HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 11 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 11. Juli 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 11.1 (3 + 3 Punkte) Verwenden Sie die Taylorformel mit Integralrestglied, um die folgenden Aussagen zu beweisen. (Hier bezeichnet E ein beliebiger Banachraum.)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to E$ eine glatte Funktion und $a \in I$ ein Punkt mit $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = 0$ für eine ganze Zahl $k \geq 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $g : I \to E$, so dass die Relation $f(x) = (x-a)^{k+1} g(x)$ erfüllt ist.

Kommentar: Das k-te Taylor Polynom von f um a ist 0, also gilt für $x = a + h \in I$,

$$f(x) = R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D f^{k+1}(a+th)(\underbrace{h, \ldots, h}_{k+1})\, dt$$
$$= \frac{1}{k!} h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+th)\, dt =: (x-a)^{k+1} g(x),$$

wobei wir definieren,

$$g(x) := \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a + t(x-a))\, dt.$$

Da $f^{(k+1)} : I \to E$ eine glatte Funktion ist, ist die Funktion $G(t,x) := \frac{1}{k!}(1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(x-a))$ auf $[0,1] \times I$ auch glatt, und der Satz aus der Vorlesung über parameterabhängige Integrale impliziert jetzt, dass g glatt ist, mit

$$g^{(m)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} G(t,x)\, dt$$

für jedes $m \geq 0$.

b) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : \mathcal{U} \to E$ eine glatte Funktion und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ ein Punkt mit $f(\mathbf{a}) = 0$. Dann existiert eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von $\mathbf{a}$ und glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n : \mathcal{V} \to E$, so dass auf $\mathcal{V}$ gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \cdot g_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Kommentar: Dieses Resultat ist als "Lemma von Hadamard" bekannt. Als $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ wählen wir eine beliebige Umgebung von $\mathbf{a}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathcal{V}$, die Punkte $\mathbf{a} + t\mathbf{h}$ für alle $t \in [0,1]$ auch in $\mathcal{V}$ liegen, z.B. eine hinreichend kleine Kugel um $\mathbf{a}$. Das 0-te Taylorpolynom um $\mathbf{a}$ ist 0, und die Integraldarstellung des entsprechenden Restglieds gibt für $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathcal{V}$,

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\, dt = \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 \partial_j f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, dt$$
$$=: \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \cdot g_j(\mathbf{x}),$$

mit

$$g_j(\mathbf{x}) := \int_0^1 \partial_j f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\, dt.$$

Diese Funktion ist glatt auf $\mathcal{V}$, weil $G(t, \mathbf{x}) := \partial_j f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ eine glatte Funktion auf $[0, 1] \times \mathcal{V}$ definiert.

Aufgabe 11.2 (3 Punkte) Beweisen Sie: für $x > 2$ gilt

$$\frac{d}{dx} \int_2^x \frac{t^x - 1}{\ln t}\, dt = \frac{x^x - 1}{\ln x} + \frac{x^{x+1} - 2^{x+1}}{x + 1}.$$

Hinweis: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $F(u, v) := \int_2^u \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt$ und wenden Sie für f die Kettenregel an.

Kommentar: Die Funktion $f(x) := \int_2^x \frac{t^x - 1}{\ln t}\, dt$ ist gleichzeitig auf zwei Arten abhängig von x. Wenn x nur als obere Integationsgrenze aber nicht im Integrand erscheinen würde, wäre $f'(x)$ direkt durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gegeben. Wenn dagegen x im Integrand erschiene aber nicht in den Integrationsgrenzen, dann könnten wir $f(x)$ als parameterabhängiges Integral betrachten. Da es beides gleichzeitig ist, müssen wir f als eine verknüpfte Funktion betrachten, in dem wir $F : (2, \infty) \times (2, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u, v) := \int_2^u \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt$$

definieren und dann

$$f(x) = F(u(x), v(x)), \qquad \text{mit} \qquad u(x) := x,\ v(x) := x$$

schreiben. Die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen gibt jetzt

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Die erste partielle Ableitung von F wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung berechnet, wobei man v als Konstante betrachtet:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{d}{du} \int_2^u \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt = \frac{u^v - 1}{\ln u}.$$

Für die zweite partielle Ableitung betrachten wir v als Parameter in einem parameterabhängigen Integral mit u als konstante Integrationsgrenze:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{d}{dv} \int_2^u \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt = \int_2^u \frac{\partial}{\partial v} \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt = \int_2^u t^v\, dt = \left.\frac{t^{v+1}}{v + 1}\right|_{t=2}^{t=u} = \frac{u^{v+1} - 2^{v+1}}{v + 1}.$$

Die Summe dieser zwei partiellen Ableitungen gibt die besagte Formel, wenn man $u = x$ und $v = x$ einsetzt.

