Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

Lehrpersonen: Prof. Chris Wendl (Vorlesung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
`wendl@math.hu-berlin.de`
Sprechstunde: Dienstags 10:30–11:30

Dominik Gutwein (Übung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.312
`gutweind@math.hu-berlin.de`

Dr. Felix Schmäschke (Übung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.303
`schmascf@math.hu-berlin.de`

Website: `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2023/Topologie1/`

Moodle: `https://moodle.hu-berlin.de/course/view.php?id=120270`
Einschreibeschlüssel: `fundamental`
Der Moodle-Kurs wird hauptsächlich für Kommunikationszwecke benutzt: Sie müssen sich einschreiben, um gelegentlich wichtige Ankündigungen per E-Mail zu bekommen. Sie können auch das Forum im Moodle-Kurs für Diskussionen und Fragen rund um Übungsaufgaben benutzen. Wesentliche Materialien wie das Vorlesungsskript werden nicht im Moodle-Kurs sondern auf der Website bereitgestellt.

Vorlesung: Dienstags 13:15–14:45 in 1-0311 (ESZ, Rudower Chaussee 26)
Donnerstags 15:15–16:45 in 1-1304 (ESZ, Rudower Chaussee 26)

Übungen: Gruppe 1 (Gutwein, auf Englisch): Do. 11:15–12:45 in 1-1304 (ESZ, Rud26)
Gruppe 2 (Schmäschke, auf Deutsch): Do. 11:15–12:45 in 3.007 (JvNH, Rud25)

Sprache: Die Vorlesung und die Übung von Dominik Gutwein werden auf Englisch gehalten, und die Übung von Felix Schmäschke auf Deutsch.

Voraussetzungen: Der Kurs basiert auf den HU-Vorlesungen *Analysis I* und *II*, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I* und *II*, sowie auf dem algebraischen Teil der Vorlesung *Algebra und Funktionentheorie*.

Die Studierenden sollten mit metrischen Räumen, in der Version wie sie im ersten Jahr eingeführt wurden, und mit den grundlegenden Eigenschaften von Gruppen, Ringen und Körpern vertraut sein.

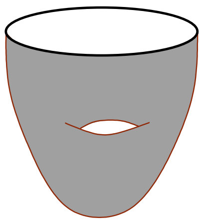
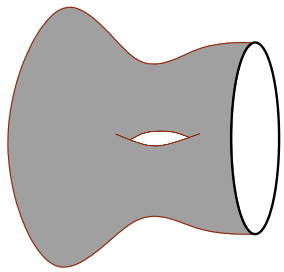
Kurze Beschreibung

Der Kurs ist eine Einführung in die Topologie mit Hauptaugenmerk auf geometrischen Anwendungen. Zum ersten und zweiten Abschnitt gehören insbesondere die Begriffe: metrische und topologische Räume, Trennungsaxiome, Kompaktheit, zusammenhängende Räume, Fundamentalgruppen, Homotopieinvarianz, der

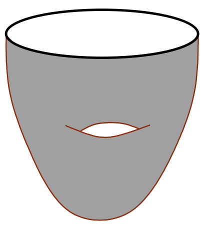
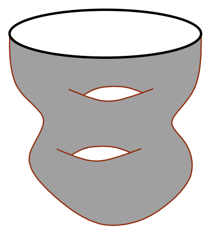
Satz von Seifert-van-Kampen, und Überlagerungen. Der dritte Teil ist eine Einleitung in Homologietheorie. Wir werden dabei Simplizialkomplexe, singuläre Homologie, lange exakte Sequenzen, einfache Berrechnungen von Beispielen und den Brouwerschen Fixpunktsatz behandeln.

Ausführliche Beschreibung

Die Topologie bildet den natürlichen Rahmen für das Studium stetiger Abbildungen. Grundlegend sind dabei stetige Abbildungen mit stetigen Inversen (sog. Homöomorphismen) und man untersucht Eigenschaften, die durch solche Abbildungen erhalten bleiben. Mit anderen Worten, die Topologie betrachtet diese beiden Objekte als äquivalent:

aber diese als nicht äquivalent:

Ein wesentlicher Bestandteil der Topologie ist nun Methoden zu entwickeln, um zu beweisen, dass zwei Objekte nicht äquivalent sind.

Am Anfang des Kurses führen wir topologische Räume durch Axiome ein und erklären, wie man sie als Verallgemeinerung metrischer Räume verstehen kann. Wir werden zunächst die bekannten Begriffe der kompakten und zusammenhängenden Räume wiederentdecken, aber dann bald mit den Abzählbarkeits- und Trennungsaxiomen (e.g. Hausdorffeigenschaft) in weniger vertraute Gefilde eintauchen. Dieser Abschnitt ist auch unter dem Namen „allgemeine Topologie“ oder „mengentheoretische Topologie“ bekannt. Auf diesem relativ abstrakten Niveau werden wir einige interessante pathogolosche Beispiele kennenlernen. Solche Phänomene sind zwar in der Geometrie kaum anzutreffen, werden aber im späteren Studium, etwa bei der unendlich dimensionalen Analysis, wieder auftauchen und es ist wichtig, sie im Hinterkopf zu behalten.

