Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 11

AUFGABE 1: Für einen Körper K bezeichnen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad z \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Elemente in K^3. Welche der folgenden Abbildungen $\mu : K^3 \times K^3 \times K^3 \to K$ sind K-multilinear, welche sind K-multilinear und alternierend ?

(i) $\mu(x, y, z) := y_2$

(ii) $\mu(x, y, z) := x_1y_2z_3 - x_1x_2y_3$

(iii) $\mu(x, y, z) := x_3y_1z_2$

(iv) $\mu(x, y, z) := x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$

AUFGABE 2: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Zeigen Sie: Durch

$$b_A(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

wird eine Bilinearform $b_A : K^n \times K^n \to K$ definiert. Gilt $1 + 1 \neq 0$ in K so werden durch

$$b_A^+(x, y) := \frac{1}{2}(b_A(x, y) + b_A(y, x))$$

beziehungsweise durch

$$b_A^-(x, y) := \frac{1}{2}(b_A(x, y) - b_A(y, x))$$

Bilinearformen $b_A^+ : K^n \times K^n \to K$ und $b_A^- : K^n \times K^n \to K$ definiert. b_A^- ist alternierend, und b_A^+ ist *symmetrisch*, das heisst es gilt $b_A^+(x, y) = b_A^+(y, x)$ für alle $x, y \in K^n$. Ferner gilt $b_A = b_A^+ + b_A^-$.

AUFGABE 3: Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zu $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ ist die *Spur* von A definiert als die Summe der Diagonalelemente:

$$\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Zeigen Sie:

(a) Spur : $\mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K$ ist eine Linearform auf dem K-Vektorraum $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ (die K-Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ wurde in Paragraph 10 der Vorlesung erklärt). Für beliebige $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und reguläre $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ und $\mathrm{Spur}(X^{-1}AX) = \mathrm{Spur}(A)$.

(b) Für jede Linearform $\ell : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K$ existiert ein $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ mit $\ell(A) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Ist $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ und gilt $\mathrm{Spur}(BA) = 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, so folgt $B = 0$.

Hinweis: Zur Lösung der folgenden Aufgaben 4 (b) und 5 dürfen Sie selbstverständlich Ergebnisse dieses Blattes und auch Ergebnisse vorangehender Blätter verwenden.

Aufgabe 4: Wir betrachten 2×2-Matrizen über einem Körper K.

(a) Bestimmen Sie Abbildungen $\alpha : \mathrm{Mat}_{2,2}(K) \to K$ und $\beta : \mathrm{Mat}_{2,2}(K) \to K$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$A^2 + \alpha(A)A + \beta(A)I_2 = 0 \quad \text{(die Nullmatrix in } \mathrm{Mat}_{2,2}(K))$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(K)$.

[Bemerkung: Insbesondere zeigen Sie hiermit:

(i) für jedes $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(K)$ existiert ein normiertes Polynom f_A vom Grad 2 mit Koeffizienten in K, so dass $f_A(A) = 0$, und

(ii) Ist $\beta(A) \neq 0$, so ist A^{-1} regulär, und es gilt die Formel $A^{-1} = -\beta(A)^{-1}(\alpha(A)I_2 + A)$.]

(b) Für alle $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{2,2}(K)$ gilt

$$ABABC - AB^2AC - BA^2BC + BABAC = CABAB - CAB^2A - CBA^2B + CBABA.$$

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ist $\ell : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K$ eine Linearform mit $\ell(AB) = \ell(BA)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $\ell(A) = \lambda \mathrm{Spur}(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. (Insbesondere gibt es also bis auf skalare Vielfache nur eine Linearform $\ell : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to K$ mit $\ell(AB) = \ell(BA)$ für alle A, B.)