Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 5

AUFGABE 1: (i) Gibt es ein lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(ii) Gibt es ein lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit
$f(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(iii) Zeigen Sie: es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit
$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $f(\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix})$.

(iv) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ mit
$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ gibt. Bestimmen Sie $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$. Ist f ein Isomorphismus ?

AUFGABE 2: Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, sei U ein K-Untervektorraum von V.

(i) Sei H eine Hyperebene in V, also ein K-Untervektorraum von V der Dimension $\dim(H) = \dim(V) - 1$. Zeigen Sie: ist U nicht in H enthalten, so gilt $V = U + H$ und $\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1$. Was passiert im Falle $U \subset H$?

(ii) Sei $d := \dim(U) < \dim(V)$. Es gibt Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{n-d}$ mit $U = \cap_{i=1}^{n-d} H_i$.

AUFGABE 3: Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(i) Ist $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $f \circ f = f$, so gilt $V = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. (Hinweis: für $v \in V$ gilt $v = v - f(v) + f(v)$.)

(ii) Ist V endlich erzeugt und ist $U \subset V$ ein K-Untervektorraum, so existiert eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$ und $\mathrm{Ker}(f) = U$.

AUFGABE 4: Sei K ein Körper. Zu $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei $X^n : K \to K$ die durch $X^n(x) = x^n$ für $x \in K$ definierte Abbildung. Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $U =< X^0, \ldots, X^d >$ der im K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(K, K)$ durch $X^0, \ldots, X^d$ erzeugte K-Untervektorraum. Zeigen Sie:

(i) Enthält K mindestens $d + 1$ Elemente, so gilt $\dim(U) = d + 1$. Hinweis: Sind $x_0, \ldots, x_d \in K$ paarweise verschieden, so betrachte für $i = 0, \ldots, d$ die Abbildungen

$$P_i : K \to K, x \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{d} (x - x_k).$$

(ii) Ist in (i) die Voraussetzung an K notwendig ? Beweis oder Gegenbeispiel !