Nach diesem anfänglichen Flirt mit der furchteinflößenden Allgemeinheit werden wir uns für den Rest des Kurses auf solche topologischen Räume konzentrieren, die von geometrischer Natur sind, und uns dabei auf immer verschiedene Art und Weise die gleiche Frage stellen und beantworten: „Wie viele Löcher hat dieser Raum?“ Die erste Interpretation dieser Fragestellung ist durch die *Fundamentalgruppe* gegeben. Das ist ein algebraisches Objekt, das jedem topologischen Raum zugeordnet werden kann. Die Fundamentalgruppe misst, ob oder ob nicht geschlossene Wege in diesem Raum zusammenziehbar sind, oder anders gesagt, durch eine Kreisscheibe zu füllen sind. Ein verwandter wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist die *Homotopie*, d.h. eine kontinuierliche Deformation einer stetigen Abbildung. Wir werden beweisen, dass die Fundamentalgruppe nicht nur invariant unter Homöomorphismen bleibt, sondern auch unter einer weitaus flexibleren Klasse von Abbildungen, der sogenannten Homotopieäquivalenzen. Im Anschluss stellen wir zwei wichtige Hilfsmittel zur Berrechnung der Fundamentalgruppe vor: den Satz von Seifert-van-Kampen und die

Überlagerungsräume. Durch beide werden wir einen Einblick in das sehr tiefgreifende Zusammenspiel von Topologie und Gruppentheorie erhalten.

Der letzte Teil des Kurses bildet eine Einführung in das große Thema der Homologie. Dabei geht es, vereinfacht gesagt, um eine weitere Art Löcher (verschiedener Dimension) in topologischen Räumen zu zählen. Nach einer kurzen Motivation des Themas anhand von der Bordismustheorie und Simplizialkomplexen werden wir singuläre Homologiegruppen definieren. Wir werden sehen, dass es zu jeder stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen einen Homomorphismus zwischen den zugeordneten Homologiegruppen gibt. Zusammen mit den notwendigen Vorraussetzungen aus dem Gebiet der homologischen Algebra, und zwar Kettenkomplexe, exakte Sequenzen und „Diagrammjagden", berechnen wir die singuläre Homologie für einfache Beispiele, etwa für Sphären. Dies liefert uns dann die Grundlage für einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Wenn es die Zeit noch zulässt, werden wir uns in der letzten Woche den Zell- bzw. CW-Komplexen zuwenden. Diese liefern auch eine Homologietheorie, nämlich die zelluläre Homologie, welche für Berrechnungen ein weitaus leistungsstärkeres Hilfsmittel darstellt.

Programm

Der Kurs ist in drei Teile untergliedert:

I. **Allgemeine Topologie** (Wochen 1–4)

II. **Die Fundamentalgruppe** (Wochen 4–9)

III. **Homologie** (Wochen 10–14)

Der folgende Wochenplan ist vorläufig und Änderungen vorbehalten.

1. Allgemeine Einleitung und Motivation, metrische Räume, Stetigkeit und Folgenstetigkeit.
2. Axiome für topologische Räume, Basen und Subbasen, Standardbeispiele und Konstruktionen (Unterräume, Produkte, disjunkte Vereinigungen), Abzählbarkeitsaxiome, Netze und Konvergenz.
3. Kompaktheit und Folgenkompaktheit, Trennungsaxiome, der Satz von Tychonoff.
4. Zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume, die Quotiententopologie, Pfade und Homotopie, die Fundamentalgruppe.
5. Einfach zusammenhängende Räume, Retraktion und Deformationsretraktion, Homotopieäquivalenz.
6. Kegel und Einhängung, Präsentation einer Gruppe, Aussage des Satzes von Seifert-van Kampen.
7. Anwendungen und Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.
8. Überlagerungsräume, Hochhebungssatz, Decktransformationen.
9. Die Galoiskorrespondenz, die universelle Überlagerung, topologische Gruppen und Gruppenwirkungen.
10. Topologische Mannigfaltigkeiten, zusammenhängende Summe, Triangulierungen, Skizze der Klassifikation geschlossener Flächen.
11. Bordismusgruppen, Simplizialkomplexe und simpliziale Homologie, homologische Algebra.
12. Singuläre Homologie, Unterteilung und Homotopieinvarianz, kurze und lange exakte Sequenzen.
13. Der Ausschneidungssatz, Homologie der Sphären, der Fixpunktsatz von Brouwer.
14. Falls es die Zeit zulässt: Einleitung in die zelluläre Homologie.

