Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne

Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Übungsaufgaben, Blatt 4

AUFGABE 1: Betrachten Sie folgende Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $U =< v_1, v_2 >$ und $V =< v_3, v_4 >$. Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$. Geben Sie ein Komplement von $U \cap V$ in $U + V$ an.

AUFGABE 2: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jede Familie $U_1, \ldots, U_n$ von K-Untervektorräumen in V die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die natürliche Abbildung $U_1 \times \ldots \times U_n \to V$, gegeben durch $(u_1, \ldots, u_{n)} \mapsto u_1 + \ldots + u_n$, ist bijektiv.

(ii) Es gilt $V = U_1 + \ldots + U_n$, und sind $u_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq n$, so folgt aus $u_1 + \ldots + u_n = 0$, dass $u_1 = \ldots = u_n = 0$.

(iii) Es gilt $V = U_1 + \ldots + U_n$ und $U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(iv) Es gilt $V = U_1 + \ldots + U_n$ und $\dim(V) = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$.

AUFGABE 3: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jede Familie $U_1, \ldots, U_n$ von K-Untervektorräumen in V folgende Formel gilt:

$$\sum_{i=1}^n \dim(U_i) = \dim(\sum_{i=1}^n U_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \dim((\sum_{j=1}^i U_j) \cap U_{i+1}).$$

Folgern Sie, dass die Aussagen in Aufgabe 2 äquivalent sind zu der folgenden:

(v) Es gilt $V = U_1 + \ldots + U_n$ und $(U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1} = \{0\}$ für alle $1 \leq i \leq n - 1$.

AUFGABE 4: Es sei K ein Körper der endlichen Elementanzahl q.

(ia) Sei $q = 2$. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^2 ?

(ib) Sei $q = 3$. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^2 ?

(ic) Sei q beliebig. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^2 ?

(iia) Sei $q = 2$. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^3 ?

(iib) Sei $q = 3$. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^3 ?

(iic) Sei q beliebig. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^3 ?

AUFGABE 5: (4 Zusatzpunkte) (a) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie alle K-Vektorräume, die genau eine Basis haben.

(b) Es sei K ein Körper der endlichen Elementanzahl q, sei $n \in \mathbb{N}$. Wieviele eindimensionale K-Untervektorräume enthält K^n ?