Aufgabe 11.3 (2 + 2 + 2 Punkte) Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale, und dass in den ersten zwei Fällen auch absolute Konvergenz vorliegt:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{t} \cos(t^2)\, dt$

Kommentar: Beim ersten Integral gilt $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ *also folgt absolute Konvergenz vom Majorantenkriterium, da* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ *konvergiert.*
Beim zweiten Integral folgt von der Substitution $u = 1/x$*:*

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{x}\right| dx = \int_1^\infty \frac{|\sin(1/x)|}{x} dx = -\int_1^0 \frac{|\sin u|}{u} du = \int_0^1 \frac{|\sin u|}{u} du.$$

Dieses neue Integral ist auch uneigentlich, weil die Funktion $|\sin u|/u$ *nur auf* $(0,1]$ *und nicht bei* $u = 0$ *definiert ist (dies entspricht der Grenzwert* $x = \infty$ *vor der Substitution). Aber* $\lim_{u\to 0^+} \frac{|\sin u|}{u} = 1$*, also hat diese Funktion eine stetige Fortsetzung auf das kompakte Interval* $[0,1]$*, und folglich konvergiert das Integral gegen das (eigentliche) Riemann-Integral der stetig fortgesetzten Funktion.*
Das dritte Integral braucht etwas mehr Kreativität. Wir bemerken zuerst, dass die Funktion auch auf dem linken Rand des Intervalls stetig ist, also ist die einzige Frage, ob der Grenzwert der Integrale $\int_0^N \sqrt{t}\cos(t^2)\, dt$ *bei* $N \to \infty$ *existiert. Für diesen Zweck reicht es, das Integral* $\int_1^\infty \sqrt{t}\cos(t^2)\, dt$ *zu betrachten. Nach ein paar Fehlversuchen kam ich auf den folgenden Trick mit partieller Integration:*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \sqrt{t}\cos(t^2)\, dt &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} 2t\cos(t^2)\, dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d}{dt}\sin(t^2)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\sin(t^2)\Big|_1^\infty - \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\sin(t^2)\, dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sin(1) + \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\sin(t^2)}{t^{3/2}}\, dt.\end{aligned}$$

Der erste Grenzwert in der letzten Zeile ist 0*, also bleibt nur noch, die Konvergenz des Integrals* $\int_1^\infty \frac{\sin(t^2)}{t^{3/2}}\, dt$ *zu zeigen. Dieses Integral konvergiert sogar absolut, denn* $\left|\frac{\sin(t^2)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$*, und* $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$ *konvergiert.*
Achtung: dass $\int_1^\infty \frac{\sin(t^2)}{t^{3/2}}$ *absolut konvergiert, sagt uns nicht, dass die Konvergenz von* $\int_1^\infty \sqrt{t}\cos(t^2)\, dt$ *auch absolut ist. Die zwei Integrale* $\int_1^\infty \left|\sqrt{t}\cos(t^2)\right| dt$ *und* $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(t^2)}{t^{3/2}}\right| dt$ *haben nichts miteinander zu tun. Man kann mit ein bisschen Mühe sogar beweisen, dass* $\int_1^\infty \sqrt{t}\cos(t^2)\, dt$ *definitiv nicht absolut konvergiert.*
Letzte Bemerkung: Dieses letzte Beispiel zeigt, dass eine Funktion $f(t)$ *auf* $[0,\infty)$ *nicht* $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ *erfüllen muss, und zwar dass* $f(t)$ *bei* $t \to \infty$ *nicht mal beschränkt sein muss, um die Konvergenz von* $\int_0^\infty f(t)\, dt$ *zu ermöglichen. Aufgabe 11.C zeigt, dass das auch bei absoluter Konvergenz nicht so ist. In diesem Detail versagt die Analogie zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen; eine Reihe* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *kann wirklich nur dann konvergieren, wenn* $a_n \to 0$*.*

Aufgabe 11.4 (2 + 2 Punkte) Bestimmen Sie durch Integration, ob die folgenden Reihen konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{2}{n(\ln n)^2}$

Kommentar: In beiden Fällen kann der Integralvergleichsatz für Reihen angewendet werden, da es sich um positive monoton fallende stetige Funktionen handelt. Beim Ersten finden wir durch die Substitution $u = \ln x$*,*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u} = \infty,$$

also divergiert auch die Reihe. Beim Zweiten gibt die gleiche Substitution

$$\int_2^\infty \frac{2}{x(\ln x)^2}\,dx = 2\int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^2} < \infty,$$

also konvergiert auch die Reihe.

Aufgabe 11.5 (2 + 2 Punkte)

a) Finden Sie eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass f_n punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert aber $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; insb. gilt $\int_0^1 f_n(x)\,dx \not\to \int_0^1 f(x)\,dx$.

Kommentar: Man kann zuerst stetige Funktionen $g_n : [0,1] \to [0,\infty)$ so definieren, dass $g_n(x)$ für $x = 0$ und $x \geq 1/n$ verschwindet aber $g > 0$ auf dem offenen Interval $(0, 1/n)$. Dann gilt immer $\int_0^1 g_n(x)\,dx > 0$, und durch die Wahl von passenden Konstanten $c_n > 0$ kann $f_n(x) := c_n g_n(x)$ so definiert werden, dass $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. Die punktweise Konvergenz $f_n(x) \to 0$ ist in dieser Konstruktion automatisch.

b) Finden Sie eine Folge von uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass f_n gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert aber $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; insb. gilt $\int_0^\infty f_n(x)\,dx \not\to \int_0^\infty f(x)\,dx$.

Kommentar: Wir definieren stetige Funktionen $g_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ so, dass $g_n(x) \leq 1/n$ für alle x, $g_n(x) = 1/n$ für $x \in [0,n]$ und $g_n(x) =$ für $x \geq n+1$. Dann konvergiert g_n gleichmäßig gegen 0, und es gilt $\int_0^\infty g_n(x)\,dx = \int_0^{n+1} g_n(x)\,dx \geq \int_0^n g_n(x)\,dx = 1$. Durch Wahl von passenden Konstanten $c_n \in (0,1)$ ist dann die Folge $f_n := c_n g_n$ auch gleichmäßig gegen 0 konvergent, und es gilt $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$.

