Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie I***
Übungsaufgaben, Blatt 12

Aufgabe 1: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(K)$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(a) mit Hilfe des Gausschen Algorithmus, und

(b) mit Hilfe der Cramerschen Regel, und

(c) indem Sie zeigen, dass $A$ regulär ist, $A^{-1}$ bestimmen und damit $A^{-1}b = x$ berechnen.

Aufgabe 2: (a) Berechnen Sie $\det(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $K$ ein Körper und sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ definiert durch $a_{ij} = 1$ falls $i \neq j$, und $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 0$. Zeigen Sie $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

(c) Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

(d) Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

(e) Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

Aufgabe 4: Sei $K$ ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ eine schiefsymmetrische Matrix, das heisst es gelte $A^t = -A$. Zeigen Sie: ist $n$ ungerade, so ist $\det(A) = 0$.

Aufgabe 5: Seien $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ und $(x_3, y_3)$ drei Eckpunkte eines Parallelogramms $P$ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: der Flächeninhalt von $P$ ist gleich dem Betrag von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Sei $K$ ein Körper, seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Punkte des $K^2$ und sei $L \subset K^2$ die Gerade durch $v$ und $w$. Dann gilt

$$L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \}.$$