Literatur

Ein Vorlesungsskript (auf Englisch) zu diesem Kurs wird auf der Website bereitgestellt und laufend aktualisiert.[1]

Fast alle Themen im ersten Abschnitt des Kurses (mit Ausnahme von Netzen und Konvergenz) werden im Buch von Jänich gut behandelt, das übrigens amüsant geschrieben ist, und vorhanden sowohl in englischer Übersetzung als auch im (mehrfach überarbeiteten) deutschen Original:

- Jänich, *Topologie*, 8. Auflage, Springer 2005
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)
- Jänich, *Topology*, translated from the German by Silvio Levy, Springer 1984
  (verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Freihandbestand)

Ab der vierten Woche bis zum Fortsetzungskurs im nächsten Semester liegt der Schwerpunkt auf *algebraische* Topologie. Eins der beliebsten Lehrbücher dafür ist:

- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002
  (auch kostenlos von der Seite des Autors herunterzuladen unter:
  `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`)

Ich möchte Ihnen auch sehr die folgenden Bücher zur algebraischen Topologie ans Herz legen, auch für den Stoff, den wir nächstes Semester in Topologie II behandeln werden:

- Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Springer GTM 1993
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- James W. Vick, *Homology Theory*, Springer GTM 1994
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie - Eine Einführung*, Teubner 1994
  (verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Freihandbestand)

Bedauerlicherweise gibt es nicht genug Zeit im Semester für eine Behandlung der *Differentialtopologie*, trotzdem möchte ich gern zwei Bücher zu diesem Thema empfehlen. Vor allem das Erste ist ein echter Klassiker (und auch kurz!):

- John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press 1997
- Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer GTM 1976
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)

Das folgende Buch ist eine Standardreferenz für die gründliche Behandlung von *Allgemeiner Topologie*, also der Teil des Gebiets, welcher sich mit der uneingeschränkten Klasse von topologischen Räumen beschäftigt und weniger mit den algebraischen Invarianten oder Anwendungen für die Geometrie. (Hier verwende ich das Wort „Referenz“ im Sinne: „Ich würde niemandem dies als ein Lehrbuch empfehlen, aber ich fühle mich sicherer, es im Bücherschrank zu haben.“)

- John L. Kelley, *General Topology*, Springer GTM 1975

[1] Eine ältere Version des vollständigen Skripts von einer 2018 durchgeführten Vorlesung ist noch unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2018/Topologie2/lecturenotes.pdf` verfügbar.

Klausur und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine dreistündige **schriftliche Klausur (open-book)** kurz nach Semesterende (mit Nachholtermin kurz vor Beginn des nächsten Semesters) bestimmt. Bücher und Notizen dürfen in der Klausur benutzt werden, aber nichts Elektronisches.

Übungsblätter werden wöchentlich Donnerstags ausgehändigt mit Abgabetermin vor der Übung am folgenden Donnerstag (Lösungen werden in der Übung besprochen).

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte "**take-home midterm**". Diese hat die Form eines Übungsblatts, das innerhalb von zwei Wochen erarbeitet und eingereicht wird.

Bei allen Hausaufgaben (inkl. take-home midterm) ist zu beachten: Sie dürfen die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen besprechen, müssen aber die Lösungen **allein (ohne Hilfe) aufschreiben**.

Je nach erreichter Gesamtpunktzahl bei den Hausaufgaben und beim Midterm kann die Klausurnote verbessert werden:

- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **oder** Midterm $\geq 75\%$ = ($2{,}0 \to 1{,}7$ oder $1{,}7 \to 1{,}3$ usw.)
- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **und** Midterm $\geq 75\%$ = ($2{,}3 \to 1{,}7$ oder $2{,}0 \to 1{,}3$ usw.)

Vorschau: Topologie II (Winter 2023–2024) und weiter

Laut Studienordnung gehört Topologie I offiziell zum Bachelor und Topologie II zum Master, aber die beiden Vorlesungen sind trotzdem als Einheit konzipiert, und ich möchte jeder Bachelorstudentin bzw. jedem Bachelorstudenten, die/der sich für das Thema begeistert, herzlich empfehlen, sich auch für die Fortsetzung im folgenden Semester einzuschreiben. Wir werden folgende Themen behandeln: Kategorien und Funktoren, Mayer-Vietoris und weitere exakte Sequenzen, Homologie mit Koeffizienten, Kohomologie, die Axiome von Eilenberg-Steenrod, Alternativen zur singulären (Ko-)Homologie (die Theorien von Čech und Alexander-Spanier), direkte und inverse Limes, Ausrechnung zellulärer (Ko-)Homologie durch die Axiome, universelles Koeffiziententheorem, der Fixpunktsatz von Lefschetz, die Künnethformel, Kreuz- und Cup-Produkte, Fundamentalklassen und Poincaré Dualität, Schnitttheorie, Einleitung in die höheren Homotopiegruppen.

Provisorisch plane ich auch eine Vorlesung "Topologie III" im Sommersemester 2024 anzubieten, die weitere Details der Homotopietheorie behandeln soll, sowie Obstruktionstheorie, charakteristische Klassen, und Bordismusgruppen.