Aufgabe 11.6 (2 + 2 + 2 Punkte) Wir betrachten die glatte Funktion $F : [1,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(t,x) := x^3 e^{-tx^2}$.

a) Berechnen Sie eine explizite Formel für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch das uneigentliche Integral $f(x) := \displaystyle\int_1^\infty F(t,x)\,dt$.

Antwort: $f(x) = xe^{-x^2}$

b) Zeigen Sie, dass f glatt ist, und dass die Formel $f'(x) = \displaystyle\int_1^\infty \partial_x F(t,x)\,dt$ für alle $x \neq 0$ gilt, aber *nicht* für $x = 0$.

Kommentar: Für $x \neq 0$ berechnet man

$$\int_1^\infty e^{-tx^2}\,dt = \frac{1}{x^2}e^{-x^2}, \qquad \int_1^\infty te^{-tx^2}\,dt = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)e^{-x^2},$$

wobei man für das zweite Intregral partielle Integration anwenden kann. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \partial_x F(t,x)\,dt &= \int_1^\infty (3x^2 - 2x^4 t)e^{-tx^2}\,dt = 3x^2\int_1^\infty e^{-tx^2}\,dt - 2x^4\int_1^\infty te^{-tx^2}\,dt \\ &= (1-2x^2)e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(xe^{-x^2}),\end{aligned}$$

aber diese Formel ist nur für $x \neq 0$ gültig, weil wir das im Berechnen der Integrale vorausgesetzt haben. Andererseits verschwindet der Integrand $\partial_x F(t,x) = (3x^2 - 2x^4 t)e^{-tx^2}$ für $x = 0$, also

$$\int_1^\infty \partial_x F(t,0)\,dt = 0 \neq \frac{d}{dx}(xe^{-x^2})\bigg|_{x=0} = 1.$$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolgen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \int_1^n F(t,x)\,dt, \qquad g_n(x) := \int_1^n \partial_x F(t,x)\,dt.$$

Per Definition konvergiert f_n punktweise gegen f. Zeigen Sie, dass g_n auf dem Intervall $(0,1]$ punktweise gegen f' konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Kommentar: Definieren wir

$$g(x) := \int_1^\infty \partial_x F(t,x)\,dt,$$

also aus der Definition von uneigentlicher Integration folgt die punktweise Konvergenz $g_n(x) \to g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wissen aus Teilaufgabe b), dass $g(x) = f'(x)$ für $x \neq 0$ gilt, also gilt $g_n \to f'$ punktweise auf $(0,1]$.

Es gibt mindestens zwei mögliche Argumente, dass die Konvergenz $g_n \to g$ auf $(0,1]$ nicht gleichmäßig sein kann. Erstens indirekt: da $g_n(0)$ gegen $g(0)$ konvergiert, kann man sagen, wäre g_n auf $(0,1]$ gleichmäßig gegen g konvergent, dann wäre diese Folge auch auf dem ganzen kompakten Intervall $[0,1]$ gleichmäßig gegen g konvergent. Laut dem Satz über parameterabhängige Riemann-Integrale gilt außerdem

$$f_n'(x) = g_n(x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

denn F und $\partial_x F$ sind auf $[1,n] \times \mathbb{R}$ stetig. Aber wenn g_n auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen g konvergiert, dann folgt aus Satz 5.17 im Baum-Skript (Differentiation von Funktionenfolgen) dass g auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ auch die Ableitung von f sein muss. Wir haben in Teilaufgabe b) gesehen, dass das bei $x = 0$ nicht stimmt, also ist das ein Widerspruch.

Hier ein direkteres Argument: man berechnet

$$g_n(x) = \int_1^n (3x^2 - 2x^4 t)e^{-tx^2}\,dt = (1-2x^2)e^{-x^2} + (2nx^2-1)e^{-nx^2},$$

also

$$f'(x) - g_n(x) = (1-2nx^2)e^{-nx^2}.$$

Diese Folge konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen 0, aber für die Folge $x_n := \sqrt{3/2n}$ gilt $f'(x_n) - g_n(x_n) = -2e^{-3/2} \neq 0$, also ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Aufgabe 11.7 (4 + 4 Punkte) Die folgenden Resultate wurden in der Vorlesung für die Berechnung des Integrals $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\pi/2}$ benötigt. Wir betrachten für $x \geq 0$ die Funktion

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

Die Konvergenz dieses Integrals folgt aus dem Majorantenkriterium, wegen $e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}/(1+t^2) \leq 1/(1+t^2)$ und $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

a) Beweisen Sie: $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.
Hinweis: In beiden Fällen hilft es, das Integral als eine Summe von zwei Integralen auf Intervallen $[0,N]$ und $[N,\infty)$ zu betrachten, wobei $N > 0$ im ersten Fall groß ist, und im zweiten Fall klein. Sie dürfen nie vergessen, dass $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ konvergiert.

Kommentar: Wir schreiben

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \int_0^N \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt + \int_N^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

Für gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir $N > 0$ hinreichend groß, so dass $\int_N^\infty \frac{dt}{1+t^2} < \frac{\epsilon}{4}$; das ist möglich, weil das Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ konvergiert, also gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int_N^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{N\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^N \frac{dt}{1+t^2} \right) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Wegen der Ungleichung $e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)} \leq 1$ gilt dann

$$\int_N^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leq \int_N^\infty \frac{dt}{1+t^2} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Andererseits folgt vom Satz über parameterabhängige Integrale,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^N \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \int_0^N \frac{dt}{1+t^2},$$

da der Integrand eine stetige Funktion von $(t,x) \in [0,N] \times \mathbb{R}$ ist. Folglich gibt es $\delta > 0$, so dass

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_0^N \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt - \int_0^N \frac{dt}{1+t^2} \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

und daher gilt auch für alle $x \in [0,\delta)$,

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(0)| &\leq \left| \int_0^N \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt + \int_N^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt - \int_0^N \frac{dt}{1+t^2} - \int_N^\infty \frac{dt}{1+t^2} \right| \\
&\leq \left| \int_0^N \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt - \int_0^N \frac{dt}{1+t^2} \right| + \left| \int_N^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \right| + \left| \int_N^\infty \frac{dt}{1+t^2} \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Dies beweist $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$.

