REGELFLÄCHEN

Daniel Seifert, Stefan Vigerske
3. Juni 2002

1. Voraussetzungen

Wir erinnern an die folgenden Definitionen:

Definition 1.1. (Vektorfeld)
Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück. Dann heißt die stetige Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs f.

Definition 1.2. Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück.

$$N : U \to S^2,\ N(u,v) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\|}$$

heißt Gauß-Abbildung.

$$L := -DN \circ (Df)^{-1} : Tf \to Tf$$

heißt Weingartenabbildung.

Die erste Fundamentalform I von f ist definiert als

$$I : Tf \times Tf \to \mathbb{R},\ I(X,Y) := \langle X, Y \rangle$$

Für die Matrix der ersten Fundamentalform schreibt man auch

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Die zweite Fundamentalform II von f ist definiert als

$$II(X,Y) := I(LX,Y) = \langle LX, Y \rangle$$

Für die Matrix der zweiten Fundamentalform schreibt man auch

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Die Determinante K der Weingarten-Abbildung heißt Gauß-Krümmung von f. In den Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform hat K dann folgendes Aussehen:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

2. Definition und Eindeutigkeit

Definition 2.1. (Regelfläche)
Eine Fläche heißt <u>Regelfläche</u> (oder geradlinige Fläche), wenn sie eine $\left(C^2-\right)$Parametrisierung der folgenden Art zuläßt:

$$f(u,v) = c(u) + v \cdot X(u)$$

Dabei ist c eine Kurve (nicht notwendigerweise regulär, aber differenzierbar) und X ein nirgends verschwindendes Vektorfeld längs c.

Bemerkung 2.2. Mit obigen Bezeichnungen nennen wir c die <u>Leitkurve</u> der Regelfläche. Die von X aufgespannten Geraden bezeichnen wir als die <u>Erzeugenden</u> der Regelfläche.

Anschaulich können wir uns eine Regelfläche so vorstellen, daß eine Gerade im Raum entlang einer Kurve bewegt wird. Die damit beschrittene Fläche ist dann die Regelfläche.

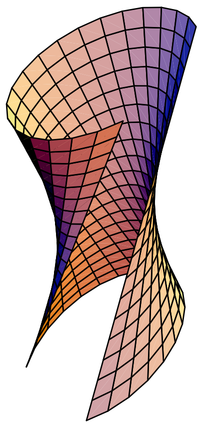

Abbildung 2.1. Beispiel Regelfläche

Um Regelflächen miteinander *vergleichen* zu können, muß man eine generische Form finden. Das dies möglich ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *(Standardparameter)*
Sei $f(t,s) = c(t) + s \cdot X(t)$ eine Regelfläche für die gilt, daß $\frac{dX}{dt} \neq 0$ in einem Intervall $t_1 < t < t_2$. Dann kann man f eindeutig zu $f_*(u,v) = c_*(u) + v \cdot X_*(u)$ umparametrisieren, so daß gilt:

$$\begin{aligned} X_* &= \frac{X}{\|X\|} \\ \|X'_*\| &= 1 \\ \langle c'_*, X'_* \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir c_* als <u>Striktionslinie</u> (oder auch als Kehllinie).

Beweis. Da X eine reguläre Kurve ist, können wir u so wählen, daß $X_* := \frac{X}{\|X\|}$ auf Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $\|X'_*\| = 1$

Wir betrachten nun das v als von u abhängige Funktion: $c_*(u) = c(u) + v(u) \cdot X_*(u)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle c_*', X_*' \rangle &= \langle c' + v(u) \cdot X_*' + v'(u) X_*, X_*' \rangle \\ &= \langle c', X_*' \rangle + v(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $v(u) = -\langle c', X_*' \rangle$ ist. Damit ist c_* eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 2.4. Die Striktionslinie ist bei windschiefen Geraden geometrisch als die Menge der Punkte auf den Geraden mit dem kürzesten Abstand zur Nachbargerade zu interpretieren. Bei einer Schraubregelfläche ist die Striktionslinie also entweder die Achse, eine Schraubenlinie oder ein Kreis.

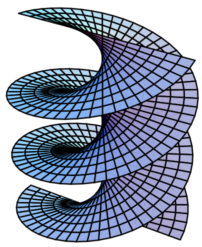

Abbildung 2.2. Schraubregelfläche

Satz 2.5. *(Eindeutigkeit einer Regelfläche)*
In den Standardparametern (vgl. Lemma 2.3) ist eine Regelfläche bis auf euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt durch die folgenden Größen

$$\begin{aligned} F &= \langle c', X \rangle \\ \lambda := \langle c' \times X, X' \rangle &= \det(c', X, X') \\ J := \langle X'', X \times X' \rangle &= \det(X, X', X'') \end{aligned}$$

jeweils als Funktion von u.

