Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 10

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, U ein K-Untervektorraum von V und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $f(U) \subset U$. Zeigen Sie:

(i) Die Definition $\overline{f}(v+U) := f(v) + U$ ist sinnvoll, definiert also eine Abbildung $\overline{f} : V/U \to V/U$. Zeigen Sie ferner, dass $\overline{f}$ eine K-lineare Abbildung ist.

(ii) Seien $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U und $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ eine Basis von V/U. Zeigen Sie: wählt man beliebige Elemente $v_i \in V$ mit $\overline{v}_i = v_i + U$ für $1 \le i \le n$, so ist $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

(iii) Sei $f' = f|_U : U \to U$ die durch Einschränkung von f nach U erhaltene K-lineare Abbildung. Seien $A_f \in \mathrm{Mat}_{m+n,m+n}(K)$ beziehungsweise $A_{f'} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ beziehungsweise $A_{\overline{f}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ die darstellenden Matrizen der Abbildungen f beziehungsweise f' beziehungsweise $\overline{f}$ bezüglich der Basen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ beziehungsweise $u_1, \ldots, u_m$ beziehungsweise $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ (die wir jeweils sowohl als Basis des Quellraums wie des Zielraums zugrunde legen). Zeigen Sie: es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ derart, dass $A_f = \begin{pmatrix} A_{f'} & B \\ 0 & A_{\overline{f}} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Zeigen Sie:

(i) Für jeden K-Untervektorraum U von V und jedes Element $\ell \in U^{\perp}$ wird durch $\varphi(\ell)(v+U) := \ell(v)$ ein Element $\varphi(\ell) \in (V/U)^*$ definiert (das heisst: diese Definition ist sinnvoll). Die so gegebene Abbildung $\varphi : U^{\perp} \to (V/U)^*$ ist ein K-linearer Isomorphisms.

(ii) Sei L ein K-Untervektorraum von V^*. Zu $\ell \in V^*$ sei $\ell|_{^{\perp}L} : {}^{\perp}L \to K$ die durch Einschränkung von $\ell : V \to K$ nach ${}^{\perp}L$ erhaltene Abbildung. Die Zuordnung $\ell \mapsto \ell|_{^{\perp}L}$ ist eine K-lineare Abbildung $V^* \to ({}^{\perp}L)^*$, deren Kern L ist. Die folglich induzierte Abbildung $V^*/L \to ({}^{\perp}L)^*$ ist ein K-linearer Isomorphisms.

Aufgabe 3: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\nu : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ heisst eine *Seminorm*, falls

(i) $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und

(ii) $\nu(v+w) \le \nu(v) + \nu(w)$ für alle $v, w \in V$.

Zeigen Sie: Ist ν eine Seminorm auf V, so ist $N := \{v \in V \mid \nu(v) = 0\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Die Definition $\overline{\nu}(v+N) := \nu(v)$ für $v + N \in V/N$ ist sinnvoll, definiert also eine Abbildung $\overline{\nu} : V/N \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Diese Abbildung ist eine *Norm*, also eine Seminorm, die zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

(iii) Für $\overline{v} \in V/N$ gilt $\overline{\nu}(\overline{v}) = 0$ genau dann, wenn $\overline{v} = 0$.

Aufgabe 4: (i) Betrachten Sie die beiden Permutationen

$$\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Länge und das Signum von π_1 und π_2. Stellen Sie π_1 und π_2 als Produkt von Transpositionen dar.

(ii) Zeigen Sie: für alle $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ gilt $\ell(\pi_1\pi_2) \leq \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2)$. [Hinweis: zu $\pi \in S_n$ sei $L(\pi) := \{(i,j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$. Überlegen Sie: für alle $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ gilt $L(\pi_1\pi_2) \subset L(\pi_2) \cup \{(i,j) \,|\, (\pi_2(i), \pi_2(j)) \in L(\pi_1)\}$.]

Ist $n \geq 2$ so belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\ell(\pi_1\pi_2) = \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2)$ im allgemeinen nicht gilt (das heisst: geben Sie $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ mit $\ell(\pi_1\pi_2) < \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2)$ an.)

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte) [Drehung] Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ setze

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

sei $\ell_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugeordnete $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(i) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\ell_D(x) = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$?

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\ell_D^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$?

(iii) Veranschaulichen Sie die Abbildung $\ell_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.