Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck

Analysis II*

SoSe 2019

Probeklausur — Musterlösungen

Anmerkung: *Die echte Klausur wird so gestaltet, dass die Aufgaben innerhalb von 2 Stunden machbar sein sollten, aber bei dieser Probeklausur wurde nicht darauf geachtet, d.h. der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben soll mit einer echten Klausur vergleichbar sein, aber es gibt insgesamt mehr davon. Seien Sie also nicht besorgt, wenn Sie die Probeklausur in 2 Stunden nicht schaffen.*

Aufgabe 1 (2 + 3 + 2 + 2 Punkte)

a) Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Was ist der maximale Bereich, auf dem die Reihe konvergieren könnte? Wo ist f garantiert differenzierbar?

Die Reihe konvergiert (per Definition) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$ und divergiert für $|x| > \rho$. Die Punkte $x = -\rho, \rho$ müssen separat geprüft werden. Die Reihe ist differenzierbar für alle $|x| < \rho$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x+3)^n$ konvergiert.

Quotientenkriterium:

$$\mu := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{2}$$

Also $\rho = 2$, d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| < 2$. Weiter ist $g(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, aber $g(-5) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent ($g(-5) = -\ln 2$).

c) Auf welchem Bereich ist die Funktion g aus b) stetig?

Wie in Teilaufgabe a) ist g auf dem offenen Intervall $\{|x+3| < 2\} = (-5, -1)$ nicht nur stetig sondern auch differenzierbar. Da die Reihe bei $x = -5$ auch konvergiert, folgt vom Abelschen Grenzwertsatz, dass g auch in $x = -5$ rechtsseitig stetig ist, also ist g insgesamt auf dem Intervall $[-5, 1)$ stetig.

d) Auf welchem Bereich ist die Funktion g aus b) differenzierbar, und was ist $g'(x)$?

Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradius differenzierbar und die Ableitung kann durch gliedweises Differenzieren bestimmt werden. Also ist g auf der offenen Menge $\{|x+3| < 2\}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n \cdot 2^n}(x+3)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n \cdot 2^n}(x+3)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{2} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{x+3}{2})} = -\frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

(Als Antwort würde hier die Darstellung von $g'(x)$ als Potenzreihe für volle Punkte reichen, aber die Darstellung als rationale Funktion ist natürlich schöner.)

Aufgabe 2 (2 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Was bedeutet es, wenn f im Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ differenzierbar ist?

f ist in $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ differenzierbar falls eine lineare Abbildung L ($= Df(\mathbf{a})$) von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ existiert mit $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L\mathbf{h} = o(\|\mathbf{h}\|)$ für $\mathbf{h} \to 0$.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und die Hesse-Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := (3x + y)^2 + \sin(yz)$.

Partielle Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}
&f_x = 6(3x+y),\ f_y = 2(3x+y) + z\cos(yz),\ f_z = y\cos(yz)\\
&f_{xx} = 18,\ f_{xy} = 6,\ f_{xz} = 0\\
&f_{yy} = 2 - z^2\sin(yz),\ f_{yz} = \cos(yz) - yz\sin(yz)\\
&f_{zz} = -y^2\sin(yz).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
Df(x,y,z) &= \Big(6(3x+y), 2(3x+y) + z\cos(yz), y\cos(yz)\Big),\\
Hf(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0\\ 6 & 2 - z^2\sin(yz) & \cos(yz) - yz\sin(yz)\\ 0 & \cos(yz) - yz\sin(yz) & -y^2\sin(yz) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine n-mal-n Matrix und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, und bezeichne mit $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarproduct auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}\rangle$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie das Differential $Dg(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Mit der verallgemeinerten Produkt/Kettenregel für multilineare Abbildungen (und $\mu = \langle\cdot,\cdot\rangle$, $f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}\rangle = \mu\left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\right)\\
\implies Dg(\mathbf{x})\mathbf{h} &= \mu\left(Df_1(\mathbf{x})\mathbf{h}, f_2(\mathbf{x})\right) + \mu\left(f_1(\mathbf{x}), Df_2(\mathbf{x})\mathbf{h}\right)\\
&= \langle \mathbf{h}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{h}\rangle,
\end{aligned}$$

denn f_1 und f_2 sind linear bzw. affin und daher differenzierbar mit $Df_1(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{h}$ und $Df_2(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{h}$.