Für den Grenzwert bei $x \to \infty$ reicht das folgende Argument: es gilt $-\frac{x^2}{2}(1+t^2) \leq -\frac{x^2}{2}$, und daher,

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{1+t^2}\,dt = e^{-x^2/2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = e^{-x^2/2}\frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

(Der Hinweis war in diesem Fall ein bisschen irreführend, sorry!

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$G_n(x) := \int_0^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = -x \int_0^n e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\,dt.$$

Beweisen Sie, dass G_n bei $n \to \infty$ auf jeder kompakten Teilmenge von $(0,\infty)$ gleichmäßig gegen $G(x) := -x \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\,dt$ konvergiert. Folgern Sie, dass $F'(x) = G(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Kommentar: Zu zeigen ist, gegeben eine kompakte Teilmenge $K \subset (0,\infty)$ und $\epsilon > 0$, existiert $N > 0$, so dass

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |G(x) - G_n(x)| = \left| -x \int_n^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\,dt \right| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in K.$$

Den Betrag des Integrals schreiben wir in der Form

$$\left| -x \int_n^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\,dt \right| = xe^{-x^2/2} \int_n^\infty e^{-(xt)^2/2}\,dt \le \int_n^\infty e^{-(xt)^2/2} x\,dt,$$

und nach der Substitution $u = xt$, $du = x\,dt$ wird dieses Integral $\int_{nx}^\infty e^{-u^2/2}\,du$. Da $K \subset (0,\infty)$ kompakt ist, gibt es eine Konstante $a > 0$, sodass $x \geq a$ für alle $x \in K$ gilt, also folgt

$$\int_n^\infty e^{-(xt)^2/2} x\,dt = \int_{nx}^\infty e^{-u^2/2}\,du \le \int_{na}^\infty e^{-u^2/2}\,du.$$

Für n hinreichend groß wird dieses Integral beliebig klein, weil $\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,du$ konvergiert (das haben wir in der Vorlesung durch das Majorantenkriterium gezeigt). Dies beweist die gleichmäßige Konvergenz von G_n gegen G auf K.

Per Definition konvergiert die Funktion

$$F_n(x) := \int_0^n \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

punktweise gegen $F(x)$, und der Satz über parameterabhängige Integrale impliziert

$$F_n'(x) = \int_0^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = G_n(x).$$

Die gleichmäßige Konvergenz von G_n gegen G auf kompakten Teilmengen von $(0,\infty)$ impliziert also (wegen Satz 5.17 im Baum-Skript), dass F auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist und Ableitung G hat.

Insgesamt: **37 Punkte**

Aufgabe 11.Z (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Für diese Aufgabe brauchen wir ein paar algebraische Grundbegriffe: sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Element $x \in \mathcal{R}$ heißt *Einheit*, falls ein Element $x^{-1} := y \in \mathcal{R}$ mit $xy = 1$ existiert. Ein Element $x \in \mathcal{R}$ mit $x \neq 0$ heißt *irreduzibel*, falls x keine Einheit ist und nicht als Produkt $x = ab$ von zwei Nicht-Einheiten $a, b \in \mathcal{R}$ geschrieben werden kann. Gegeben $x, y \in \mathcal{R}$ sagen wir "x teilt y," falls die Relation $y = xz$ für ein $z \in \mathcal{R}$ erfüllt ist. Diese Bedingung ist nur interessant, wenn x keine Einheit ist, denn sonst kann man immer $y = x(x^{-1}y)$ schreiben, d.h. die Einheiten teilen alle anderen Elemente.
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_n$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[f]$ von glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei die Äquivalenzrelation $f \sim g$ bedeutet, dass f und g auf

einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gleich sind. Für zwei glatte Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hängen die Äquivalenzklassen $[f+g]$ und $[fg]$ nur von den Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$ ab, also hat $\mathcal{O}_n$ die Struktur eines kommutativen Rings mit $[f] + [g] := [f+g]$ und $[f][g] := [fg]$. Das Einselement $1 = [e] \in \mathcal{O}_n$ ist die Äquivalenzklasse der konstanten Funktion $e(x) := 1$, und $[f] \in \mathcal{O}_n$ ist eine Einheit genau dann, wenn $f(0) \neq 0$; in diesem Fall ist die Funktion $1/f$ definiert und glatt auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, also bestimmt sie ein Element $[1/f] \in \mathcal{O}_n$ mit $[f][1/f] = 1$.[1]
In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die folgende Frage: gegeben $[f] \in \mathcal{O}_n$ irreduzibel, welche Elemente $[h] \in \mathcal{O}_n$ werden von $[f]$ geteilt? Dies würde heißen, dass in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, die Gleichung $h = fg$ für eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllt ist. Eine offensichtlich notwendige Bedingung dafür ist, dass h auf $f^{-1}(0)$ (zumindest in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$) verschwindet. Beweisen Sie, dass diese Bedingung im Fall $n = 1$ aber nicht in den Fällen $n \geq 2$ auch hinreichend ist; konkret:

a) Ein Element $[f] \in \mathcal{O}_1$ ist genau dann irreduzibel, wenn $f(0) = 0$ aber $f'(0) \neq 0$.
Hinweis: Aufgabe 11.1 ist hier relevant.

