auf M nach oben unbeschränkt.
3. Fall: $\exists i_0 \in J_N(\bar{x}),\, \left(c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B\right)_{i_0} < 0,\, I_{i_0} \neq 0$

   Vor.: x^0 ist nicht entartet. Dann können wir Satz 3.4 anwenden:

$$t_1 = \min_{\alpha \in I_0} \frac{x_\alpha}{\left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_\alpha} = \frac{x_{\alpha_0}}{\left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_{\alpha_0}}$$

   Bez.: i_0-Spalte: Pivotspalte
   α_0-Zeile: Pivotzeile
   $\left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_{\alpha_0}$: Pivotelement
   Pivotschritt: Austausch der i_0-ten NBV gegen die α_0-te BV, und wir eine benachbarte Ecke x^1 mit größerem Zielfunktionswert.

			c_N
			NBV
c_B	BV	$\left(A_B^{-1} b\right)_{\alpha_0}$	$\begin{matrix} \ddots & \vdots & \cdot \\ \cdots & \left(A_B^{-1} A_N^T e_{i_0}\right)_{\alpha_0} & \cdots \\ \cdot & \vdots & \ddots \end{matrix}$
		$c_B A_B^{-1} b$	$c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B$

Regel I: Das Pivotelement wird durch sein Reziprokes ersetzt, d.h.

$$\left[A_{B'}^{-1}A_{N'}^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}=\frac{1}{\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}}.$$

Die anderen Elemente der Zeile werden durch $\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}$ dividiert.

Regel II: Die Elemente der Pivotspalte werden bis auf das Pivotelement durch $-\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}$ dividiert.

Regel III: Alle anderen Elemente werden durch die Kreuzregel berechnet:

$$\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_i\right]_{\alpha_0}=\frac{\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_i\right]_{\alpha}\cdot\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}-\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_i\right]_{\alpha_0}\cdot\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha}}{\left[A_B^{-1}A_N^{T}e_{i_0}\right]_{\alpha_0}}$$

Satz 3.5: Sei (P') $\min\left\{\sum_{r=1}^{m}u_r \,\middle|\, Ax+u=b, x\geq 0, u\geq 0\right\}$. Das Problem (P') hat eine Lösung $(\hat{x},\hat{u})$ und wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Wenn $\sum_{r=1}^{m}u_r=0$, so ist $M\neq\emptyset$.
2. Wenn $\sum_{r=1}^{m}u_r>0$, so ist $M=\emptyset$.

3.2 Der Fall der Entartung (ausführlich siehe [1])

Sei x^0 bel. zulässiger Basispunkt. Dann gilt $x_B^0\geq 0, x_N^0=0, A_B$ regulär. $\Rightarrow$ Basisdarstellung: $x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N$.

$\exists i_0\in J_N\left(x^0\right): x_{i_0}=\left[A_B^{-1}b\right]_{i_0}<0, I_{i_0}\neq 0$

Für die Pivotspalte bilden wir $t_1:=\min_{\alpha\in I_{i_0}}\frac{\left[A_B^{-1}b\right]}{\left[A_B^{-1}A_Ne_{i_0}\right]_{\alpha}}$.

1. $t_1>0$. (Auch wenn x^0 entartet ist, kann dies eintreten.) Dann gilt $c^Tx^1>c^Tx^0$, $x^1:=x\left(t_1\right)$.
2. $t_1=0$. Wir definieren h wie üblich:

$$h=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Ne_{i_0}\cdot t,\ x_N=t\cdot e_{i_0},\ t\in[0,t_1]\right\}.$$

$\rightarrow x^0=x^1=x\left(t_1\right), h=\left\{x^0\right\}$ und $c^Tx^1=c^Tx^0$.

Bem. 3.11: Wir führen eine "leere" Simplextransformation durch. Der gleichen Ecke sind zwei verschiedene Basen im $\mathbb{R}^m$ und damit auch zwei verschiedene BV-Systeme mit den entsprechenden Basisdarstellungen und Simplextableaus zugeordnet.

Eine Möglichkeit: ε-Methode: $P\left(\varepsilon\right):\max\left\{c^Tx\,\middle|\,\underbrace{Ax=b\left(\varepsilon\right),x\geq 0}_{M(\varepsilon)}\right\}$

Ziel: Es gibt ein $\tilde{\varepsilon}>0$ derart, daß gilt:

1. $M\left(\varepsilon\right)$ hat nur nichtentartete Ecken $\forall\varepsilon\in\left(0,\tilde{\varepsilon}\right)$
2. (P) ist lösbar gdw. $P\left(\varepsilon\right)$ lösbar ist
3. Wenn $x^0\left(\varepsilon\right)$ eine opt. Ecke von $P\left(\varepsilon\right)$ ist, so ist $x^0=\lim_{\varepsilon\to 0}x^0\left(\varepsilon\right)$ eine optimale Ecke von (P).

Wir müssen $b(\varepsilon)$ speziell wählen, um diese Bedingung zu erfüllen. $b_r(\varepsilon) := b_r + \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\varepsilon^{\alpha}, r = 1,\ldots,m$

Lemma 3.1: Wenn das Problem (P) die Voraussetzungen $(V1), (V2), (V3)$ erfüllt und x^0 ein zulässiger Basispunkt ist, dann ex. eine $\varepsilon > 0$, so daß $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\, P(\varepsilon)$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. Das Gleichungssystem in $P(\varepsilon)$ läßt sich eindeutig nach x_B auflösen und es gilt:

$$x_B = A_B^{-1}b + \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix}_B + \sum_{i \in J_N(x^0)} \left(A_B^{-1}A_N e_i\right) \cdot \varepsilon^i - A_B^{-1}A_N x_N$$

2. $x^0(\varepsilon)$ mit $x_B^0(\varepsilon) = A_B^{-1}b + \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix}_B + \sum_{i \in J_N(x^0)} \left(A_B^{-1}A_N e_i\right) \cdot \varepsilon^i$, $x_N^0(\varepsilon) = 0$ ist ein zulässiger Basispunkt.

4 Dualitätstheorie der Linearen Optimierung (LO) und Anwendungen

4.1 Dualitätstheorie der LO (siehe auch [1])

(P) $\max\left\{ c^T x \middle| Ax \le b, x \ge 0\right\}$ Primalproblem

(D) $\min\left\{ b^T u \middle| A^T u \ge c, u \ge 0\right\}$ Dualproblem

Lemma 4.1: Wenn $M_P \neq \emptyset$ und $M_D \neq \emptyset$, dann gilt $c^T x \le u^T A x \le b^T u \,\forall x \in M_P, u \in M_D$.