Alternativ kann man in Koordinaten rechnen und die partiellen Ableitungen bestimmen ($g(x) = \sum_i x_i(Ax+v)_i = \sum_i x_i(v_i + \sum_j A_{ij}x_j)$. Diese existieren überall und sind stetig, also ist g differenzierbar und das Differential ist gegeben durch die Jacobi-Matrix.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 4 Punkte)

a) Gegeben sei eine stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ein Punkt $q \in \mathbb{R}^m$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$. Unter welchen Bedingungen ist garantiert, dass $M_q := f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist? Was ist in diesem Fall die Dimension von M_q?

Die Funktion φ muss k-mal stetig differenzierbar sein und q muss ein regulärer Wert von φ sein, d.h. für alle $x \in M_q$ ist das Differential $D\varphi(x)$ surjektiv. Dann gilt $\dim M_q = n - m$. (Falls $n < m$ können diese Bedingungen nur im Fall $M_q = \emptyset$ erfüllt werden.)

b) Zeigen Sie, dass der Ellipsoid $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 8/15\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

Folgt aus Teil a) mit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + 3y^2 + 5z^3$, denn diese Abbildung ist glatt und $\frac{8}{15}$ ist regulärer Wert: Das Differential $D\varphi(x,y,z) = (2x, 6y, 15z)$ ist immer surjektiv, außer für den Punkt $(x,y,z) = (0,0,0)$, der nicht in E liegt.

c) Bestimmen Sie für die Einschränkung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2+y+z$ auf E die globalen Extrempunkte (d.h. Maximum und Minimum) auf E.

Langrange-Bedingung $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ ergibt die drei Gleichungen $2x = 2\lambda x, 1 = 6\lambda y, 1 = 10\lambda z$. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass entweder $\lambda = 1$ oder $x = 0$ gilt.

1. Lösung $\lambda = 1$:

$$y = \frac{1}{6},\ z = \frac{1}{10} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{15} - 3y^2 - 5z^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

2. Lösung $x = 0$:

$$y = \frac{1}{6\lambda},\ z = \frac{1}{10\lambda} \text{ und } \frac{8}{15} = 3y^2 + 5z^2 = \frac{3}{36\lambda^2} + \frac{5}{100\lambda^2} = \frac{2}{15\lambda^2}$$
$$\Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \text{ und somit } y = \pm\frac{1}{3},\ z = \pm\frac{1}{5}.$$

Berechnen der Funktionswerte an diesen Punkten liefert

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3},\ f\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15},\ f\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{15},$$

also hat f globales Minimum bei $(0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ und globales Maximum bei den beiden Punkten $(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10})$.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 4 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was bedeutet es, wenn f reell-analytisch ist?

Für jeden Punkt $x_0 \in I$ ist f in einer Umgebung U_0 in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. es existiert $\rho > 0$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für alle $x \in K_\rho(x_0) \cap U_0$. (Hier bezeichnet $K_\rho(x_0)$ die offene Kugel von Radius ρ um x_0.)

b) Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \sqrt{1+x}$. Zeigen Sie per Induktion, dass die n-te Ableitung von f für $x > 0$ die folgende Form hat:

$$f^{(n)}(x) = A_n (1+x)^{\frac{1}{2}-n}, \qquad \text{mit} \qquad A_n \in \mathbb{R},$$

wobei die Koeffizienten A_n eine Rekursion der Form $A_{n+1} = b_n A_n$ erfüllen. Geben Sie A_1 und alle $b_n \in \mathbb{R}$ explizit an.

I.A.: $f^{(0)}(x) = f(x) = 1(1+x)^{\frac{1}{2}}$ und $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Also $A_1 = \frac{1}{2}$.

I.S: $f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(A_n (1+x)^{\frac{1}{2}-n}\right)$ laut Induktionsvoraussetzung. Ausrechnen gibt $f^{(n+1)}(x) = A_n(\frac{1}{2} - n)(1+x)^{\frac{1}{2}-n-1}$.

Mit $b_n := (\frac{1}{2} - n)$ folgt $f^{(n+1)}(x) = A_{n+1}(1+x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$.

c) Geben Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an (dabei darf A_n verwendet werden), und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

$f^{(n)}(3) = A_n 4^{\frac{1}{2}-n} = 2A_n \frac{1}{4^n}$ und damit ist die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A_n}{4^n n!}(x-3)^n$.

Mit dem Quotientenkriterium folgt

$$\begin{aligned}\mu := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n n! A_{n+1}}{(n+1)!4^{n+1}A_n}\right| = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}-n}{n+1}\right| = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1-\frac{3}{2}}{n+1}\right| = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{3}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

so dass der Konvergenzradius von $T(f,3)(x)$ gleich 4 ist.

