Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Übungsaufgaben, Blatt 9

Aufgabe 1: Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ werde bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$ und der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$ dargestellt durch die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,5}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen sie eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der durch A dargestellten $\mathbb{R}$-linearen Abbildung. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in den beiden Fällen $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ regulär sind, und bestimmen Sie ihre Inversen.

(i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(iii) $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $a_{ij} = 1$ für $i \ge j$ und $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, U ein K-Untervektorraum von V und $\mathrm{p} : V \to V/U$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(i) Die Zuordnung $W \mapsto \mathrm{p}(W)$ definiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der K-Untervektorräume von V, die U enthalten, und der Menge der K-Untervektorräume von V/U.

(ii) Für zwei beliebige U enthaltende K-Untervektorräume W_1 und W_2 von V gilt $\mathrm{p}(W_1 + W_2) = \mathrm{p}(W_1) + \mathrm{p}(W_2)$ und $\mathrm{p}(W_1 \cap W_2) = \mathrm{p}(W_1) \cap \mathrm{p}(W_2)$ (all dies sind dies K-Untervektorräume von V/U !).

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte) [Scherung] Zu $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ (a-1)^2 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Sei $\ell_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugeordnete $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(i) Finden Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\ell_M(x) = x$.

(ii) Ergänzen Sie x zu einer Basis x, y von $\mathbb{R}^2$ und schreiben Sie $\ell_M(y)$ als Linearkombination von x und y.

(iii) Zeigen Sie $\ell_M(\alpha x + \beta y) \in \beta y + \mathbb{R}x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iv) Veranschaulichen Sie die Abbildung $\ell_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Welche Punkte bleiben fest ?