Bew.: Sei $x \in M_P$ bel. Dann gilt wegen $u \ge 0 \,\forall u \in M_D : u^T A x \le b^T u$.
Analog gilt für jedes $u \in M_D$ wegen $x \ge 0 \,\forall x \in M_P : c^T x \le x^T A^T u$.

$$\Rightarrow \sup_{x \in M_P} c^T x \le \inf_{u \in M_D} b^T u$$

Lemma 4.2(Farkas): Sei $A = \left(a^1, \ldots, a^m\right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gilt

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \le 0\right\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, c^T x \le 0\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in \mathbb{R}^n, u \ge 0 : c = A^T u$$

Bew.: [1] bzw. VL Grundlagen der mathematischen Optimierung

Satz 4.1(Dualitätssatz): Wenn $M_P \neq 0$ und $M_D \neq 0$, so sind (P) und (D) lösbar, und es gilt:

$$c^T x^0 = \max_{x \in M_P} c^T x = \min_{u \in M_D} b^T u = b^T u^0,$$

wobei x^0 Lösung von (P) und u^0 Lösung von (D) sind.

Bew.: Die Lösbarkeit von (P) und (D) folgt sofort aus dem Ex.satz der Lin. Optimierung.
z.z.: $c^T x^0 = b^T u^0$.
Nach Lemma 4.1 gilt

$$c^T x \le c^T x^0 \le b^T u^0 \le b^T u \,\forall x \in M_P, u \in M_D.$$

Wir zeigen: $\exists \hat{x} \in M_P$ und $\hat{u} \in M_D$ mit

$$\begin{aligned} c^T x &\geq \min_{u \in M_D} b^T u =: \nu \\ b^T u &\leq \max_{x \in M_P} c^T x =: \mu \end{aligned}$$

Es gilt $c^T x \leq \mu \, \forall x \in M_P$. Wir wollen den Satz von Farkas anwenden, deshalb $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} t \cdot c^T x - \mu \cdot t &\leq 0 \, \forall \left(x^T, t\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \text{mit } \left(x^T, t\right) &\in M_t := \left\{ \left(x^T, t\right) \middle| \, t \cdot Ax - t \cdot b \leq 0, -tx \leq 0, -t \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

Es seien ${c^*}^T = \left(c^T, -\mu\right), {x^*}^T = \left(tx^T, t\right), A^* = \left(a^*_{i,j}\right)_{m+n+1, n+1} = \begin{pmatrix} A & -b \\ -E & 0 \\ 0^T & -1 \end{pmatrix}$.

$$\rightarrow M_t = \left\{ x^* \middle| \, A^* x^* \leq 0 \right\}, {c^*}^T x^* \leq 0 \, \forall x^* \in M_t$$

$\Rightarrow$ Satz von Farkas ${A^*}^T u^* = c^*, u^* > 0$ hat eine Lsg. $\hat{u}^*$, wobei $\hat{u}^*$ ein $(m+n+1)$-dim. Vektor ist: ${u^*}^T = \left(u^T, y^T, \alpha\right)$.

$$\begin{pmatrix} A^T & -E & 0 \\ -b & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -\mu \end{pmatrix}$$

d.h. das System $A^T u - y = c$, $b^T u + \alpha = \mu$, $u \geq 0, y \geq 0, \mu \geq 0$ hat eine Lsg. $(\hat{u}, \hat{y}, \hat{\alpha})$. Wegen $\hat{\mu} \geq 0, \alpha \geq 0$ folgt $A^T \hat{u} \geq c$ und $b^T \hat{u} \leq \mu$.

Satz 4.2: (P) ist lösbar $\Leftrightarrow$ (D) ist lösbar, und es gilt $\max_{x \in M_P} c^T x = \min_{u \in M_D} b^T u$.

Bew.: Analog zum Bew. von S. 4.1 gibt es ein $\hat{u} \in M_D \neq \emptyset$ mit $A^T \hat{u} \geq c$. Nach S. 4.1 ist (D) lösbar und die opt. Zielfunktionswerte gleich.

Corollar 4.1: $x^0 \in M_P, u^0 \in M_D$ sind Lsg. von $(P), (D)$ $\Leftrightarrow$ $\left(u^0\right)^T \left(Ax^0 - b\right) = \left(\left(u^0\right)^T A - c\right)^T x^0 = 0$

4.2 Einige Anwendungen der Dualitätstheorie

1. Einschließungssatz: Bem. 4.1
2. Manchmal ist das Dualproblem leichter lösbar.
3. Duale Simplexmethode: Lsg. des Dualproblems in der Schreibweise des Primalproblems. Übergang von einem Basispunkt, der das Optimalitätskriterium erfüllt, zu einem anderen Basispunkt mit kleinerem Zielfunktionswert (bei Max.prob., Details in [1]).
4. Anwendungen in der lin. parametrischen Optimierung

   $P_1(t): \max \left\{ (c + t \cdot c^*)^T x \middle| \, Ax = b, x \geq 0 \right\}, t \in [t_0, t_1]$ mit Simplexmethode

   $P_2(t): \max \left\{ c^T x \middle| \, Ax = b + tb^*, x \geq 0 \right\}, t \in [0, 1]$ mit dualer Simplexmethode

   x^0 sei zulässiger Basispunkt für $P_1(0)$, $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ in $c^T x$ subst., hängt von t ab:

$$(c + t \cdot c^*)^T x = c_B^T x_B - \left(\left(c_B + t \cdot c_B^*\right) A_B^{-1} A_N - \left(c_N + t \cdot c_N^*\right)\right) x_N$$

$\Rightarrow$ x^0 ist optimal $\forall t$ mit

$$\left(c_B + tc_B^*\right) A_B^{-1} A_N - \left(c_N + tc_N^*\right) \geq 0.$$

Dann berechnet sich t_1 und es ex. ein i_0 mit

$$\left(\left(c_B + tc_B^*\right) A_B^{-1} A_N - \left(c_N + tc_N^*\right)\right)_{i_0} = 0.$$

$\Rightarrow$ i_0 -Spalte ist Pivotspalte, Pivotzeile und -element wie üblich.

Simplextransformation und Berechnung einer benachbarten Ecke. In jedem Schritt erhalten wir ein Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ und eine zugehörige Ecke x^i die $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ optimal ist.

Bem. 4.3: Das reicht im Falle nichtentarteter Ecken. Im Falle von Entartungen ist die berechnete Einteilung nicht eindeutig.