Aufgabe 5 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ eine 2-fach stetig differenzierbare Funktion und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein Punkt. Welche Form hat das zweite Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$? Verwenden Sie wenn möglich den Gradienten $\nabla f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ und die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Ihrer Antwort.

Allgemeine Form: $P_2(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{a})}{\partial x^\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\alpha$. Mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dem euklidischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ gibt das

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x}-\mathbf{a}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}-\mathbf{a}, Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\rangle.$$

b) Welche Relation zwischen f und dem ersten Taylorpolynom von f um $\mathbf{a}$ folgt aus dem Satz von Taylor? (Sie dürfen Ihre Lieblingsform für das Restglied frei auswählen.)

Die Differenz zwischen f und dem ersten Taylorpolynom $P_1(\mathbf{x})$ um $\mathbf{a}$ ist gegeben durch das Restglied in Integraldarstellung

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - P_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \int_0^1 (1-t)\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\mathbf{h}\rangle\, dt$$

für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a}+t\mathbf{h} \in \mathcal{U}$ für alle $t \in [0,1]$. Alternativ kann man unter den gleichen Voraussetzungen das Restglied in der Form

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - P_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}\rangle \quad \text{für ein } \theta \in (0,1) \tag{1}$$

schreiben.

c) Beweisen Sie: falls n gerade ist, f einen kritischen Punkt in $\mathbf{a}$ hat und die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a})$ eine negative Determinante hat, dann nimmt f weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum in $\mathbf{a}$ an.

Die Hesse-Matrix ist symmetrisch, also diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell. Die Determinante ist das Produkt dieser Eigenwerte und, falls n gerade, somit nur negativ, falls es mindestens einen positiven λ_+ und mindestens einen negativen Eigenwert λ_- gibt (mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_+$ und $\mathbf{v}_-$).

Mit $Df(\mathbf{a}) = 0$ folgt aus der Taylorformel (mit Integralrestglied)

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \int_0^1 (1-t)\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\mathbf{h}\rangle\, dt,$$

Für $\mathbf{h}$ *in Richtung* $\mathbf{v}_+$ *gilt* $\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}\rangle = \lambda_+\|\mathbf{h}\|^2 > 0$, *und wegen Stetigkeit bleibt dieses Produkt dann positiv, wenn* $Hf(\mathbf{a})$ *mit einer anderen Matrix hinreichend nahe an* $Hf(\mathbf{a})$ *ersetzt wird. Die Hesse-Matrix* $Hf(\mathbf{x})$ *hängt stetig von* $\mathbf{x}$ *ab, da* f *in* $C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, *also gilt auch* $\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\rangle > 0$ *für alle* $t \in [0, 1]$, *falls* $\mathbf{h}$ *hinreichend klein ist. In diesem Fall muss das Integralrestglied positiv sein, also gilt* $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) > f(\mathbf{a})$. *Analog zeigt man: für* $\mathbf{h}$ *hinreichend klein und in Richtung* $\mathbf{v}_-$ *ist das Integralrestglied negativ, also gilt* $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) < f(\mathbf{a})$.

Im obigen Argument hätte man anstelle des Integralrestglieds die Formel (1) *verwenden können, denn das gleiche Argument zeigt, dass* $\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}\rangle$ *positiv bzw. negativ ist.*

Hier eine weitere Variante: als Korollar des Integralrestglieds wurde im Skript zur Vorlesung am 25.06. (aber nicht in der Vorlesung selbst) die Relation

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}\rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

bewiesen. Das heißt konkret, es gibt eine Funktion $R(\mathbf{h})$ *mit* $\lim_{\mathbf{h}\to 0} R(\mathbf{h}) = 0$ *und*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}\langle \mathbf{h}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}\rangle + \|\mathbf{h}\|^2 R(\mathbf{h}).$$

Für $\mathbf{h}$ *in Richtung* $\mathbf{v}_+$ *bzw.* $\mathbf{v}_-$ *wird das*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2}\lambda_\pm + R(\mathbf{h})\right),$$

und für $\mathbf{h}$ *hinreichend klein ist* $\frac{1}{2}\lambda_\pm + R(\mathbf{h})$ *positiv bzw. negative, also gilt* $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) > f(\mathbf{a})$ *bzw.* $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) < f(\mathbf{a})$.

Aufgabe 6 (2 + 3 + 2 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Definieren Sie, was es heißt, dass f Riemann-integrierbar ist.