Kommentar: Ein irreduzibeles Element $[f] \in \mathcal{O}_1$ ist u.a. keine Einheit, also ist es dargestellt von einer glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Laut Aufgabe 11.1 (eigentlich wurde dieser Fall davon in der Vorlesung bewiesen) gibt es dann eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xg(x)$, und $[g] \in \mathcal{O}_1$ muss dann eine Einheit sein, sonst wäre $[f]$ nicht irreduzibel, also $g(0) \neq 0$. Es folgt, $f'(0) = g(0) \neq 0$.

b) Seien $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, so dass $[f] \in \mathcal{O}_1$ irreduzibel ist und h auf $f^{-1}(0)$ verschwindet. Dann wird $[h]$ von $[f]$ geteilt.
Hinweis: Nach einem "Koordinatenwechsel" können Sie wegen des Umkehrsatzes hier annehmen, dass f die Funktion $f(x) = x$ ist.

Kommentar: Nach Teilaufgabe a) können wir $f(x) = xg(x)$ für eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) \neq 0$ schreiben, und weil $0 \in f^{-1}(0)$ und h darauf verschwindet, kann man wieder durch Aufgabe 11.1 zeigen, dass $h(x) = xu(x)$ für eine glatte Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt. Es folgt

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{xu(x)}{xg(x)} = \frac{u(x)}{g(x)},$$

und u/g ist eine glatte Funktion auf einer Umgebung von 0, da $g(0) \neq 0$, also $[h] = [f][u/g]$.

Wie im Hinweis angedeutet, kann man das Problem auch wie folgt betrachten. Laut Teilaufgabe a) gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$, also der Umkehrsatz impliziert, dass f in 0 ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h. es existieren Umgebungen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ von 0, sodass $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijektiv ist, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ ist auch glatt. Wir verwenden jetzt f^{-1} als Koordinatenwechsel und betrachten die Funktion

$$h \circ f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}.$$

Wegen $f(0) = 0$ gilt $h(0) = 0$ und daher auch $h \circ f^{-1}(0) = h(0) = 0$, also impliziert Aufgabe 11.1 wieder die Existenz einer glatten Funktion $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ mit $h \circ f^{-1}(x) = xg(x)$. Es folgt,

$$h(x) = h \circ f^{-1} \circ f(x) = f(x)g(f(x)),$$

[1] Wegen Aufgabe 11.A(b) spielt es hier keine Rolle, dass $1/f$ vielleicht nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist; Hauptsache, es gibt eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $1/f$ übereinstimmt.

also $[h] = [f][g \circ f]$. (Bemerkung: Hier haben wir die Funktion $g \circ f$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ sondern nur auf $\mathcal{U}$ definiert, aber wegen Aufgabe 11.A(b) gibt es auch eine glatte Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf einer Umgebung von 0 mit $g \circ f$ übereinstimmt und deswegen $[h] = [f][G]$ erfüllt.)

c) Für $n \geq 2$ stellt die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ein irreduzibeles Element $[f] \in \mathcal{O}_n$ dar.

Hinweis: Falls $f = gh$ mit $g(0) = h(0) = 0$, dann impliziert der Satz von Taylor $\nabla g(0) \neq 0$ und $\nabla h(0) \neq 0$ (warum?). Wie müsste die Menge $f^{-1}(0)$ dann aussehen?

Kommentar: Als Vorbemerkung brauchen wir das folgende Korollar des Satzes von Taylor. Sei $g \in C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ auf einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von 0 gegeben: dann gilt die Implikation

$$D^m g(0) = 0 \text{ für alle } m = 0, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad g(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^{k+1}).$$

Zur Erinnerung: diese Notation heißt, es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass die Ungleichung $|g(\mathbf{x})| \leq C\|\mathbf{x}\|^{k+1}$ für alle $\mathbf{x}$ hinreichend nahe an $0 \in \mathbb{R}^n$ gilt. Der Fall $n = 1$ dieser Aussage wurde mal als Aufgabe 3.3 bewiesen, und der allgemeine Fall geht analog: da das k-te Taylorpolynom von g um $\mathbf{x} = 0$ verschwindet, gibt die Taylorformel

$$g(\mathbf{x}) = R_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha g(\theta \mathbf{x})}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha \qquad \text{für ein } \theta \in (0, 1).$$

Aus der Stetigkeit von $D^{k+1}g$ folgt jetzt, dass $\partial^\alpha g(\theta \mathbf{x})$ in dieser Formel beschränkt ist, solange $\mathbf{x}$ in einer Umgebung von 0 liegt, und da $\mathbf{x}^\alpha$ in der Formel ein Polynom von Grad $k+1$ ist, folgt die Behauptung. (Achtung: wir können diese Formel in unserer Situation anwenden, weil alle Funktionen in der Diskussion glatt sind, aber wäre g nur in $C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und nicht in $C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, dann hätten wir nur (wegen Korollar 2 im Skript zur Vorlesung vom 25.6) $g(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|^k)$. Dies ist eine schwächere Aussage, siehe z.B. Aufgabe 3.4.)