5. Vektoroptimierung (Optimierungsprobleme mit mehreren Zielfunktionen, siehe [3])

$$\min\left\{\left(f_1(x), \ldots, f_L(x)\right) \mid x \in M\right\}, M \subseteq \mathbb{R}^n, f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, L.$$

Def. 4.4: $\hat{x}$ heißt Pareto-optimal oder effizient, wenn es kein $x \in M$ gibt, so daß $f_j(x) \leq f_j(\hat{x}), j = 1, \ldots, L, \exists j^* \in \{1, \ldots, L\} : f_{j^*}(x) < f_{j^*}(\hat{x})$.

$$P(\mu) : \min\left\{\sum_{j=1}^{L} \lambda_j^0 f_j(x) \,\middle|\, x \in M, f_j(x) \leq \mu_j, j = 1, \ldots, L\right\}, \lambda^0 \in \Lambda^0 := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^L \,\middle|\, \lambda > 0\right\} \text{ bel.}$$

$M_{eff} = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}^L} M_{opt}(\mu)$

Dialogverfahren: $K \subseteq \{1, \ldots, L\}$ zu verbessernde Restriktionen; $a_j, j \in K$ Ziele; $a_i, i \notin K$ obere Schranken

$\mu_j^1 = a_j$ Wunsch; $x^k \in M$ sei bekannt und es sei $f_j\left(x^k\right) \leq \mu_j^0, j = 1, \ldots, L$

$$P\left(\mu^1, \mu^0, t\right) : \min\left\{\sum_{j=1}^{L} \lambda_j^0 f_j(x) \,\middle|\, x \in M, f_j(x) \leq \mu_j^0 + t\left(\mu_j^1 - \mu_j^0\right), j = 1, \ldots, L, t \in [0,1]\right\}$$

5 Parametrische Optimierung: Singularitäten ([4, 5])

5.1 Einführung und einige Anwendungen der parametrischen Optimierung

$P(t) : \min\left\{f(x,t) \mid x \in M(t)\right\}, t \in \mathbb{R}\ (t \in [0,1])$

$M(t) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x,t) = 0, i \in I; g_j(x,t) \geq 0, j \in J\right\}, f, g_i, h_j \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$

(x,t) lok. Minpkt. $\Leftrightarrow$ x lok. Minpkt. für $P(t)$

$\Sigma_{loc} := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist lokaler Minpunkt für } P(t)\right\}$, $\Sigma_{stat}, \Sigma_{crit}, \Sigma_{gc}$: stat., krit, verallg. krit. Punkte

$\Sigma_{loc} \subseteq \Sigma_{stat} \subseteq \Sigma_{crit} \subseteq \Sigma_{gc}$

$(P) : \min\left\{f(x,t) \mid h_i(x) = 0, i \in I; g_j(x) \leq 0, j \in J\right\}$

Einbettungsprinzip:

$(A1)$ x^0 ist krit.(stat.) Pkt. für $P(0)$

$(A2)$ $\psi_{glob}(t) \neq 0\, \forall t \in [0,1]$

$(A3)$ $P(1) \cong (P)$

Standardeinbettung:

$$P(t): \min \left\{ t \cdot f(x) + (1-t) \cdot \left\| x - x^0 \right\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcll} h_i(x) + (t-1)\, h_i\left(x^0\right) & = & 0 & i \in I \\ g_j(x) + (t-1)\, g_j\left(x^0\right) & \leq & 0 & j \in J \end{array} \right\}$$

(A1) x^0 ist glob. Minpkt. für $P(0)$

(A2) $M(t) \neq \emptyset \forall t \in [0,1], I = \emptyset$

(A3) $P(1) \equiv (P)$

5.2 Generische Singularitäten - die Klasse von Jougen-Jonker-Twilt ([4, 5, 6, 7])

Def. 5.1: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt verallg. krit. Pkt. für $P(\bar{t})$, wenn $\exists \lambda_i, i = 0, \ldots, m, \mu_j, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$ mit $\sum_{i=0}^m |\lambda_i| + \sum_{j \in J_0(\bar{x},\bar{t})} |\mu_j| > 0$ und

$$\begin{array}{rcl} \lambda_0 D_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x},\bar{t})} \mu_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) & = & 0 \\ h_i(\bar{x}, \bar{t}) & = & 0, i \in I \\ g_j(\bar{x}, \bar{t}) & \geq & 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t}) \end{array}$$

Wenn $\lambda_0 \neq 0$ (setzen $\lambda_0 = -1$), $\mu_j \geq 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$ stationäre Punkte. Wenn nur $\lambda_0 \neq 0$ kritische Punkte.

Wir betrachten 5 Typen: $\Sigma_{gc}^\nu, \nu = 1, \ldots, 5$, $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$

Def.: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^1$, wenn $\bar{x}$ ein nichtentarteter krit. Punkt von $P(\bar{t})$ ist, d.h.

(1a) LICQ ist in $\bar{x} \in M(\bar{t})$ erfüllt. $\rightarrow$ $\exists$ eind. best. Lagrangemultiplikatoren $\bar{\lambda} = \left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m\right), \bar{\mu}^{J_0} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_p)$, so daß $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}^{J_0}, \bar{t}\right)$ ist eine Lsg. von

$$H^p(x, \lambda, \mu, t) := \begin{bmatrix} D_x^T L^{J_0}\left(x, \lambda, \mu^{J_0}, t\right) \\ h_1(x,t) \\ \vdots \\ h_m(x,t) \\ g_1(x,t) \\ \vdots \\ g_p(x,t) \end{bmatrix} = 0$$

(1b) $\bar{\mu}_j \neq 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$

(1c) $D_x^2 L^{J_0}\left(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}^{J_0}, t\right)\big|_{T_{\bar{x}} M(t)}$ reg.,

$$T_{\bar{x}} M(t) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n \,|\, D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) \cdot \xi = 0, i \in I; D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) \cdot \xi = 0, j \in J_0 \}$$

Satz: Es existiert eine lokale Struktur in einer Umgebung $U(\bar{x}, \bar{t}) = U_1(\bar{x}) \times U_2(\bar{t})$.

Bew.: $H^p \in C^2(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ mit $q = m + p + n$, $H^p(\bar{w}, \bar{t}) = 0$.
Sei $w := \left(x, \lambda, \mu^{J_0}\right) \in \mathbb{R}^q$. Jacobi Matrix

$$\begin{array}{rcl} D_w H^p(\bar{w}, \bar{t}) & = & \begin{pmatrix} D_x^2 L^{J_0}(\bar{w}, \bar{t}) & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \\ B & = & \left(-D_x h_1(\bar{x}, \bar{t}), \ldots, -D_x^T h_m(\bar{x}, \bar{t}), -D_x^T g_1(\bar{x}, \bar{t}), \ldots, -D_x^T g_p(\bar{x}, \bar{t})\right) \end{array}$$

Satz: $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ reg. $\Leftrightarrow$ $A|_B$ reg. und B vollen Rang hat.

