Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 8

Aufgabe 1: Welche der folgenden linearen Gleichungssysteme sind lösbar ? In welchen Fällen gibt es eindeutige Lösungen ? Argumentieren Sie mit den Ergebnissen aus Paragraph 11 der Vorlesung.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} x = 1$ für $x \in \mathbb{Q}^4$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{Q}^3$.

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{Q}^2$, zu festen $a, b \in \mathbb{Q}$.

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}^3$, zu festen $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum in K^n die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in K ist.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, ferner $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $y, y' \in K^m$. Seien $\ell_A : K^n \to K^m$ und $\ell_{A'} : K^n \to K^m$ die A und A' zugeordneten K-linearen Abbildungen. Zeigen Sie: Haben die linearen Gleichungssysteme $Ax = y$ und $A'x = y'$ dieselbe Lösungsmenge L, so gilt $L = \emptyset$ oder $\mathrm{Ker}(\ell_A) = \mathrm{Ker}(\ell_{A'})$. Folgt umgekehrt aus $\mathrm{Ker}(\ell_A) = \mathrm{Ker}(\ell_{A'})$, dass dann notwendig die beiden linearen Gleichungssysteme $Ax = y$ und $A'x = y'$ dieselbe Lösungsmenge besitzen ?

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(K)$ mit $a, b, d \in K$, wobei $a \neq 0$ und $d \neq 0$. Sei $\ell_A : K^2 \to K^2$ die zugeordnete K-lineare Abbildung. Ein K-Untervektorraum U von K^2 heisst ℓ_A-invariant, falls $\ell_A(U) \subset U$.

(i) Zeigen Sie: Gilt $a = d$ und $b \neq 0$, so existiert genau ein ℓ_A-invarianter K-Untervektorraum von K^2 der Dimension 1.

(ii) Belegen Sie durch Gegenbeispiele, dass die Voraussetzungen $a = d$ und $b \neq 0$ in (i) beide notwendig sind.

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte) [Spiegelung in der Ebene] Im Körper K gelte $1+1 \neq 0$. Seien $a, c \in K$, wobei $c \neq 0$. Sei

$$S = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix},$$

sei $\ell_S : K^2 \to K^2$ die zugeordnete K-lineare Abbildung.

(i) Finden Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $x \in K^2$ mit $\ell_S(x) = x$.

(ii) Finden Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $y \in K^2$ mit $\ell_S(y) = -y$.

(iii) Zeigen Sie: für jede Wahl von x, y gemäss (i) und (ii) ist x, y eine Basis von K^2.

(iv) Ist $K = \mathbb{R}$, so veranschaulichen Sie die Abbildung $\ell_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.