Jetzt zum eigentlichen Thema: angenommen $[f]$ ist reduzibel, dann gilt $f = gh$ für glatte Funktionen $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = h(0) = 0$. Seien k, ℓ die größten ganzen Zahlen, bei der

$$D^m g(0) = 0 \text{ für alle } m = 0, \ldots, k \qquad \text{und} \qquad D^m h(0) = 0 \text{ für alle } m = 0, \ldots, \ell$$

gilt; wir wissen schon $k \geq 0$ und $\ell \geq 0$. Dann gilt $g(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^{k+1})$ und $h(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^{\ell+1})$, also existiert eine Konstante $C > 0$ mit $g(\mathbf{x}) \leq C\|\mathbf{x}\|^{k+1}$ und $h(\mathbf{x}) \leq C\|\mathbf{x}\|^{\ell+1}$ für $\mathbf{x}$ in einer Umgebung von 0. Folglich gilt in dieser Umgebung auch

$$\|\mathbf{x}\|^2 = f(\mathbf{x}) \leq C^2 \|\mathbf{x}\|^{k+\ell+2},$$

also $\|\mathbf{x}\|^2 / \|\mathbf{x}\|^{k+\ell+2}$ ist beschränkt für $\mathbf{x}$ in einer Umgebung von 0, und das kann nur dann stimmen, wenn $k + \ell = 0$ gilt, also $k = \ell = 0$. Dies impliziert, dass $\nabla g(0)$ und $\nabla h(0)$ beide nicht trivial sind. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt nun, dass $g^{-1}(0)$ und $h^{-1}(0)$ in einer Umgebung von 0 glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind, also ist

$$f^{-1}(0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; g(\mathbf{x}) = 0 \text{ oder } h(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

in dieser Umgebung die Vereinigung von zwei glatten $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$. Im Fall $n = 1$ ist das möglich, denn eine 0-dimensionale

Untermannigfaltigkeit ist per Definition eine diskrete Menge von Punkten. Aber $f^{-1}(0)$ besteht im Allgemeinen nur aus dem einzelnen punkt $0 \in \mathbb{R}^n$, und bei $n \geq 2$ ist das keine Vereinigung von $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten, also haben wir einen Widerspruch.

d) Zu der Funktion f in Teilaufgabe c) gibt es glatte Funktionen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass h auf $f^{-1}(0)$ verschwindet aber $[f]$ teilt $[h]$ nicht.

Kommentar: Es ist nicht schwierig, glatte Funktionen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu finden, die auf $f^{-1}(0)$ verschwinden, denn $f^{-1}(0)$ besteht nur aus dem Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$. Nehmen wir z.B. $h(x_1, \dots, x_n) = x_1$, deren Gradient in $\mathbf{x} = 0$ nicht verschwindet. Falls $[h] = [f][g]$ für eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann gilt in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 g(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^2),$$

da g stetig ist. Aber $h(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^2)$ ist mit der Bedingung $\nabla h(0) \neq 0$ nicht vereinbar: tatsächlich, die Taylorformel für h mit Grad 1 gibt

$$h(\mathbf{x}) = \langle \nabla h(0), \mathbf{x} \rangle + R_1(\mathbf{x}),$$

und wenn das $O(\|\mathbf{x}\|^2)$ ist, dann müsste eine Schranke der Form

$$\frac{|\langle \nabla h(0), \mathbf{x} \rangle + R_1(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq C$$

für alle $\mathbf{x}$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gelten. Für das Restglied ist das kein Problem, denn das gleiche Argument wie in unserer Vorbemerkung bei Teilaufgabe c) impliziert, dass $R_1(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2$ bei $\mathbf{x} \to 0$ beschränkt ist. Aber $|\langle \nabla h(0), \mathbf{x} \rangle|/\|\mathbf{x}\|^2$ ist definitiv nicht beschränkt, denn z.B. können wir $\epsilon \nabla h(0)$ für $\mathbf{x}$ einsetzen und ϵ gegen 0 konvergieren lassen, dann gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|\langle \nabla h(0), \epsilon \nabla h(0) \rangle|}{\|\epsilon \nabla h(0)\|^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\epsilon}{\epsilon^2} = \infty.$$

Das widerspricht die Annahme, dass $[h]$ durch $[f]$ teilbar ist.

Bemerkung: Würden wir nicht reell- sondern komplexwertige Funktionen betrachten, wäre das Beispiel in Teilaufgabe c) nicht mehr irreduzibel, z.B. gilt $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$. In der komplexen Analysis kann man tatsächlich zeigen, dass ein Resultat analog zu Teilaufgabe b) für komplex-analytische Funktionen $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt.[2]

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 11.A Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ist glatt. Dies kann ähnlich wie bei Aufgabe 1.4 bewiesen werden, und Sie dürfen es für diese Aufgabe als gegeben ansehen. Beweisen Sie:

[2]Das besagte Resultat wird auf Seite 11 des Buches *Principles of Algebraic Geometry* von Griffiths und Harris als "schwache Nullstellensatz" bezeichnet.

a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine glatte und monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f(x) = 0$ für $x \leq a$ und $f(x) = 1$ für $x \geq b$ erfüllt.[3]
Hinweis: Hat φ eine Stammfunktion?

Kommentar: φ ist stetig, also natürlich hat sie eine Stammfunktion, z.B.

$$\psi(x) := \int_{-1}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Diese Funktion ist monoton wachsend (weil $\varphi \geq 0$), verschwindet auf $(-\infty, -1]$, und ist eine positive Konstante

$$c := \psi(1) = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\, dt$$

auf $[1, \infty)$. Eine Funktion mit den gewünschen Eigenschaften ist dann

$$f(x) := \frac{1}{c}\psi\left(\frac{2}{b-a}x + \frac{a+b}{a-b}\right).$$

(Wie man darauf kommt? Es gibt genau eine affine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = -1$ und $g(b) = 1$; f ist dann $\frac{1}{c}\psi \circ g$.)

b) Gegeben eine glatte Funktion $f : \mathcal{U} \to E$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ gibt es eine glatte Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die auf einer Umgebung von $\mathbf{a}$ mit f übereinstimmt. Weiter: für eine gegebene Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{a}$ darf o.B.d.A. angenommen werden, dass $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}$ verschwindet.
Bemerkung: Zusammengefasst heißt es, jede glatte Funktion auf einer Umgebung eines Punktes kann auf beliebige grössere Definitionsbereiche glatt erweitert werden.

