Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 7

Aufgabe 1: Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

(i) Die durch $f^*(\ell) := \ell \circ f$ (für $\ell \in W^*$) definierte Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ ist K-linear.

(ii) Es gilt $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$. Folgern Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn f^* injektiv ist.

(iii) Es gilt $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$. Folgern Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f^* surjektiv ist.

Aufgabe 2: Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Zeigen Sie: gilt $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda I_n$ (= diejenige Matrix, deren sämtliche Einträge auf der Diagonalen gleich λ sind, und alle anderen Einträge gleich 0).

Hinweis: Betrachten Sie AB und BA für Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, die nur einen Eintrag $\neq 0$ haben.

Aufgabe 3: (a) Sei K ein Körper, seien $n, m, k \in \mathbb{N}$, seien $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,k}(K)$. Zeigen Sie $\mathrm{Rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\}$.

(b) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, sei $m = \mathrm{Rang}(A)$. Zeigen Sie: es existieren Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ mit $A = BC$.

Hinweis: Betrachten Sie die A zugeordnete K-lineare Abbildung $\ell_A : K^n \to K^n$.

Aufgabe 4: Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Sei $A_f = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ die f darstellende Matrix bezüglich einer fest gewählten Basis von V (die sowohl als Basis des Quellraums V wie des Zielraums V aufgefasst wird). Es gelte $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$. Hierbei bezeichnet $f^m = f \circ \ldots \circ f$ die m-fache Hintereinanderausführung von f.

(ii) Für $u = \mathrm{id}_V + f$ gilt $u \in \mathrm{GL}(V)$ und $u^{-1} = \mathrm{id}_V + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i f^i$.