Der Satz über implizite Funktionen ist anwendbar: $\exists$ Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\bar{x}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\bar{\lambda}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\bar{\mu}^{J_0}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ von $\bar{t}$ sowie eindeutig bestimmte Funktionen $\left(C^1\right)$:

$$(x^p, \lambda^p, \mu^p) : t \to (x^p(t), \lambda^p(t), \mu^p(t)) \in U \times V \times W$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $H^p(x^p(t), \lambda^p(t), \mu^p(t)) = 0$
- $\Sigma_{gc} \cap U \times Z = \{(x^p(t), t) | \, t \in Z\}$
- $(x^p(t), t) \in \Sigma^1_{gc} \, \forall t \in Z$ (da gilt $g_j(x^p(t), t) > 0, j \in J \setminus J_0(\bar{x}, \bar{t})$)

Def. Starke (Whitney-)Topologie: $k \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \sum \alpha_i < k$. $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_m} x_m}$ α-te partielle Ableitung. Sei

$$C_+(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \, \phi(x) \text{ stetig, } \phi(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Wir definieren die C^k_s-Topologie, indem wir eine Basis in $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ angeben:

$$\begin{aligned} V^k_{\phi,f} &:= \left\{ g \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \middle| \, |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| < \phi \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha, |\alpha| < k \right\} \\ \text{wobei } (\phi, f) &\in C_+(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Die C^k_s-Topologie für ein endl. Produkt von Fkt. räumen ist def. als die Produkttopologie.

Def.: $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt nichtentartet, wenn alle krit. Punkte von f nichtentartet sind, d.h. $Df(x) = 0$, $D^2 f(x)$ reg.

Es gilt: Die Teilmengen J^* von $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, die aus allen nichtentarteten Fkt.en besteht, ist offen bzgl. C^k_s, aber nicht offen bzgl. C^k_w (schwach).

Satz 5.1: Es sei $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$. Dann ex. eine Umgebung $U(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ von $(\bar{x}, \bar{t})$ und eine C^3_s-Umg. ϑ von (f, H, G) im Fkt.raum $C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+p}$, so daß $\forall \left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right) \in \vartheta$ gilt:

$$\Sigma_{gc}\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) \quad \subseteq \quad \Sigma^1_{gc}\left(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}\right)$$

Def.: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^2_{gc}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(2a) $\bar{x}$ ist ein nichtentarteter krit. Pkt. von $P^p(t)$ mit $p \geq 1$

$$P^p(t) : \min\{f(x,t) | \, h_i(x,t) = 0, i \in I; g_j(x,t) = 0, j = 1, \ldots, p\},$$

$(J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}, J = \{1, \ldots, s\})$.

(2b) Für die eind. bestimmten Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n, \bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ gilt: genau ein $\bar{\mu}_j = 0$, o.B.d.A. $\bar{\mu}_p = 0$ (d.h. (1b) verletzt)

(2c) $\bar{x}$ ist nichtentarteter krit. Pkt. von $P^{p-1}(t)$

Wie im Falle $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^1_{gc}$ folgt aus (2a) und (2c) die Existenz von Umgebungen U, V, W von $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\right)$ und Z von $\bar{t}$ sowie für $l = p, p-1$ eind. bestimmte C^1-Fkt.en

$$x^l, \lambda^l, \mu^l : t \in Z \to \left(x^l(t), \lambda^l(t), \mu^l(t)\right) \in U \times V \times W,$$

so daß $\left(x^l(t), t\right)$ ist krit. Pkt. von $P^l(t)$.

(2d) $\quad D_t g_p\left(x^{p-1}(t), t\right)\big|_{t=\bar{t}} \neq 0$

Bem. 5.5: Aus (2d) folgt $D\mu_p(\bar{t}) \neq 0$

Bem. 5.6: Aus $D_t g_p\left(x^{p-1}(t), t\right) \neq 0$ und $D\mu_p(\bar{t}) \neq 0$ folgt: Beide Kurven schneiden sich transversal (die Tangentialvektoren sind lin. unabh.).

Bem. 5.7: Man kann einen Satz analog zum Satz 5.1. formulieren und beweisen: Ein Punkt vom Typ 2 ist gegenüber Störungen stabil, d.h. man kann durch Störungen die Singularitäten nicht beseitigen.

Def.: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^3$, wenn

(3a) $\quad$ Es gelten (1a) und (1b)

(3b) $\quad$ Genau ein Eigenwert von $D^2 L\big|_T$ ist 0.

Äquivalente Formulierung: Der Punkt $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}\right)$ ist ein nichtentarteter krit. Pkt. von

$$(\wp)\ \min\left\{F(x, \lambda, \mu, t) \mid H^p(x, \lambda, \mu, t) = 0\right\},$$

wobei $F(x, \lambda, \mu, t) := t$.

Bem. 5.8: $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}^{J_0}, \bar{t}\right)$ ist entweder ein lok. Min.pkt. oder lok. Max.pkt. von $(\wp)$.

Def.: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$, wenn

(4a) $\quad 1 \leq m + p \leq n$ $(I = \{1, \ldots, m\}, J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\})$. und es gelte

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) \\ D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix} = m + p - 1.$$

$\Rightarrow$ $\exists$ ein bis auf ein Vielfaches eind. best. Vektor $\bar{q} \in \mathbb{R}^{m+p}$ mit

$$\sum_{i \in I} \bar{q}_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0,\ \bar{q} \neq 0_{m+p}\ (*)$$

(4b) $\quad \bar{q}_{m+j} \neq 0,\ j = 1, \ldots, p$

(4c) $\quad$ Der Punkt $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0) \in \mathbb{R}^{n+m+p+1}$ ist ein nichtentarteter krit. Pkt. des Problems

$$\begin{aligned}
(\hat{\rho}) \quad &: \quad \min\left\{\hat{F}(x, q, t, q_0) \,\middle|\, H(x, q, t, q_0) = 0\right\} \\
\hat{F}(x, q, t, q_0) \quad &= \quad t \\
H(x, q, t, q_0) \quad &= \quad \begin{bmatrix} D_x L(x, q, t, q_0) \\ h_i(x, t) \\ g_j(x, t) \end{bmatrix} \\
L(x, q, t, q_0) \quad &:= \quad q_0 f(x, t) - \sum_{i \in I} q_i h_i(x, t) - \sum_{j=1}^{p-1} q_{m+j} g_j(x, t) - q_{m+p} g_p(x, t)
\end{aligned}$$

Bem. 5.9:

1. $(\bar{x}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$ ist entweder lok. Minpkt. oder lok. Maxpkt. von $(\hat{\rho})$
2. In $(\bar{x}, \bar{t}, 0)$ ist $q_0 = 0$ und beim Passieren von 0 wechselt das Vorzeichen von q_0.
3. Alle Lagrangemultiplikatoren μ_j wechseln das Vorzeichen.
4. Alle Eigenwerte wechseln das Vorzeichen.