Kommentar: Wähle $b > a > 0$ klein genug, sodass die abgeschlossene Kugel um $\mathbf{a}$ mit Radius b in der gegebenen Umgebung $\mathcal{V}$ liegt. Für die Funktion $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ (früher genannt f) aus der Antwort auf Teilaufgabe a) ist nun eine geeignete Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < a, \\ h(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) f(\mathbf{x}) & \text{für } a \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq b, \\ 0 & \text{für } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > b. \end{cases}$$

c) Finden Sie eine reell-analytische Funktion auf einer Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}$, die keine Erweiterung als reell-analytische Funktion auf $\mathbb{R}$ zulässt.

Kommentar: Ein Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{1-x}$ auf $(-1, 1)$. In Aufgabe 3.5 wurde bewiesen: sind zwei reell-analytische Funktionen auf einem offenen Intervall in $\mathbb{R}$ definiert und stimmen auf einer nichtleeren offenen Teilmenge überein, dann sind sie identisch. Wenn also eine reell-analytische Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, die auf der Umgebung eines Punktes in $(-1, 1)$ mit f übereinstimmt, dann sind f und $\widetilde{f}$ auch auf dem ganzen Interval $(-1, 1)$ identisch, was impliziert, $\lim_{x \to 1^-} \widetilde{f}(x) = \infty$. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft kann nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sein.

Aufgabe 11.B Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \displaystyle\int_{-x}^{x^2} e^{xt^2}\, dt$ die Differentialgleichung

$$f'(x) + \frac{1}{2} f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{x^3} + x\left(2 + \frac{x}{2}\right) e^{x^5}$$

[3] Funktionen dieser Art werden oft "cutoff functions" genannt.

erfüllt.

Aufgabe 11.C
Finden Sie eine stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\int_0^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergiert aber $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Kommentar: Die Funktion in Aufgabe 11.3(c) ist kein Beispiel, weil das Integral nicht absolut konvergiert. Aber man kann z.B. eine stetige Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zusammenbasteln, die außerhalb der disjunkten Intervallen

$$I_k := \left[2k, 2k + \frac{1}{k^3}\right] \subset [0, \infty), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

verschwindet und dazu $\max_{x\in I_k} f(x) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann gilt

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{2k}^{2k+\frac{1}{k^3}} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^\infty \int_{2k}^{2k+\frac{1}{k^3}} k\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{k^3} < \infty.$$

Aufgabe 11.D Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

Da dieses Integral uneigentlich ist, kann man keinen Satz aus der Vorlesung direkt anwenden, um es bzgl. x zu differenzieren. In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass die Formel

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} t^{x-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

trotzdem für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist insb. eine glatte Funktion.

a) Beweisen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (-1, \infty)$, das uneigentliche Integral $i_k := \int_0^{1/k} (\ln t)^n t^\alpha\,dt$ existiert und $\lim_{k\to\infty} i_k = 0$ erfüllt.

   Hinweis: vollständige Induktion über n mittels partieller Integration.

   Kommentar: Für $n = 0$ reden wir vom Integral

$$i_k := \int_0^{1/k} t^\alpha\,dt = \left.\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^{1/k} = \frac{1}{(\alpha+1)k^{\alpha+1}},$$

   wobei für $t = 0$ wegen $\alpha + 1 > 0$ keine Probleme auftreten, und freilich gilt $\lim_{k\to\infty} i_k = 0$. Jetzt nehmen wir als Induktionsvoraussetzung, dass dies schon für $n - 1$ bewiesen ist. Aus partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
i_k &= \int_0^{1/k} (\ln t)^n t^\alpha\,dt = \int_0^{1/k} (\ln t)^n \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) dt \\
&= \left.\frac{1}{\alpha+1}(\ln t)^n t^{\alpha+1}\right|_0^{1/k} - \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{1/k} \left[\frac{d}{dt}(\ln t)^n\right] t^{\alpha+1}\,dt \\
&= \left.\frac{1}{\alpha+1}(\ln t)^n t^{\alpha+1}\right|_0^{1/k} - \frac{n}{\alpha+1}\int_0^{1/k} (\ln t)^{n-1} t^\alpha\,dt
\end{aligned}$$

Das Integral in der letzten Zeile ist die $(n-1)$-Version von i_k, also ist es nach Induktionsvoraussetzung konvergent, und der Wert davon (auch nach Induktionsvoraussetzung) konvergiert bei $k \to \infty$ gegen 0. Das andere Glied in der letzten Zeile muss im Grenzwert $t \to 0^+$ vorsichtig geprüft werden, denn $\ln t$ wird bei $t \to 0^+$ unbeschränkt, während $t^{\alpha+1} \to 0$. Nach n wiederholten Anwendungen der Regel von L'Hospital findet man

$$\lim_{t\to 0^+} (\ln t)^n t^{\alpha+1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\ln t)^n}{1/t^{\alpha+1}} = 0, \tag{1}$$

also wird das erste Glied $\frac{1}{\alpha+1}\left[\ln(1/k)\right]^n (1/k)^{\alpha+1}$, was wegen (1) auch bei $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

b) Beweisen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (-1, \infty)$, das uneigentliche Integral $I_k := \int_k^\infty (\ln t)^n t^\alpha e^{-t}\, dt$ existiert und $\lim_{k\to\infty} I_k = 0$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ eine Ungleichung der Form $(\ln t)^n t^\alpha e^{-t} \leq Ce^{-at}$ mit Konstanten $a, C > 0$ gilt.