Umgekehrt gilt, daß die Wahl dieser drei Größen eine eindeutige Regelfläche bestimmt. Für diese gilt dann, daß die erste Fundamentalform wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \langle c', c' \rangle + v^2 & \langle c', X \rangle \\ \langle c', X \rangle & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F^2 + \lambda^2 + v^2 & F \\ F & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis. X ist eindeutig durch die Vorgabe von J bestimmt ([K99] 2.8, 2.11). Um die eindeutige Leitkurve zu erhalten, benutzen wir das orthonormale Bein X, X', $X \times X'$:

$$c' = \langle c', X \rangle X + \langle c', X' \rangle X' + \langle c', X \times X' \rangle X \times X' \tag{2.1}$$

$$= FX + \lambda X \times X' \tag{2.2}$$

F, λ und X sind vorgegeben durch die Gleichungen, damit ist 2.2 ein System linearer Differentialgleichungen mit der Lösung

$$c(u) = c(u_0) + \int_{u_0}^{u} (FX + \lambda X \times X') \, dt$$

Durch Wahl eines Startpunktes $c(u_0)$ erhalten wir eine Anfangsbedingung und eine eindeutig bestimmte Kurve c.

Daß im Gegenzug eine Regelfläche die obigen drei Werte eindeutig festlegt, ist klar. $\square$

Bemerkung 2.6. Mit den Definitionen des Satzes gilt:

- $F = ||c'|| \cdot cos\varphi$ bestimmt den Winkel φ zwischen der Striktionslinie und X
- J bestimmt die Krümmung der (sphärischen) Kurve X
- λ heißt Drall der Fläche (engl.: „parameter of distribution")

3. Torsen

Definition 3.1. (Torse)
Eine Regelfläche, deren Gauß-Abbildung konstant längs jeder der Geraden ist, d.h. $\frac{\partial N}{\partial v} \equiv 0$, heißt Torse.

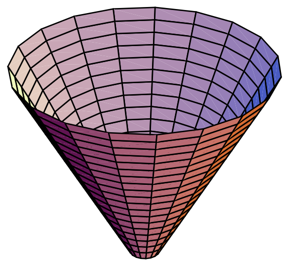

Abbildung 3.1. Eine Torse

Satz 3.2. *Eine offene und dichte Teilmenge einer jeder Torse $f(u,v) = c(u) + v \cdot X(u)$ besteht aus Stücken von Ebenen, Kegeln[1], Zylindern[2] sowie Tangentenflächen[3].*

Beweis. Falls $X' = 0$ auf einem Intervall ist, so ist $X(u) = X_0$ konstant. Dann ist die Fläche ein Zylinderstück. Ein Spezialfall ist die Ebene, z.B. wenn c eine Gerade ist.

Falls nun $X' \neq 0$ auf einem Intervall gilt, so können wir nach Lemma 2.3 o.B.d.A. annehmen, daß f in Standardparametern vorliegt (d.h. $||X'|| = 1$, $\langle c', X' \rangle = 0$)

Für die Gauß-Abbildung N gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \langle N, X \rangle &= 0 \\ \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \langle N, c' + vX' \rangle &= 0 \end{aligned}$$

[1] Eine Regelfläche heißt Kegel, wenn eine Parametrisierung der Form $f(u,v) = x + v \cdot X(u)$ mit einem konstanten Vektor x existiert.

[2] Eine Regelfläche heißt Zylinder, wenn eine Parametrisierung der Form $f(u,v) = c(u) + v \cdot X_0$ mit einem konstanten Vektor X_0 existiert.

[3] Eine Regelfläche heißt Tangentenfläche, wenn eine Parametrisierung als Regelfläche existiert, bei der der Vektor X tangential an der Kurve c liegt.