   Sei $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ *eine Zerlegung von* $[a, b]$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ *das* k*-te Teilintervall von* $\mathcal{P}$ *und sei* $\xi = \{(\xi_1, ..., \xi_n) \mid \xi_k \in I_k\}$ *eine Menge von Stützstellen zu* $\mathcal{P}$. *Die Riemann-Summe von* f *über* $[a, b]$ *zu* $\mathcal{P}$ *und* ξ *ist*

   $$S(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot f(\xi_k).$$

   f *ist Riemann-integrierbar über* $[a, b]$ *mit Integral* $A \in \mathbb{R}^m$, *falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Zerlegung* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *existiert, sodass* $\forall\, \mathcal{P}{\geq}\mathcal{P}_\varepsilon\ \forall\, \xi\ :\ \big\|S(f, \mathcal{P}, \xi) - A\big\| < \varepsilon$.

b) Beweisen Sie: Hat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ den Wert $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele Punkte $x \in [a, b]$, dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

   Seien $p_1 < ... < p_n \in [a, b]$ *die endlich vielen Punkte, sodass* $f(p_j) \neq 0$. *Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig und sei* $M := \max \|f(p_j)\| > 0$. *Betrachte die Zerlegung*

   $$\mathcal{P}_\varepsilon = \Big\{a = x_0 < ... < x_{2j-1} = p_j - \frac{\varepsilon}{2nM} < x_{2j} = p_j + \frac{\varepsilon}{2nM} < ... < x_{2n+1} = b\Big\}.$$

   Falls $p_1 = a$, *so entfällt* x_0 *und* $x_1 = a$ *und falls* $p_n = b$, *so entfällt* x_{2n+1} *und* $x_{2n} = b$. *In anderen Worten:* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *ist eine Zerlegung, in der jedes Teilintervall, das einen der*

Punkte $p_1, \dots, p_n$ enthält, Länge höchstens ε/nM hat. Dann gilt für alle Stützstellen ξ zu $\mathcal{P}_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\big\|S(f,\mathcal{P}_\varepsilon,\xi)-0\big\| &\leq \sum_{k=1}^{2n+1}(x_k-x_{k-1})\cdot\|f(\xi_k)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\Big(p_k+\frac{\varepsilon}{2nM}-\Big(p_k-\frac{\varepsilon}{2nM}\Big)\Big)\cdot M \\ &\qquad\qquad\text{(da } f\equiv 0 \text{ in den anderen Intervallen } I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = n\cdot\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ist nun $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_\varepsilon$ eine feinere Zerlegung, so werden die Teilintervalle in denen die p_j liegen höchstens kleiner, sodass nach der selben Abschätzung wie für $\mathcal{P}_\varepsilon$ gilt $\|S(f,\mathcal{P},\xi)-0\| \leq \varepsilon$, also ist f Riemann-integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

c) Gegeben eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung über f?

Der Hauptsatz besagt:

i) Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$.[1]

ii) Ist f in einem Punkt $x \in [a,b]$ stetig, so ist F in x differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

d) Berechnen Sie mit Substitution und partieller Integration $\displaystyle\int \sin\big(\sqrt{x}+1\big)\,dx$.

Wir substituieren $x = (t-1)^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}+1$ mit $dx = 2(t-1)\,dt$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int \sin(\sqrt{x}+1)\,dx &= \int \sin\Big(\sqrt{(t-1)^2}+1\Big)\,2(t-1)\,dt = \int 2(t-1)\sin t\,dt \\ &\overset{part.Int}{=} 2(t-1)(-\cos t) - \int 2(-\cos t)\,dt = -2(t-1)\cos t + 2\sin t + C \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}+1) + 2\sin(\sqrt{x}+1) + C.\end{aligned}$$

e) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) := \displaystyle\int_0^x \cos\Big(\sqrt{t}+x\Big)\,dt$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(1)$.

Betrachte die Funktion $h : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t,x) = \cos(\sqrt{t}+x)$. Da $(t,x) \mapsto \sqrt{t}$, $(t,x) \mapsto x$ und $\cos$ alle stetig sind, ist h als Summe und Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Außerdem ist h offensichtlich nach x differenzierbar. Damit ist nach dem Satz über parameterabhängige Integrale die Funktion $H : [0,\infty)\times\mathbb{R}, H(b,x) = \int_0^b \cos(\sqrt{t}+x)\,dt$ nach x differenzierbar. Nach dem Hauptsatz ist H nach b differenzierbar. Also ist auch $f(x) = H(x,x)$ differenzierbar und wegen der Kettenregel

[1] Hier könnte eine Antwort, die die Lipschitz-Konstante nicht erwähnt, trotzdem noch volle Punkte bekommen.