5. Die Zielfunktion ist streng mon. fallend oder streng mon. steigend.
6. $\|LM\| \to +\infty$; Wir betrachten das KKT-System bzgl.

$$P^{J_0}(t) \ \min \{ f(x,t) | \, h_i = 0, g_j = 0, g \in J_0 \} :$$

$$\begin{aligned} D_x f(x,t) - \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(x,t) - \sum_{j \in J_0} \mu_j D_x g_j(x,t) &= 0 \\ h_i(x,t) = 0, i \in I; \, g_j(x,t) = 0, j \in J_0; \, t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] & \\ q_0 D_x f(x,t) - \sum_{i \in I} q_i D_x h_i(x,t) - \sum_{j=1}^{p-1} q_{m+j} D_x g_j(x,t) - \bar{q}_{m+p} D_x g_p(x,t) &= 0 \end{aligned}$$

$h_i = 0, g_j = 0 \Rightarrow \|\lambda(t), \mu(t)\| \overset{t \to \bar{t}}{\to} +\infty$

(a) Wir bemerken auf dem Rechner die Annäherung an einen Pkt. vom Typ 4
(b) $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}$ ist kein krit. Pkt.
(c)
(d) Wir können die Kurve in $\Sigma_{gc}|_{[\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta]}$ nicht verfolgen.
(e) $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{t}) \in c\ell\Sigma_{crit} \setminus \Sigma_{crit}$
(f) Es seien $(*)$ erfüllt. $p \geq 1$ und $\bar{q}_{m+j} \neq 0, j = 1, \ldots, p$. MFCQ nicht erfüllt $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sgn}\bar{q}_{m+j}$ konstant $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$
(g) Idee für Sprünge: Normalform $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^4_{gc}$ bzgl. $M(t)$, $J_0(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$:

$$M(t) \cap U(\bar{x}, \bar{t}) \overset{\psi}{\leftrightarrow} \delta v \geq - \sum_{i_1=1}^{k} y_{i_1}^2 + \sum_{i_2=k+1}^{c} y_{i_2}^2 - \sum_{i_3=c+1}^{c+d} y_{i_3} + \sum_{i_4=c+d+1}^{c+d+l} y_{i_4}, \, y_i \geq 0$$

1. Fall: $k = 1$, $\delta = +1$
2. Fall: $k = 0$, $\delta = -1$ ex. kein Sprung

Def.: $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma^5_{gc}$, wenn

(5a) $|I| + |J_0(\bar{x}, \bar{t})| = n + 1$, d.h. LICQ verletzt

(5b) $Dh_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, Dg_j(\bar{x}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$ lin. unabh. (beachte: Ableitungen bzgl. x und t)

Vor.: $m = |I| < n \to |J_0(\bar{x}, \bar{t})| \geq 2$ o.B.d.A $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \ldots, p\}$
Wegen (5a) und (5b) ex. $\bar{q}_j, j \in I, \bar{q}_{m+j}, j = 1, \ldots, p$ mit $\sum_{i \in I} |\bar{q}_i| + \sum_{j=1}^{p} |\bar{q}_{m+j}| > 0$ (eind. best. bis auf einen gem. Faktor) und

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{q}_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{q}_{m+j} D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \ (*)$$

(n Gl. mit $n + 1$ Var. (5a) und der Rang der Koeff.matrix ist n wegen (5b))

(5c) In $(*)$ gelte $\bar{q}_{m+j} \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$.
$M_q(t) := \{ x \in \mathbb{R}^n | \, h_i(x,t) = 0, i \in I; g_j(x,t) \geq 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus \{q\} \}, q \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$

Wegen (5a), (5b) und (5c) gilt

$$\forall q \in \{1, \ldots, p\} : \, D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus \{q\} \text{ lin. unabh.}$$

(Bew.: Ann. $D_x h_i, D_x g_j$ lin. abh. $\to \exists \bar{q}_i, \bar{q}_{m+j}$, $\sum |\bar{q}_i| + \sum |\bar{q}_{m+j}| > 0 : \sum_{i \in I} \bar{q}_i D_x h(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^{p-1} \bar{q}_{m+j} D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \bar{q}_{m+p} = 0$ Wid. zu (5c).)

(5d) $\quad (\bar{x},\bar{t})$ ist ein nicht-entarteter krit. Pkt. für

$$\begin{aligned} P^q(t) &: \min\{f(x,t)|\, x\in M_q(t)\}\ \forall q\in J_0(\bar{x},\bar{t}) \\ \tilde{P}^q(t) &: \min\left\{f(x,t)|\, x\in \tilde{M}_q(t)\right\}, \tilde{M}_q(t):=\{x\in M_q(t)|\, g_q(x,t)\geq 0\} \end{aligned}$$

Satz 5.4(Gauvin): Sei $\Lambda(x)$ die Menge der Lagrange-Multiplikatoren, die einem stat. Pkt. von (P) zugeordnet ist. Dann ist $\Lambda(x)$ nicht leer und ein kompaktes, konvexes Polyeder $\Leftrightarrow$ MFCQ in $\bar{x}$ erfüllt ist. $\Rightarrow$ lokale Struktur der Lagrange-Multiplikatoren

Def. 5.2: Klasse von Jongen-Jonker-Twilt:

$$F:=\left\{(f,H,G)\in C^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s)\middle|\,\Sigma_{gc}=\bigcup_{\nu=1}^{5}\Sigma_{gc}^{\nu}\right\}, H=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_s\end{pmatrix}$$

$P(t)$ JJT-regulär bzgl. $[0,1]$

Satz 5.5: $\Sigma_{gc}^{\nu}, \nu\in\{1,\dots,5\}$ ist eine diskrete Pkt.menge (folgt unmittelbar aus der lokalen Struktur)