Die Ableitung der zweiten Gleichung nach v liefert dann mit $\frac{\partial N}{\partial v} = 0$:

$$0 = \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, c' + vX' \right\rangle + \langle N, X' \rangle \quad = \quad \langle N, X' \rangle$$

Also steht der normierte Vektor N auf X und X' senkrecht, d.h. $N = X \times X'$. In der Darstellung von c' im Dreibein $X, X', X \times X'$ ist dann wegen Lemma 2.3, Satz 2.5 und $c' \in T_p f$:

$$c' = F \cdot X + \underbrace{\langle c', X' \rangle}_{=0} \cdot X' + \underbrace{\langle c', N \rangle}_{=0} \cdot N = F \cdot X$$

Falls nun $c' = 0$ auf einem Intervall gilt, dann ist c konstant und die Fläche ein Stück eines Kegels.

Falls $c' \neq 0$, so liegt wegen $c' = FX$ der Vektor X tangential an c, d.h. es liegt eine Tangentenfläche vor.

□

Definition 3.3. (abwickelbar)
Eine Regelfläche heißt abwickelbar, wenn sie lokal in eine Ebene abgebildet werden kann unter Erhaltung der ersten Fundamentalform und der erzeugenden Geraden.

Anschaulich kann man sich dies so vorstellen, daß man eine der Geraden der Regelfläche in die Ebene legt und dann die Regelfläche von beiden Seiten der Gerade *abwickelt* und Längen und Winkel bewahrt.

Satz 3.4. *(äquivalente Aussagen für Abwickelbarkeit)*
Für eine Regelfläche $f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *Die Fläche ist abwickelbar.*
(2) $K \equiv 0$
(3) *Entlang jeder der Geraden sind alle Flächennormalen zueinander parallel, d.h. die Gauß-Abbildung ist konstant längs jeder der Geraden, d.h. die Fläche ist eine Torse.*

Beweis.

Wie im Beweis von Satz 3.2 erhält man

$$\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \langle N, X \rangle \quad = \quad 0$$

$$\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \langle N, c' + vX' \rangle \quad = \quad 0$$

Ableiten der ersten Gleichung nach v ergibt dann:

$$g = \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, X \right\rangle \quad = \quad 0$$

Damit hat dann die Gaußsche Krümmung K die Form

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2}$$

Ableiten der zweiten Gleichung nach v liefert

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, c' + vX' \right\rangle + \langle N, X' \rangle \quad = \quad 0$$

Da $\frac{\partial N}{\partial v}$ tangential an der Fläche anliegt, ist im allgemeinen $\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, c' + vX' \right\rangle \neq 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Die Gauß-Abbildung N ist konstant längs jeder der Geraden, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial N}{\partial v} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, c' + vX' \right\rangle + \langle N, X' \rangle = \langle N, X' \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right\rangle = f \\ \Leftrightarrow 0 &= K \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Wegen (2) $\Leftrightarrow$ (3) und Satz 3.2 müssen wir nur noch zeigen, daß die vier Flächentypen abwickelbar sind. Für eine zusammengesetzte Fläche kann man dann auch diese Abwicklungen zusammensetzen, da sie die erzeugenden Geraden stets in Geraden überführen:

- Die <u>Ebene</u> ist trivialerweise abwickelbar.
- Für einen <u>Zylinder</u> können wir c so wählen, daß c' ein Einheitsvektor ist und orthogonal auf dem konstanten Vektor X_0 steht, d.h. wir wählen die Leitkurve c so, daß sie immer auf der gleichen „Höhe" des Zylinders verläuft. Außerdem können wir X_0 als einen normierten Vektor betrachten. In diesen Parametern wird die erste Fundamentalform dann die euklidische Metrik in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|c'\|^2 & \langle c', X_0 \rangle \\ \langle c', X_0 \rangle & \|X_0\| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Für einen <u>Kegel</u> ist die Leitkurve c konstant, d.h. $c' = 0$, so daß bei einer Parametrisierung in Standardparametern mit Satz 2.5 gilt

$$\begin{aligned} F &= \langle c', X \rangle = 0 \\ \lambda &= \langle c' \times X, X' \rangle = 0 \\ \Rightarrow I &= \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Dasselbe liefern die Polarkoordinaten für die euklidische Ebene, so daß auch hier die erste Fundamentalform erhalten bleibt.
- Für eine <u>Tangentenfläche</u> in Standardparametern gilt $c' \times X = 0$, so daß mit Satz 2.5 gilt:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} F^2 + \langle c' \times X, X' \rangle^2 + v^2 & F \\ F & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F^2 + v^2 & F \\ F & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Die gleiche erste Fundamentalform erhalten wir (lokal) auch für eine gewöhnliche (ebene) Kreislinie $\tilde{c}(u) = F \cdot (\cos(u), \sin(u), 0)$ vom Radius $|F|$ und die Einheitstangente $\tilde{X} = (-\sin(u), \cos(u), 0)$ an $\tilde{c}$, denn es ist