gilt

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{\partial H}{\partial b}(1,1) + \frac{\partial H}{\partial x}(1,1) = \cos(\sqrt{b}+x)\Big|_{b=x=1} - \int_0^b \sin(\sqrt{t}+x)\,dt\Big|_{b=x=1} \\
&= \cos 2 - \int_0^1 \sin(\sqrt{t}+1)\,dt \overset{d)}{=} \cos 2 - 2\left[\sin(\sqrt{t}+1) - \sqrt{t}\cos(\sqrt{t}+1)\right]\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \cos 2 - 2(\sin 2 - \cos 2) + 2(\sin 1 - 0\cdot\cos 1) = 3\cos 2 - 2(\sin 2 - \sin 1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (2 + 4 + 2 + 3)

a) Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $-\infty \le a < b \le \infty$. Definieren Sie, was es heißt, dass eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

f heißt uneigentlich Riemann-integrierbar mit Integral $A \in \mathbb{R}^m$, falls f auf jedem kompakten Intervall $[a',b'] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar ist und für ein $c \in (a,b)$ gilt:

$$A = \lim_{a'\searrow a} \int_{a'}^{c} f(t)\,dt + \lim_{b'\nearrow b} \int_{c}^{b'} f(t)\,dt.$$

b) Bestimmen Sie, ob die uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ konvergieren.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ konvergiert nicht, da $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \ge \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-1}}{t}\,dt = \frac{\ln 1 - \ln\varepsilon}{e} = -\frac{\ln\varepsilon}{e}$, da $\frac{e^{-t}}{t} \ge \frac{e^{-1}}{t}$ für $t \le 1$. Damit folgt $\displaystyle\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \ge \lim_{\varepsilon\searrow 0} -\frac{\ln\varepsilon}{e} = +\infty$. Das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ konvergiert hingegen. Denn $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ ist streng monoton wachsend ist, da der Integrand positiv ist, und $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \le \int_1^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} - e^{-x} < \frac{1}{e}$. D.h. $f(x)$ ist streng monoton wachsend und beschränkt, also existiert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

c) Was heißt es, dass ein uneigentliches Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergiert?

Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert absolut, falls das uneigentliche Integral $\int_a^b \|f(x)\|\,dx$ konvergiert.

d) Finden Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, sodass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. (Hier sollten Sie es plausibel machen, dass das Integral nicht absolut konvergiert, müssen es aber nicht komplett beweisen.)

Betrachte die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin x}{n+1}$ für $x \in [n\pi,(n+1)\pi], n \in \mathbb{N}$. Wegen $\frac{\sin(n\pi)}{n} = 0 = \frac{\sin(n\pi)}{n+1}$ ist f wohldefiniert und stetig (für $x \notin \mathbb{N}\pi$ ist die Stetigkeit von f offensichtlich). Nun gilt für $x \in [n\pi,(n+1)\pi]$

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{k}\,dt + \int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{n+1}\,dt \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{-\cos t}{k}\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \frac{-\cos t}{n+1}\Big|_{n\pi}^{x} = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} + \frac{-\cos x + (-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Die alternierende Summe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium und der Rest konvergiert für $n \to 0$ gegen 0. Also konvergiert $\int_0^\infty f(t)\,dt$. Für $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ gilt aber

$$\int_0^x |f(t)|\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\right| + \left|\frac{-\cos x + (-1)^{n+1}}{n+1}\right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Also konvergiert $\int_0^\infty f(t)\,dt$ nicht absolut.

Bemerkung: Ein gutes Beispiel ist auch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dafür ist jedoch ein kompletter Beweis schwieriger, da die auftretenden Integrale nicht explizit berechenbar sind. Konvergenz folgt durch partielle Integration, denn

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= -\int_1^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^\infty + \int_1^\infty \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)\cos x\,dx \\ &= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx,\end{aligned}$$

und das letzte Integral konvergiert absolut wegen des Majorantenkriteriums, weil $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergiert. Bei $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ gibt es hingegen kein Problem, denn $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, also lässt sich $\frac{\sin x}{x}$ als stetige Funktion auf $[0,1]$ fortsetzen und ist deswegen Riemann-integrierbar. Folglich konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Dass die Konvergenz nicht absolut ist, kann wie folgt bewiesen werden. Im Intervall $[\pi/6, 5\pi/6]$ gilt $\sin x \geq 1/2$. Das gleiche gilt im Intervall $[\pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und dazu $x \leq (2n+1)\pi$, also gilt

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{4\pi}\frac{1}{n+1} \qquad \text{für } x \in [\pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n].$$

Da der Integrand $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ nie negative ist, folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi n}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) - \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)\right] \frac{1}{4\pi}\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2\pi}{3}\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.\end{aligned}$$