Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 2

AUFGABE 1: Gegeben seien Mengen X, Y und Z sowie Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie:
(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(e) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.
Es sei $g \circ f$ bijektiv. Folgt dann, dass f surjektiv ist ? Oder dass g injektiv ist ? Oder folgt: (f ist surjektiv oder g ist injektiv) ? Beweisen Sie oder geben Sie geeignete Gegenbeispiele an !

AUFGABE 2: Sei M eine Menge, dazu $S(M)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von M in sich. Zeigen Sie, dass $S(M)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass $S(M)$ nicht abelsch ist, falls M mindestens drei Elemente enthält.

Weshalb ist die Menge *aller* Abbildungen $M \to M$ keine Gruppe bezüglich der Komposition, falls M mindestens zwei Elemente besitzt ?

AUFGABE 3: Sei $(G, \bullet)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für eine nichtleere Teilmenge H von G die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) Für alle $h_1,\, h_2 \in H$ gilt $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \bullet h_2 \in H$.
(ii) Für alle $h_1,\, h_2 \in H$ gilt $h_1 \bullet h_2^{-1} \in H$.
(iii) Für alle $h_1,\, h_2 \in H$ gilt $h_1 \bullet h_2 \in H$, und für die folglich erhaltene Verknüpfung $\bullet : H \times H \to H$ ist $(H, \bullet)$ eine Gruppe.
(Zeigen Sie in (iii) zunächst, dass die neutralen Elemente von H und von G übereinstimmen.)

AUFGABE 4: Entscheiden Sie, ob V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.
(i) $V = \mathbb{R}^2$. Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$,
Skalarmultiplikation: $c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ c^{-1}a_2 \end{pmatrix}$ falls $c \neq 0$, und $c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$ falls $c = 0$.
(ii) $V = \mathbb{R}^2$. Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$,
Skalarmultiplikation: $c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
(iii) $V = \mathbb{R}^2$. Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 \\ a_2 + 3b_2 \end{pmatrix}$,
Skalarmultiplikation: $c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{pmatrix}$.