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \left\langle \tilde{c}', \tilde{X} \right\rangle &= F \cdot \langle (-\sin(u), \cos(u)), (-\sin(u), \cos(u)) \rangle = F \\ \tilde{\lambda} = \left\langle \tilde{c}' \times \tilde{X}, \tilde{X}' \right\rangle &= \left\langle 0, \tilde{X}' \right\rangle = 0 = \lambda \\ \tilde{G} = \left\langle \tilde{X}, \tilde{X} \right\rangle &= 1 = G \end{aligned}$$

Also läßt sich die Tangentenfläche lokal in eine solche ebene Kreislinie überführen, bei der die erste Fundamentalform erhalten bleibt.

(1) $\Rightarrow$ (3): Wir können annehmen, daß die Leitkurve c nach Bogenlänge parametrisiert ist und senkrecht auf dem Vektorfeld X mit $\|X\| = 1$ steht.

Mit Satz 2.5 wird dann die erste Fundamentalform zu

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \langle c' + vX', c' + vX' \rangle = 1 + 2v \langle c', X' \rangle + v^2 \|X'\|^2 \\ F &= \langle c', X \rangle = 0 \\ G &= \|X\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Nach Annahme gibt es eine Abwicklung in die Ebene. Diese bildet c auf eine Kurve γ ab, die ebenfalls nach Bogenlänge parametrisiert ist, sowie X auf ein dazu senkrechtes Einheitsvektorfeld ξ. Das zugehörige Frenet-2-Bein ist

$$\begin{aligned} e_1 &= \gamma' \\ e_2 &= \pm\xi \text{ (da Kurve in Ebene liegt, } e_2 \perp e_1 \text{ und } \|e_2\| = 1) \end{aligned}$$

Wegen

$$\gamma' + v\xi' = e_1 \mp ve_2' = e_1 \mp v\kappa e_1 = (1 \mp v\kappa)\, e_1 = (1 \mp v\kappa)\, \gamma'$$

ist die entsprechende erste Fundamentalform dann:

$$\begin{aligned} E^* &= \|\gamma' + v\xi'\|^2 = (1 \mp v\kappa)^2 \\ F^* &= \langle \gamma' + v\xi', \xi \rangle = v \langle \xi', \xi \rangle = 0 \\ G^* &= \|\xi\| = 1 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung erhält die Abwickelbarkeit die erste Fundamentalform, so daß gilt

$$1 + 2v \langle c', X' \rangle + v^2 \|X'\|^2 = E \quad = \quad E^* = (1 \mp v\kappa)^2 = 1 \mp 2v\kappa + v^2\kappa^2$$

Durch Koeffizientenvergleich für v ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \langle c', X' \rangle &= \mp\kappa \\ \left\| X' \right\|^2 &= \kappa^2 \\ \Rightarrow \left\langle c', \frac{X'}{\|X'\|} \right\rangle &= \mp 1 \end{aligned}$$

Weil c' ein Einheitsvektor ist, ist dies nur möglich, wenn c' und X' linear abhängig sind ($\cos\alpha = \pm 1 \leftrightarrow \alpha \in \{0, \pi\}$), d.h. $\exists \alpha : X' = \alpha c'$. Dann wird die Einheitsnormale der Fläche aber einfach zu

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|} \\ &= \frac{(c' + vX') \times X}{\|(c' + vX') \times X\|} \\ &= \frac{(c' + v\alpha c') \times X}{\|(c' + v\alpha c') \times X\|} \\ &= \frac{(1 + v\alpha)\,(c' \times X)}{\|(1 + v\alpha)\,(c' \times X)\|} \\ &= c' \times X \end{aligned}$$

und hängt folglich nicht mehr von v ab. Also ist N konstant längs jeder der Geraden.

$\square$

Satz 3.5. *Ein jedes flachpunktfreies Flächenstück mit $K \equiv 0$ ist eine Regelfläche.*

Beweis. Zunächst eine kurze Wiederholung:

Definition. Die Eigenwerte der Weingartenabbildung L heißen Hauptkrümmungen von f. Die zugehörigen Eigenvektoren heißen Hauptkrümmungsrichtungen von f.

Ein Punkt p von f heißt Flachpunkt, wenn beide Hauptkrümmungen von f in p Null sind.