Satz 5.6: Seien $P(t)$ JJT-regulär bzgl. $\mathbb{R}$ und $(\bar{x},\bar{t})\in c\ell\Sigma_{stat}$. Dann ist die MFCQ verletzt $\Leftrightarrow$ entweder $(\bar{x},\bar{t})\in\Sigma_{gc}^4$ oder $(\bar{x},\bar{t})\in\Sigma_{gc}^5$ und alle $\bar{q}_{m+j}$ haben das gleiche Vorzeichen:

$$\sum_{i\in I}\bar{q}_i D_x h_i(\bar{x},\bar{t})+\sum_{j=1}^{p}\bar{q}_j D_x g_j(\bar{x},\bar{t})=0.$$

Setzen $a^i:=-D_x g_i(\bar{x},\bar{t}), i=1,\dots,p;\ c^k:=D_x h_k(\bar{x},\bar{t}), k=1,\dots,m$

$$\overset{L.6.3.}{\Rightarrow}\ D_x g_i(\bar{x},\bar{t})\xi>0,\ D_x h_k(\bar{x},\bar{t})\xi=0$$

ist nicht lösbar.
$(\bar{x},\bar{t})\in\Sigma_{gc}^5 \Rightarrow J_0(\bar{x},\bar{t})\neq\emptyset\Rightarrow$ MF1($D_x h_i(\bar{x},\bar{t}), i\in I$, lin. unabh.) ist nicht erfüllt.
Es gilt: MF2 ist nicht erfüllt $\Leftrightarrow$ in $\sum_{i\in I}\bar{q}_i D_x h_i(\bar{x},\bar{t})+\sum_{j=1}^{p}\bar{q}_{m+j}D_x g_j(\bar{x},\bar{t})=0$ alle $\bar{q}_{m+j}, j=1,\dots,p$ das gleiche Vorzeichen haben. (Lemma 6.3)

5.3 Der Generizitätssatz und der Störungssatz (ohne Beweis)

Fragen:

1. Ist die Klasse F hinreichend groß? Antwort: F ist offen und dicht bzgl. C_s^3-Topologie (offen und dicht $\sim$ generisch)
2. Wie kommt man durch Störungen in die Klasse F ?

$$\begin{aligned} f(x,t,A,c) &:= f(x,t)+\frac{1}{2}x^TAx+c^Tx \\ h_i\left(x,t,b^i,d_i\right) &:= h_i(x,t)+b^{i^T}x+d_i,\ i\in I \\ g_j\left(x,t,b^{m+j},d_{m+j}\right) &:= g_j(x,t)+b^{m+j^T}x+d_{m+j},\ j\in J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{A}}(t) &: \min\left\{f(x,t,A,c)|\, h_i\left(x,t,b^i,d_i\right)=0, i\in I; g_j\left(x,t,b^{m+j},d_{m+j}\right)\geq 0, j\in J; t\in\mathbb{R}\right\} \\ \mathrm{A} &:= \left(A,c,b^i,d_i,i\in I,b^{m+j},d_{m+j},j\in J\right) \end{aligned}$$

"Für fast alle $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{\delta}$" gilt: $\left(f(x,t,A,c), h_i\left(x,t,b^i,d_i\right), g_j\left(x,t,b^{m+j},d_{m+j}\right)\right)\in F$, $\mathrm{A}\notin F$ hat das Lebesgue-Maß 0.

Def. 5.3: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hat das Lebesgue-Maß 0, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ex. mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(W_i) < \varepsilon$.

Bem.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge von L-Maß 0. Dann gilt $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist dicht, d.h. $c\ell\,(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n$.

Satz 5.7: Sei $(f, H, G) \in F$. Dann ist $\Sigma_{gc}^1\, C_s^3$-offen und C_s^3-dicht in Σ_{gc} und die Menge $\Sigma_{gc}^{\nu}, \nu \in \{2, \ldots, 5\}$, ist eine diskrete Punktmenge.

Satz 5.8(Störungssatz): Jede in

$$\left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\gamma} \,|\, f\,(x, t, A, c)\,, h_i\left(x, t, b^i, d^i\right), g_j\left(c, t, b^{m+j}, d_{m+j}\right) \notin F \right\}$$

enthaltene und bzgl. des γ-dim. L-Maßes meßbare Menge hat das L-Maß 0 (Wir sagen: Für fast alle $A \in \mathbb{R}^{\gamma}$ gilt: $(f,\ h_i, i \in I,\ g_j, j \in J) \in F$).

Satz 5.9(Generizitätssatz): Sei $(f, H, G) \in F$. Dann ist $F\ C_s^3$-offen und C_s^3-dicht in $C^3\,(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+s}$.

6 Kurvenverfolgung und Sprünge

PATH III / JUMP I: (V1) JJT-reg. bzgl. $[0,1]$

(V2) $\left(x^0, 0\right) \in \Sigma_{gc}^1 \cap \Sigma_{loc}$ bekannt

(V3) $M\,(t) \neq \emptyset\, \forall t \in [0,1]\,,\ M\,(t) \subseteq C,\ C$ kompakt

Satz 6.1: (V1) $M\,(t) \neq \emptyset$ und $M\,(t) \subseteq C,\ C$ kompakt $\forall t \in [0,1]$

(V2) $\left(x^0, t^0\right) \in \Sigma_{stat}^1$ bekannt und es ist der einzige stat. Pkt für $P\,(0)$

(V3) $P\,(t)$ ist JJT-regulär bzgl. $[0,1]$

(V4) MFCQ ist erfüllt $\forall x \in M\,(t)\,, t \in [0,1]$

Dann ex. ein stückweiser C^2-Weg in Σ_{stat}, der $\left(x^0, 0\right)$ mit $(x^*, 1)$ verbindet, und es treten nur Singulatitäten vom Typ 2 und 3 auf.

It.verfahren: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, s^k Richtungsvektor, $\alpha_k > 0$ Schrittlänge, $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right) \Rightarrow$ Abstiegsverfahren

Lemma 6.1: Es seien $f \in C^1\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\,, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \bar{x} + ts, t \geq 0\}$ mit $Df\,(\bar{x}) < 0$. Dann ex. ein $\bar{t} > 0$, so daß $f\,(\bar{x}) > f\,(\bar{x} + ts)\ \forall t \in (0, \bar{t}]$.

Bew.: $\phi\,(t) := f\,(\bar{x} + ts)\,, \phi'\,(0) = Df\,(\bar{x})\,s < 0$, Taylor: $\phi\,(t) = \phi\,(0) + t\,\underbrace{\phi'\,(0)}_{<0} + o\,(t)\,.$

Bem. 6.1: Die durch $Df\,(\bar{x}) \cdot s < 0$ bestimmte Abstiegsrichtung ergibt sich aus der Approx. von $\phi\,(t)$ mit Hilfe der Taylorentw. bis zur 1. Ableitung. Man nennt eine solche Abstiegsrichtung Abstieg von 1. Ordung.