Kommentar: Aus der Regel von L'Hospital ergeben sich die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{t^p}{e^{t/2}} = 0 \text{ für alle } p > 0,$$

woraus man für jedes $p > 0$ die Existenz von Konstanten $C, C_p > 0$ mit

$$\ln t \leq Ct \qquad \text{und} \qquad t^p \leq C_p e^{t/2} \qquad \text{für alle } t \geq 1$$

schließen kann. Folglich gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \int_k^\infty (\ln t)^n t^\alpha e^{-t}\, dt \leq C^n \int_k^\infty t^{n+\alpha} e^{-t}\, dt \leq C^n C_{n+\alpha} \int_k^\infty e^{-t/2}\, dt = 2C^n C_{n+\alpha} e^{-k/2},$$

und das konvergiert bei $k \to \infty$ gegen 0.

c) Betrachten wir die Funktionenfolge $\Gamma_k : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\Gamma_k(x) := \int_{1/k}^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass Γ_k für jedes k glatt ist, und n-te Ableitung $\Gamma_k^{(n)}(x) = \int_{1/k}^k (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt$ für $n \in \mathbb{N}$ hat.

Kommentar: Da $(\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$ eine glatte Funktion von $(t, x) \in [1/k, k] \times (0, \infty)$ definiert, folgt dies per Induktion über n aus dem Satz in der Vorlesung über parameterabhängige Riemann-Integrale. (Der Sinn der Integrationsgrenzen $1/k$ und k ist, dass diese nicht uneigentliche sondern ganz gewöhnliche Riemann-Integrale sind, also gibt es keine Bedenken beim Anwenden des Satzes aus der Vorlesung.)

d) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede kompakte Teilmenge $K \subset (0, \infty)$, die Funktionenfolge $\Gamma_k^{(n)}\big|_K : K \to \mathbb{R}$ bei $k \to \infty$ gleichmäßig konvergent ist, mit Grenzfunktion $F^n(x) := \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Folgern Sie per Induktion über n, dass F^n die n-te Ableitung von Γ ist.

Kommentar: Für eine kompakte Teilmenge $K \subset (0, \infty)$ gibt es Zahlen $\delta > 0$ und $N > 0$, sodass

$$x \in K \quad \Rightarrow \quad \delta \leq x \leq N.$$

Für die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{k\to\infty} \Gamma_k^{(n)} = F^n$ auf K muss nun gezeigt werden, dass für jedes $\epsilon > 0$ und $x \in K$, die Differenz

$$\left|F^n(x) - \Gamma_k^{(n)}(x)\right| = \left|\int_0^{1/k} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_k^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt\right|$$

kleiner als ϵ wird, wenn k hinreichend groß ist. Beim ersten dieser zwei Integrale betrachten wir $t \in (0, 1]$, also gilt $\ln t \le 0$, und wegen $x \ge \delta$ auch $t^{x-1} \le t^{\delta-1}$. Nehmen wir $e^{-t} \le 1$ dazu, folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1/k} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt\right| &= \int_0^{1/k} |(\ln t)^n|\, t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_0^{1/k} |(\ln t)^n|\, t^{\delta-1}\, dt \\ &= (-1)^n \int_0^{1/k} (\ln t)^n t^{\delta-1}\, dt,\end{aligned}$$

und das Resultat von Teilaufgabe a) impliziert, dass dies bei $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Beim zweiten Integral betrachten wir $t \in [1, \infty)$, also gilt $\ln t \ge 0$ und wegen $x \le N$ auch $t^{x-1} \le t^{N-1}$, und daher

$$\left|\int_k^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt\right| = \int_k^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_k^\infty (\ln t)^n t^{N-1} e^{-t}\, dt.$$

Das Resultat von Teilaufgabe b) impliziert dann direkt, dass diese Schranke bei $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz $\Gamma_k^{(n)} \to F^n$ auf K für jedes $n \ge 0$ bewiesen.

Abschließend wollen wir daraus folgern, dass $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ glatt ist und $\Gamma^{(n)}(x) = F^n(x)$ für jedes $x > 0$ erfüllt. Die Stetigkeit von Γ folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz $\Gamma_k \to F^0 = \Gamma$ auf kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$, denn jedes Γ_k ist stetig. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir dann als Induktionsvoraussetzung an, dass Γ $(n-1)$-fach stetig differenzierbar ist mit $\Gamma^{(m)} = F^m$ für $m = 0, \dots, n-1$. Da die Ableitungen $\Gamma_k^{(n)}$ von $\Gamma_k^{(n-1)}$ auf kompakten Teilmengen auch gleichmäßig gegen F^n konvergieren, folgt nun aus Satz 5.17 im Baum-Skript, dass die Grenzfunktion $\lim_{k\to\infty} \Gamma_k^{(n-1)} = F^{n-1} = \Gamma^{(n-1)}$ auch differenzierbar ist, und ihre Ableitung ist $\lim_{k\to\infty} \Gamma_k^{(n)} = F^n$. Damit ist bewiesen, dass $\Gamma^{(n)}$ auch existiert und mit F^n übereinstimmt, also per Induktion stimmt das jetzt für jedes $n \in \mathbb{N}$.