Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis II*
SoSe 2019

Parameterabhängige uneigentliche Integrale

Vor einer Woche haben wir in der Vorlesung einen leicht anwendbaren Satz bewiesen (Satz 7.19 im Baum-Skript), der uns sagt, wann und wie man eine Funktion der Form

$$g(\mathbf{x}) = \int_a^b F(t, \mathbf{x})\, dt$$

differenzieren kann, vorausgesetzt $[a, b]$ ist ein kompaktes Intervall und die Funktion $F : [a, b,] \times \mathcal{U} \to E$ ist stetig. Das Verfahren heißt im Englischen "differentiation under the integral sign," weil die Antwort (wenn es geht) so aussieht:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt. \tag{1}$$

Es wurde aber noch nicht geklärt, ob und wann diese Formel gilt, falls die Funktionen $F(\cdot, \mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x}) : (a, b) \to E$ nur *uneigentlich* Riemann-integrierbar sind, z.B. wenn sie in Umgebungen der Randpunkten a oder b unbeschränkt sind, oder im Fall $a = -\infty$ oder $b = \infty$. Um die Sache ein bisschen zu konkretisieren, betrachten wir in diesem Skript den folgenden Spezialfall: $a \in \mathbb{R}$, $b := \infty$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene Teilmenge, F und $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ für alle $j = 1, \dots, n$ sind stetige Funktionen auf $[a, \infty) \times \mathcal{U}$ mit Werten in einem Banachraum E, und die Funktionen

$$F(\cdot, \mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x}) : [a, \infty) \to E$$

sind für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Wir betrachten dann die Funktion

$$g : \mathcal{U} \to E, \qquad g(\mathbf{x}) := \int_a^\infty F(t, \mathbf{x})\, dt.$$

Funktionen dieser Art treten sehr oft sowohl in der reinen Mathematik als auch in Anwendungen auf. Ein Beispiel der ersten Art ist die sogenannte *Faltung* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die als

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^\infty f(x - y) g(y)\, dy$$

definiert ist, und den folgenden Vorteil hat: wegen der Formel

$$(f * g)'(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x - y) g(y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty f'(x - y) g(y)\, dy = (f' * g)(x)$$

ist $f * g$ in der Regel genau so differenzierbar wie f, selbst wenn g unstetig ist. Man kann diese Tatsache mit einer geeigneten Wahl der Funktion f ausnutzen, um für gegebene Funktionen g beliebig gute *glatte* Approximationen davon in der Form $f * g$ zu finden.

Was Anwendungen betrifft, die Formel (1) ist äußerst beliebt in der theoretischen Physik, wo sie z.B. zum Berechnen der Wechselwirkungen von Elementarteilchen ohne Bedenken ständig angewendet wird. Richard Feynman hat in seinem Buch *Surely You're Joking, Mr. Feynman* Folgendes zum Thema geschrieben: *"I had learned to do integrals by various* *methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. The book also showed how to differentiate parameters under the integral sign—it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals. The result was that, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me."*

Wir haben in der Vorlesung ein Beispiel der Methode zum Berechnen von Integralen gesehen, die Feynman hier beschreibt: man kann unter Anderem das sogenannte Gaußsche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ damit ausrechnen (s. Beispiel 2). Aber es gibt dabei subtile Details, die beachtet werden müssen, denn bei uneigentlichen Integralen ist die Formel (1) manchmal falsch, auch wenn alle relevanten Funktionen glatt sind und alle Integrale konvergieren.

Beispiel 1. Man betrachte die glatte Funktion $F : [1,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(t,x) := x^3 e^{-tx^2}$. Hier ist es möglich, $g(x) := \int_1^\infty F(t,x)\,dt$ und $\int_1^\infty \partial_x F(t,x)\,dt$ explizit zu berechnen, und man findet, das Letztere ist gleich $g'(x)$ für alle $x \neq 0$, aber nicht für $x = 0$ (s. Aufgabe 11.6).

Wir möchten also verstehen, was in Beispiel 1 bei $x = 0$ schief geht, und wie das im Allgemeinen vermieden werden kann, um die Formel (1) zu beweisen. Die Antwort hat mit dem Begriff gleichmäßiger Konvergenz zu tun.