Ein Punkt p von f heißt Nabelpunkt, wenn die Hauptkrümmungen von f in p gleich sind.

Seien nun κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen der Fläche f, also die Eigenwerte von L. Nach Voraussetzung ist $L \not\equiv 0$. Wegen $0 \equiv K = \det(L) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ gilt dann $\kappa_1 \neq \kappa_2$ und eines der κ_i ist Null.

Dann besitzt die Fläche keine Nabelpunkte, und man kann sie lokal so umparametrisieren, daß die neuen Parameter Krümmungslinienparameter[4] sind (folgt aus der Theorie partieller Differentialgleichungen), so daß $u \mapsto f(u, v_0)$ die Krümmungslinie zur Hauptkrümmung $\kappa_1 \neq 0$ und $v \mapsto f(u_0, v)$ die Krümmungslinie zur Hauptkrümmung $\kappa_2 = 0$ ist.

Sei also $c(v) := f(u_0, v)$ die Krümmungslinie zur zweiten Hauptkrümmung. Dann ist $c' = \frac{\partial f}{\partial v}$, $c'' = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$,

$$L\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \kappa_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ und } L\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \kappa_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \tag{3.1}$$

und damit

$$0 = L\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = -DN \circ (Df)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = -DN\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial v} \tag{3.2}$$

$$-\kappa_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = -L\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = DN\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial N}{\partial u} \tag{3.3}$$

Wir behaupten nun, daß die Kurve c eine euklidische Gerade ist für jedes feste u_0, d.h. das deren Krümmung Null ist, also $c'' = 0$:

Differentiation von $\langle c', N\rangle = 0$ nach v ergibt:

$$\begin{aligned} \langle c'', N\rangle + \left\langle c', \frac{\partial N}{\partial v}\right\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle c'', N\rangle &= -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle \\ &= \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle \end{aligned}$$

Mit 3.1 folgt dann

$$\langle c'', N\rangle = 0.$$

---

[4]Eine reguläre Kurve $c = f \circ \gamma$, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}^3$ heißt Krümmungslinie, falls die Einheits-Tangente $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung ist.

Man sagt, ein Flächenstück ist nach Krümmungslinienparametern parametrisiert, falls $v \mapsto f(u_0, v)$ und $u \mapsto f(u, v_0)$ für feste u_0 und v_0 Krümmungslinien sind.

Da die Hauptkrümmungsrichtungen orthogonal zueinander sind[5], erhält man durch Differentiation von $\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$ nach v und mit 3.3:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right\rangle &= 0 \\
\Rightarrow \left\langle c'', \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle &= -\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial N}{\partial u} \right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\kappa_1} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial N}{\partial v} \right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle
\end{aligned}$$

Mit 3.2 folgt dann

$$\left\langle c'', \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = 0$$

Damit haben wir erhalten

$$c'' \perp N,\ c'' \perp \frac{\partial f}{\partial u},\ N \perp \frac{\partial f}{\partial u},\ N \perp \frac{\partial f}{\partial v} = c' \text{ und } \frac{\partial f}{\partial u} \perp \frac{\partial f}{\partial v} = c'$$

Also müssen c' und c'' linear abhängig sein. Wenn wir c aber nun auf Bogenlänge umparametrisieren, erhalten wir mittels Frenetschen Dreibein zusätzlich $c' \perp c''$.

Nun kann aber c'' nur dann zugleich orthogonal zu und linear abhängig von c' sein, wenn $c'' = 0$ gilt. Dann ist c eine Gerade (da c' =const), also $v \to f(u_0, v)$ eine Gerade für jedes u_0, also f eine Regelfläche.

□

Literatur

[K99] Kühnel, Wolfgang: „Differentialgeometrie", Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1999

[K73] Klingenberg, Wilhelm: „Eine Vorlesung über Differentialgeometrie", Heidelberger Taschenbücher Band 107, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1973

[G93] Gray, Alfred: „Modern differential geometry of curves and surfaces", CRC Press, 1993

[WMT] http://io.math.uni-bonn.de/people/weber/teaching/diffgeo/standard/Links/standard_lnk_2.html

[5]

$$\begin{aligned}
\kappa_1 \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle &= \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial u} \underbrace{\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle}_{=0} - \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right\rangle \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle \\
&= \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle \\
&= \kappa_2 \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\
\kappa_1 \neq \kappa_2 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle &= 0
\end{aligned}$$