Abstiegsrichtung 1. Ordnung mit Restriktionen: $Df\,(\bar{x})\,s < 0, Dg_j\,(\bar{x})\,s \geq 0, j \in J_0\,(\bar{x})\,.$

JUMP II*: Sei $[0,1] \subseteq [t_A, t_B]$ und $[t_A, t_B]$ ein hinreichend großes Intervall. (V1),(V2),(V3)

Diskretisieren $[t_A, t_B] : t_{-q_1} < \ldots < t_0 = 0 < \ldots < t_{r_1}$ und die zugeh. Menge $C|_{t=t_i}$ von gc-Punkten. $C|_{t=t_i}$ enthält endl. viele Punkte.

Für jedes t_i berechnen wir $\hat{x}\,(t_i)\,, \bar{x}\,(t_i)$ mit

$$\begin{aligned} f\,(\hat{x}\,(t_i)\,, t_i) &\leq f\,(x, t_i)\, \forall\, (x, t_i) \in C|_{t=t_i} \\ f\,(\bar{x}\,(t_i)\,, t_i) &\geq f\,(x, t_i)\, \forall\, (x, t_i) \in C|_{t=t_i} \end{aligned}$$

Wir haben folgende Sprungmöglichkeiten:

Situation 1: $\exists i_0 \in \{-q_1, \ldots, r_1\}$ mit $(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}) \in \Sigma^1_{gc} \setminus \Sigma_{stat}$. Wir können eine Abstiegsrichtung 1. Ordnung berechnen:

$$D_x f(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0})\xi < 0,\ D_x g_j(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0})\xi \geq 0, j \in J_0(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}).$$

(Für $(\bar{x}(t_{i_0}), t_{i_0})$ berechnen wir eine Abstiegsrichtung für $-f(x, t_{i_0})$.)

Situation 2: $\exists i_0 \in \{-q_1, \ldots, r_1\}$ mit $(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}) \in \Sigma^1_{stat} \setminus \Sigma_{loc}$. Wir berechnen dann eine Abstiegsordnung 2. Ordnung (quadr. Opt.prob.):

$$\min\left\{ \xi^T D^2_x L(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0})\xi \,\middle|\, \|\xi\|^2 = 1, D_x g_j(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0})\xi = 0, j \in J_0(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0})\right\}$$

Situation 3:

$$u := \lim_{t \to \bar{t}} \frac{x^0(t) - x^1(t)}{\|x^0(t) - x^1(t)\|}$$

ist eine Abstiegsrichtung 2. Ordnung

Situation 4: $(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}) \in \Sigma^3_{gc}$, u ist eine Abstiegsrichtung 3. Ordnung.

Situation 5: $(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}) \in \Sigma^4_{loc}$

Situation 6: $(\hat{x}(t_{i_0}), t_{i_0}) \in \Sigma^4_{gc} \setminus \mathrm{cl}\Sigma_{loc}$ Sprung.

7 Strafmethoden / Strafeinbettungen

Strafeinbettung:

$$P_1(t)\ \min\left\{ \underbrace{f(x) + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \left[\sum_i h_i^2(x) + \sum_j \max\{g_j, 0\}\right]^2}_{F(x,t)} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \right\}, t \in [0,1]$$

Nachteile:

1. $P_1(1)$ nicht def., d.h. nicht diskritisierbar
2. $F(x,t)$ nur 1 mal stetig diff.bar, d.h. Theorie und Lösungskonzepte nicht anwendbar
3. $(A1)$ nicht erfüllt

$$\tilde{P}_1(t) \quad \min\left\{ f(x) + \|v\|^2 + \|w\|^2 \,\middle|\, th_i(x) + (1-t)v_i = 0, i \in I; tg_j(x) + (1-t)w_j \leq 0, j \in J \right\} \quad t \in [0,1]$$

Satz 7.1: $P_1(t)$ und $\tilde{P}_1(t), t \in [0,1]$ sind äqu. im folgenden Sinne

1. Wenn x ein stat. Pkt. (glob., lok. Minpkt.) für $\tilde{P}_1(t)$, dann ist (x, v, w) ein stat. Pkt. (glob., lok. Minpkt.) für $\tilde{P}_1(t)$ mit

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{t}{1-t} h_i(x), i \in I \\ w_j &= \frac{t}{1-t} \max\{g_j(x), 0\}, j \in J \end{aligned}$$

2. Wenn (x, v, w) ein stat. Pkt. (...) für $\tilde{P}_1(t), t \in (0,1)$, so ist x ein stat. Pkt. für $P_1(t)$, und es gelten die Formeln aus 1.

Bew.: $I=\emptyset$. Betrachten $\tilde{P}_1(t), i\in I: th_i(x)+(1-t)v_i=0 \Rightarrow v_i=\frac{t}{1-t}h_i(x)$ (müssen in die Zielfkt. einsetzen)

$$\tilde{P}_2(t)\quad \min\left\{ tf(x)+(1-t)\left\|x-x^0\right\|^2+\left\|v-v^0\right\|^2+\left\|w-w^0\right\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} th_i(x)+(1-t)\left(v_i-v_i^0\right) & = & 0 \\ tg_j(x)+(1-t)\left(w_j-w_j^0\right) & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

Bem. 7.1:

1. Auch zu $\tilde{P}_2(t)$ gibt es ein äqu. Problem im $\mathbb{R}^n$.
2. $\left(x^0,v^0,w^0\right)$ ist glob. Opt.pkt. für $\tilde{P}_2(0)$.
3. $\tilde{P}_2(1)$ verbinden wir mit $\tilde{P}_2(0)$, konvexes Problem.
4. $\tilde{P}_2(1)\sim(P)$
5. $\left(x^0,v^0,w^0,0\right)\notin\bigcup_{\nu=1}^5\Sigma_{gc}^\nu$, denn $I_0\left(x^0,v^0,w^0,0\right)=\{1,\ldots,5\}$ und die zugehörigen LM sind alle gleich 0.

$$\tilde{P}_3(t)\quad \min\left\{ tf(x)+(1-t)\left\|x-x^0\right\|^2+\left\|v-v^0\right\|^2+\left\|w-w^0\right\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} th_i(x)+(1-t)\left(v_i-v_i^0\right) & = & 0 \\ tg_j(x)+(1\pm t)\left(w_j-w_j^1\right) & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

Bem. 7.2(Startsit.): Sei $w_j^0<w_j^1, j\in J$, gewählt, so ist $\left(x^0,v^0,w^0\right)$ glob. Min.pkt. für $\tilde{P}_3(0)$, einziger Startpkt. und nicht entartet (Typ 1). Diese Einbettung hat folgende Vorteile:

1. Wir starten mit $P^{J_0}(t):\min\{f(x,t)|\,h_i(x,t)=0, i\in I; g_j(x,t)=0, j\in J_0\}, J_0\neq\emptyset$.
2. Die Kurve kann nicht zu $\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}|\,t=0\}$ zurückkehren.