Die Idee ist, die Funktionenfolgen

$$g_n(\mathbf{x}) := \int_a^n F(t,\mathbf{x})\,dt, \qquad \text{und} \qquad h_n(\mathbf{x}) := \int_a^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})\,dt$$

für $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß zu betrachten. Per Definition konvergiert g_n punktweise gegen g, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{U},$$

und analog konvergiert h_n punktweise gegen die Funktion $h : \mathcal{U} \to E$, definiert durch

$$h(\mathbf{x}) := \int_a^\infty \frac{\partial F}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})\,dt.$$

Ziel ist zu zeigen, dass g differenzierbar ist und stetige partielle Ableitungen $\partial_j g = h$ hat. Wegen des schon bewiesenen Satzes über parameterabhängige Riemann-Integrale auf kompakten Intervallen gilt

$$\partial_j g_n = h_n.$$

Jetzt sollte Ihnen das Problem bekannt vorkommen, denn wir haben es schon mal in dieser Vorlesung gesehen: wir haben eine konvergente Funktionenfolge g_n, deren Ableitungen $\partial_j g_n$ auch eine konvergente Funktionenfolge definieren, und wir möchten wissen, ob die Grenzfunktion der Ableitungen auch die Ableitung der Grenzfunktion von g_n ist. Wenn wir wirklich nur punktweise Konvergenz der Funktionenfolgen haben, dann lässt sich hier nicht viel mehr sagen. Aber wir hatten schon mal einen Satz zu diesem Thema bewiesen, zumindest für Funktionen *einer* Variablen: der Satz besagte, auf einem kompakten Intervall würde die gewünschte Eigenschaft stimmen, falls die Folge der Ableitungen *gleichmäßig* konvergiert. Da wir inzwischen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Werkzeugkiste haben, ist die Verallgemeinerung dieses Satzes für mehrere Variablen nicht schwierig zu beweisen, also machen wir das jetzt.

Lemma 1. *Es sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, E ein Banachraum, $f_n \in C^1(\mathcal{U}, E)$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen mit punktweise Konvergenz gegen eine Funktion $f : \mathcal{U} \to E$, sodass die Folge der Ableitungen $Df_n \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E))$ auf allen kompakten Teilmengen gleichmäßig gegen eine Funktion $G \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E))$ konvergiert. Dann ist f differenzierbar, und es gilt $Df = G$; insb. ist f in $C^1(\mathcal{U}; E)$.*

Beweis. Für einen gegebenen Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ betrachten wir nahe liegende Punkte $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathcal{U}$ mit $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ klein. Da jedes f_n von Klasse C^1 ist, können wir die Integralversion des Mittelwertsatzes anwenden und schreiben

$$f_n(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f_n(\mathbf{a}) + \int_0^1 Df_n(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\, dt. \tag{2}$$

Bei $n \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$, und $f_n(\mathbf{a})$ konvergiert gegen $f(\mathbf{a})$. Der Integrand auf der rechten Seite ist die Funktion $\varphi_n : [0, 1] \to E$ gegeben durch $\varphi_n(t) := Df_n(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\mathbf{h}$, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz von Df_n auf kompakten Teilmengen konvergiert auch φ_n gleichmäßig gegen

$$\varphi : [0, 1] \to E, \qquad \varphi(t) := G(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}.$$

Laut dem Satz aus der Vorlesung über die Vertauschbarkeit von Limes und Integral (Satz 7.11 im Baum-Skript) konvergiert dann auch die rechte Seite von (2), und folglich gilt

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \int_0^1 G(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\, dt. \tag{3}$$

Diese Formel genügt, um zu folgern, dass f im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ differenzierbar ist mit $Df(\mathbf{a}) = G(\mathbf{a})$. In der Vorlesung wurde ein etwas zweifelhaftes Argument dafür (durch Berechnen der partiellen Ableitungen $\partial_j f(\mathbf{a})$) gegeben, aber ein besseres Argument sieht wie folgt aus: wir schreiben (3) in der Form

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + G(\mathbf{a})\mathbf{h} + \left(\int_0^1 [G(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - G(\mathbf{a})]\, dt \right) \mathbf{h}$$

um. Wegen der Stetigkeit von G wird das Integral auf der rechten Seite beliebig klein wenn $\|\mathbf{h}\|$ klein ist, also bedeutet diese Formel eigentlich $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + G(\mathbf{a})\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$. □

