Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 6

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:
(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, (iii) $\begin{pmatrix} t & s & t \\ s & t & s \\ t & s & t \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (Charakterisierung von Basen durch ihre universelle Eigenschaft: eine Umkehrung zu Satz 9.11) Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie: existiert für jeden K-Vektorraum W und jede Familie $w_1, \ldots, w_n \in W$ genau eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ sein Dualraum. Zur Erinnerung: für einen K-Untervektorraum $U \subset V$ hatten wir den K-Untervektorraum $U^\perp \subset V^*$ definiert als

$$U^\perp = \{\ell \in V^* \mid \ell(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Seien nun U und W zwei K-Untervektorräume in V. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $U \subset W$ genau dann, wenn $W^\perp \subset U^\perp$.

(ii) Es gilt $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ und $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Aufgabe 4: Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix, die folgenden beiden Bedingungen genügt:
(i) $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < 1$ für alle $1 \le i \le n$, und
(ii) $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$.

Zeigen Sie, dass A den Rang n hat.

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix, die folgenden beiden Bedingungen genügt:
(i) $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$ für alle $1 \le i \le n$, und
(ii) $a_{ij} < 0$ für alle $i \neq j$.

Zeigen Sie, dass A den Rang $n - 1$ hat.