Satz 7.2: Seien $\tilde{P}_i(t), i\in\{1,2,3\}$, JJT-regulär bzgl. $(0,1)$. Dann ist $\Sigma_{gc}=\bigcup_{\nu=1}^3\Sigma_{gc}^\nu$.

Bew. für i=1: $J_0(x,t)=\{1,\ldots,p\}$.

$$D_{x,v,w}\left(th_i(x)+(1-t)v_i\right) = \begin{pmatrix} tDh_i(x) & 0 & \cdots & 0 & 1-t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LICQ erfüllt.

Satz 7.3(Rechtfertigungssatz): $\phi^{-1}\left(F|_{[0,1]}\right)$ ist C_s^3-offen und C_s^3-dicht in $C^3\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s\right)$.

Störungssatz: Für fast alle “inputs” $\mathrm{A}=\left(A,c,b^i,d_i,i\in I,b^{m+j},d_{m+j},j\in J\right)$ ist

$$P_{\mathrm{A}}(t)\quad\min\left\{ f(x,t)+x^TAx+c^Tx \;\middle|\; \begin{array}{lcl} h_i(x,t)+b^{j^T}x+d_i & = & 0 \\ g_j(x,t)+b^{j+m^T}x+d_{m+j} & \leq & 0 \end{array} \right\},\quad t\in[0,1]$$

JJT-regulär bzgl. $[0,1]$.

$$\tilde{P}_4(t)\quad\min\left\{ \begin{array}{c} tf(x)+(1-t)\left(x-x^0\right)^TA\left(x-x^0\right) \\ +\left(v-v^0\right)^TB\left(v-v^0\right)+\left(w-w^0\right)^TC\left(w-w^0\right) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{lll} th_i(x)+(1-t)\left(v_i-v_i^0\right) & =0 & i\in I \\ tg_j(x)+(1-t)\left(w_j-w_j^1\right) & \leq 0 & j\in J \end{array} \right\}$$

Satz 7.4: Sei $S\subseteq\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ die Menge aller reg. sym. $(n\times n)$ Matrizen.

1. Dann ist für fast alle

   $\left(A,B,C,x^0,v^0,w^0,w^1\right)\in S\times\mathbb{R}^{\frac{1}{2}m(m+1)}\times\mathbb{R}^{\frac{1}{2}s(s+1)}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\left\{\left(w^0,w^1\right)\in\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s\,\middle|\,w^1<w^0\right\}$

   $\tilde{P}_{4(A,B,C,x^0,v^0,w^0w^1)}(t)$ JJT-regulär bzgl. $[0,1]$.

2. Wenn A, B, C pos. def., so ist $\left(x^0, v^0, w^0\right)$ glob. Min.pkt., einziger stat. Pkt. und nicht entartet.

$$\tilde{P}_5(t) \quad \min\left\{ \begin{array}{c} tf(x) + (1-t)\left(x-x^0\right)^T A\left(x-x^0\right) \\ +\left(v-v^0\right)^T B\left(v-v^0\right) \\ +\left(w-w^0\right)^T C\left(w-w^0\right) \end{array} \left| \begin{array}{cl} th_i(x) + (1-t)\left(v_i - v_i^0\right) & = 0 \\ tg_j(x) + (1-t)\left(w_j - w_j^1\right) & \leq 0 \\ \left\|x-x^0\right\|^2 + \left\|v-v^0\right\|^2 + \left\|w-w^0\right\|^2 - p & \leq 0 \end{array} \right. \right\}$$

Bem. 7.6:

1. Es gelten sinngemäß die Aussagen von Satz 7.4.
2. Bei dieser Einbettung können zusätzliche Punkte vom Typ 4 auftreten.

Hinr. Bedingung an M : $M \neq \emptyset$ und $M \cap \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\|x-x^0\right\| \leq p\right\}}_{E(x^0,p)} \neq \emptyset$.

Def. 7.1: EnMFCQ ist erfüllt, wenn $\forall x \in E\left(x^0, p\right)$ gilt:

1. $D_x h_i(x), i \in I$ lin. unabh.
2. $\exists \xi \in \mathbb{R}^n$ mit
   (a) $h_i(x) + Dh_i(x)\xi = 0, i \in I$
   (b) $g_j(x) + Dg_j(x)\xi < 0, j \in \{j \in J \mid g_j \geq 0\}$
   (c) $2\left(x-x^0\right)^T \xi < 0$, falls $\left\|x-x^0\right\| = p$

Satz 7.5: $h_i, g_j \in C^1, M \neq \emptyset, E\left(x^0, p\right) \neq \emptyset$ und EnMFCQ seien erfüllt. Dann gilt

1. $\tilde{M}_5(t) \neq \emptyset \, \forall t \in [0,1], p$ hinreichend groß
2. MFCQ erfüllt $\forall (x, v, w) \in M_5(t), t \in [0,1]$

Satz 7.6: Vor.:

1. $M(t) \neq \emptyset, M(t) \subseteq C$ (kompakt) $\forall t \in [0,1]$
2. MFCQ ist erfüllt $\forall x \in M(t), t \in [0,1]$

Dann gilt $M(t_1)$ ist homeomorph (homomorph + stetig) zu $M(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in [0,1] \Rightarrow M_i(0) \sim M_i(1), i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Literatur

[1] Nožička, Guddat, Hollatz: Theorie der linearen Optimierung, Berlin 1972

[2] Stoer, Witzgall: Convexity and Optimization in Finite Dimension I, Springer 1970

[3] Guddat, Guerra, Tammer, Wendler: Multiobjective and stochastic Opt. based on parametric Opt., Berlin 1985

[4] Guddat, Guerra, Jongen: Parametric Opt.: Singularities, Pathfollowing and Jump, John Wesley, 1990

[5] Gomez, Guddat, Jongen, Rückmann, Solano: Curvas criticas y saltos en optimizacion n.o. lineal, 2000, http://www.emis.de/monographs/curvas/index.html

[6] Jongen, H.Th., Jonker, P., Twilt, F.: One-parametric formulies of optimization problems: Equality constraints, Journal Opt. Theory and Appl. 48 (1986), 141-161

[7] Jongen, H.Th., Jonker, P., Twilt, F.: Critical sets in par. opt., Math. Prog. 35 (1986), 1-21