Dieses Lemma ist zum parameterabhängigen uneigentlichen Integral direkt anwendbar, und wir fassen das Resultat so zusammen:

Korollar 1. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, E ein Banachraum, $a \in \mathbb{R}$ und $F : [a, \infty) \times \mathcal{U} \to E$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ und $j = 1, \dots, n$ die Funktionen $F(\cdot, \mathbf{x})$ und $\frac{\partial F}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})$ auf $[a, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Wenn für jedes $j = 1, \dots, n$ die Funktionenfolge*

$$h_n : \mathcal{U} \to E, \qquad h_n(\mathbf{x}) := \int_a^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt$$

auf allen kompakten Teilmengen von $\mathcal{U}$ *gleichmäßig konvergent ist, dann ist die Funktion* $g(\mathbf{x}) := \int_a^\infty F(t, \mathbf{x})\, dt$ *auf* $\mathcal{U}$ *stetig differenzierbar, und es gilt*

$$\partial_j g(\mathbf{x}) = \int_a^\infty \frac{\partial F}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\, dt$$

für jedes $j = 1, \ldots, n$. □

Die gleichmäige Konvergenz in Korollar 1 ist nicht immer gegeben, man muss sie im Allgemeinen extra nachprüfen. Das ist die Voraussetzung, die in Beispiel 1 fehlt. Aber in vielen wichtigen Beispielen klappt Korollar 1 wunderbar.

Beispiel 2. Wir berechnen jetzt das Gaußsche Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Durch Substitution lässt sich leicht zeigen, dass diese Formel äquivalent ist zu

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Wir sollten uns zuerst im Klaren sein, dass dieses Integral konvergiert. Auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ gibt es freilich kein Problem, weil $e^{-x^2/2}$ stetig und daher Riemann-integrierbar ist; für $x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$, also $0 < e^{-x^2/2} \leq e^{-x/2}$, und die Konvergenz von $\int_1^\infty e^{-x^2/2}\, dx$ folgt aus der Konvergenz von $\int_1^\infty e^{-x/2}\, dx = -2e^{-x/2}\big|_1^\infty = 2/\sqrt{e}$ wegen des Majorantenkriteriums (s. Seite 97 im Buch von Amman und Escher). Die Zahl $I \in \mathbb{R}$ ist also wohl definiert, und im Folgenden beweisen wir etwas indirekt, dass $I^2 = \pi/2$ gilt.

Anfangspunkt ist das parameterabhängige uneigentliche Integral

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt,$$

das wir für $x \geq 0$ betrachten. Im Fall $x = 0$ kann dies explizit berechnet werden, da wir eine Stammfunktion für $\frac{1}{1+t^2}$ kennen:[1]

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

In Übungsaufgabe 11.7 müssen die folgenden Eigenschaften bewiesen werden:

a) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$.

b) Die Funktionenfolge $G_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G_n(x) := \int_0^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = -x \int_0^n e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\, dt$$

konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$ gegen

$$G(x) := \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = -x \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\, dt.$$

[1] Wer die Stammfunktion von $\frac{1}{1+t^2}$ nicht auswendig gelernt hat, kann diese auch durch die trigonometrische Substitution $t = \tan\theta$ finden, wobei die Formel $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ äußerst nützlich ist.

Aus Korollar 1 folgt dann, dass F auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar ist, mit $F'(x) = G(x)$.[2] Wir können also auf kompakten Teilintervallen in $(0,\infty)$ den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für F anwenden:

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} &= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) \\
&= \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_1^b - \lim_{a\to 0^+} F(x)\Big|_a^1 = \lim_{b\to\infty}\int_1^b G(x)\,dx + \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 G(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty G(x)\,dx = -\int_0^\infty x\left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\,dt\right)dx \\
&= -\int_0^\infty xe^{-x^2/2}\left(\int_0^\infty e^{-(xt)^2/2}\,dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $u = xt$ wird das Integral in Klammern in der letzten Zeile

$$\int_0^\infty e^{-(xt)^2/2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,du = \frac{I}{x}$$

für alle $x > 0$, also folgt

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty xe^{-x^2/2}\frac{I}{x}\,dx = I\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = I^2.$$

[2] Ich weiß nicht, ob F in $x = 0$ differenzierbar ist; ich habe es nicht geschafft, das zu beweisen, aber dann ist mir aufgefallen, dass man es wegen $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$ nicht braucht.